

Задачи Г.Б.Шабата к лекции 1.

Задачи для решения традиционными методами

T1.1. Что можно сказать о треугольнике, у которого центры описанной и вписанной окружностей совпадают? Докажите теорему Понселе для равносторонних треугольников.

T1.2. Ограничьтесь рассмотрением множества треугольников с *единичным периметром*, то есть задаваемом в множестве длин уравнением $a + b + c = 1$. В плоскости, задаваемой этим уравнением, изобразите пересечение с множеством \mathbb{T} .

T1.3. Вычислите тройки чисел (d, R, r) для всех известных вам треугольников: равностороннего и его половины, прямоугольного равнобедренного, египетского,

T1.4. Вычислите величины d^2 и $R^2 - 2Rr$ для всех треугольников из предыдущей задачи.

T1.5. Докажите формулу Эйлера для равнобедренных треугольников.

T1.6. Найдите где-нибудь доказательство формулы Эйлера для произвольных треугольников. Удастся ли его запомнить?

T1.7. Сформулируйте (гипотетические) обобщения теоремы Понселе, которые придут вам в голову. Замените вписанные треугольники на невписанные, перейдите от треугольников к четырёхугольникам, рассмотрите трёхмерные аналоги и т.п. Ни в чём себе не отказывайте.

Задачи для решения с помощью компьютерной геометрии

G1.1. Постройте динамический чертёж, демонстрирующий теорему Понселе для треугольников.

G1.2. Проиллюстрируйте сдвиг Понселе и его итерации для произвольной пары окружностей.

G1.3. Проиллюстрируйте аксиому Дезарга.

G1.4. Проиллюстрируйте теорему Паскаля.

Задачи для решения с помощью компьютерной алгебры

A1.1. Пусть пара окружностей является описанной и вписанной для "египетского" треугольника (со сторонами 3,4,5). Предъявите ещё десять троек длин сторон треугольников с той же парой описанной и вписанной окружностей.

A1.2. Пусть большая и малая окружности задаются уравнениями

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ и } (x - d)^2 + y^2 = r^2.$$

Выведите соотношение между числами d, R, r , равносильные тождественности тоекратного сдвига Понселе. Указание. Воспользуйтесь параметризациями

$$\frac{x}{R} = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \frac{y}{R} = \frac{2T}{1 + T^2} \text{ и } \frac{x - d}{r} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{y}{r} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$