

VII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. 40 разбойников переправились с помощью двухместной лодки с левого берега реки на правый (некоторые рейсы, возможно, выполнялись в одиночку). Могло ли случиться, что каждая пара разбойников пересекла реку вместе ровно один раз (с левого берега на правый или с правого на левый)? (А. Шаповалов)

Ответ. Нет, не могло. **Решение.** Допустим, что могло. Заметим, что лодка должна сделать нечётное число рейсов. Поскольку с парами разбойников она сделала $40 \cdot 39/2 = 780$ рейсов, то должно быть нечётное число рейсов с одиночными разбойниками. Следовательно, кто-то из разбойников нечётное число раз перегонял лодку в одиночку. Но с другими разбойниками он тоже сделал нечётное число (39) рейсов, поэтому всего — чётное число. Значит, он остался на исходном берегу.

6. *Натуральное число называется совершенным, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2 ?* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение.** Заметим, что совершенное число равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Пусть у совершенного числа n такие делители равны d_1, \dots, d_k . Сумма всех попарных произведений его делителей равна $nd_1 + \dots + nd_k + d_1d_2 + d_1d_3 + \dots + d_1d_k + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$. Так как $nd_1 + \dots + nd_k = n(d_1 + \dots + d_k) = n^2$, достаточно убедиться, что на n^2 не делится сумма $D = d_1d_2 + d_1d_3 + \dots + d_1d_k + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$. А это так, потому что $0 < 2D = (d_1 + \dots + d_k)^2 - (d_1^2 + \dots + d_k^2) < n^2$.

7. В стране Графинии n городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $\frac{n}{2} + d$ групп таким образом, что-

бы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп. (Д. Карпов)

Решение. Рассмотрим граф, где вершины — города, а рёбра — авиалинии. По условию он является деревом, вершины которого, как известно, можно занумеровать двумя цифрами так, чтобы любые две смежные вершины были отмечены разными цифрами. Сделаем это и покрасим в чёрный цвет вершины, отмеченные той цифрой, которой отмечено не меньше половины всех вершин. Остальные вершины покрасим в разные цвета, для этого хватит $n/2$ цветов. Докажем индукцией по количеству вершин, что черные вершины любого дерева, у которого степени всех вершин не превосходят d , можно перекрасить в d цветов так, чтобы две вершины, имеющие общую соседнюю, были разноцветными. Если в дереве нет не чёрных вершин, то вершина всего одна и утверждение очевидно. Пусть есть не чёрная вершина x . Пусть y_1, \dots, y_k — соседи вершины x , они черные и $k \leq d$. Тогда при удалении вершины x получается k деревьев, каждое из которых меньше исходного и может быть покрашено по предположению индукции. Так как покраски этих деревьев независимы, можно покрасить их так, чтобы все вершины y_1, \dots, y_k имели разные цвета, что нам и нужно. Вернемся к задаче и покрасим черные вершины нашего дерева, как сказано выше. Предположим, что пары соседних вершин a_1b_1 и a_2b_2 имеют одинаковые наборы цветов. Тогда не чёрные вершины a_1 и a_2 в этих парах совпадают. Но все соседи вершины a_1 разноцветны, противоречие.

8. SK — биссектриса треугольника ABC . На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C, L и T подобен исходному. (С. Берлов)

Решение. Отметим такую точку S , что $BLSK$ — параллелограмм. Если S совпала с T , то подобие очевидно. Если же S не совпала с T , то поскольку $CT = BL = KS$ и $\angle SKC = \angle KCL = \angle KCA$, точки K, C, T, S — вершины равнобедренной трапеции. Так как $TL = KB = LS$, то точка L лежит на оси симметрии этой трапеции, следовательно, $\angle CTL = \angle KSL = \angle KBL$, откуда и следует требуемое подобие.

