

В. И. Арнольд

Нужна ли в школе математика?

Стенограмма пленарного доклада
(Дубна, 21 сентября 2000 г.)

Москва
Издательство МЦНМО
2004

УДК 51.001.8
ББК 74.262.21
А84

Арнольд В. И.

А84 Нужна ли в школе математика? Стенограмма пленарного доклада (Дубна, 21 сентября 2000 г.). — М.: МЦНМО, 2004. — 32 с.
ISBN 5-94057-007-0

Брошюра представляет собой текст доклада, прочитанного академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом участникам Всероссийской конференции по математическому образованию (Дубна, сентябрь 2000 г.).

Книга представляет интерес для преподавателей математики как школ, так и высших учебных заведений, всем кто заинтересован в развитии математического образования.

ББК 74.262.21

ISBN 5-94057-007-0

© Арнольд В. И.
© МЦНМО

— Я собираюсь рассказать сегодня о довольно грустных обстоятельствах, связанных с положением математического образования во всём мире. Больше всего я знаю положение, естественно, в России, а также во Франции и в Соединённых Штатах. Но процессы, о которых я буду говорить, примерно одновременно идут во всём мире. Они несколько невероятны, но то, что я буду рассказывать, как бы это ни было невероятно, — чистая правда.

Я бы назвал основной процесс, который сейчас я замечаю, который сейчас идёт и который внушает главную тревогу, — я бы назвал этот процесс *американизацией*. Американизация состоит в том, что население земного шара, те миллиарды, которые живут на земном шаре, все хотят, чтобы у них в каждом доме был «Макдоналдс», ну и, соответственно, хотят, чтобы у них была такая “культура”, как в Америке. Но что такое американская “культура”? Я, пожалуй, расскажу пример, чтобы не быть голословным. В Гарварде я видел студентку, которая специализировалась по европейскому искусству, на уроках французского языка. Там надо было говорить по-французски, и преподавательница её спрашивает по-французски: «А вы-то в Европе были?» — «Была.» — «Во Францию заезжали?» — «Заезжала.» — «Париж видели?» — «Видела.» — «А видели ли вы там Нотр-Дам де Пари (т. е. собор Парижской Богоматери)?» — «Видела.» — «Вам понравилось?» — «Нет!» — «Почему же так?» — «Он такой старый!»

Американская точка зрения состоит в том, что *всё старое надо выбрасывать*. Если машина старая, её надо заменить на новую, собор Парижской Богоматери надо сломать, ну и так далее. Вот и математику надо устранить из образования. Приведу ещё один пример. Я прочитал недавно текст, который принадлежит Томасу Джефферсону, третьему президенту Соединённых Штатов, автору Декларации независимости, одному из «отцов нации». И он по поводу математического образования

Автор благодарит Е. Н. Осьмову за подготовку к печати записи этого доклада. Частично поддержано РФФИ, грант № 99-01-01109.

уже высказывался в своих “Письмах из Джорджии”. Он говорит следующее (и это высказывание, на мой взгляд, является определяющим для математического образования в Соединённых Штатах и сегодня): «ни один чёрный никогда ни поймёт ни слова в Евклиде, и ни одного учителя (или учебника), который будет ему объяснять евклидову геометрию, он никогда не поймёт». Это значит, что всю геометрию надо из школьного образования исключить, потому что демократическая эволюция должна сделать всё понятным меньшинствам; “кому нужна она, эта математика...”

Французский пример. Министр образования и науки Франции рассказывал (на заседании парижского собрания математиков во Дворце открытий) доводы, которые показывали, что обучение математике в школе надо прекратить вообще. Это довольно разумный человек, Клод Аллегрэ, геофизик, занимается плаванием материков, применяет математику, теорию динамических систем. Его довод был такой. Французского школьника, мальчика лет восьми, спросили, сколько будет $2 + 3$. Он был отличник по математике, но считать не умел, потому что там так учат математике. Он не знал, что это будет пять, но он ответил, как отличник, так, чтобы ему поставили пятёрку: « $2 + 3$ будет $3 + 2$, потому что сложение коммутативно». Французское обучение всё устроено по этой схеме. Они учат такие вот вещи и в результате ничего не знают. И министр считает, что, чем так учить, лучше не учить вообще. Когда нужно будет что-нибудь по делу, когда понадобится, выучат сами, а обучение этой псевдонауке есть лишняя потеря времени. Вот французская точка зрения на сегодняшний день. Очень грустно, но это так.

Во Франции сейчас тоже происходит американизация. В частности, я получил письмо из их Академии наук в апреле, что они пересматривают устав Академии. Один из важных пунктов, как надо изменить устав Академии наук Франции, состоял в том, что нужно, чтобы не было членкоров, всех членкоров считать академиками, и в новых выборах в членкоры не избирать никого, а только академиков. И дальше — двадцать страниц обоснования такого теологического характера, говорится, что Франция, как старшая дочь католической церкви, и так далее... Там не обязательно религиозные обоснования, там всякие, но я ничего не мог понять, мне было очень трудно, пока я не дошёл до последней строчки на какой-то далёкой странице, и тогда я понял, что я эту строчку уже слышал много раз за те двадцать лет, что я слышу это обсуждение. Вероятно, Франция идёт впереди, но и мы

тоже дойдём до этого, и этот довод, и это рассуждение — всё это будет встречаться и в нашей Российской академии наук, я полагаю. Довод, который, на мой взгляд, является единственным значимым во всех этих обоснованиях и который, по-видимому, является основным для них, такой: *в Национальной академии наук США в Вашингтоне членкоров нет.*

Следующий проект состоял в том, что современное человечество сталкивается с большим количеством проблем, а академии наук национальные, в каждой стране своя академия, которая решает свои проблемы. Это пережиток, это нехорошо. Нужно создать *супербюрократическую организацию, суперакадемию*, которая будет всемирной и которой отношение к обычным академиям наук будет таким, как отношение префекта полиции к обычным рядовым полицейским. Она будет решать, каковы основные проблемы человечества, например, глобальное потепление атмосферы, мальтузианская проблема перенаселения, озоновые дыры, ну и другие, перечислено несколько десятков таких основных, фундаментальных проблем: автомобилей слишком много развелось, и они свинцом загрязняют воздух и так далее, я уже не помню весь этот список. Так вот, надо принять решение, какие проблемы первоочередные, чтобы человечество сохранилось, какая страна какую проблему будет решать.

И дальше в этом списке было написано, какую проблему берёт на себя старшая дочь католической церкви Франция, которая предлагает, и какая проблема, и какой французский метод решения этой проблемы. Вот эта проблема прямо связана с темой нашей сегодняшней конференции. Эта проблема такова: *во всём мире катастрофически падает уровень образованности.* Новое поколение детей приходит, которые ничего не знают: ни таблицы умножения, ни евклидовой геометрии — ничего не знают, не понимают и не хотят знать. Они только хотят нажимать на кнопки компьютера, и больше ничего. Что делать, как тут быть? Министрами всюду, во всех странах, становятся люди, которые ничего не понимают, и ясное дело, что им нужно уничтожать всякую цивилизацию и культуру, просто для того, чтобы выжить, чтобы среди более высокого по культурному уровню окружения удержаться, этим людям надо уничтожать всякую культуру и всякое образование. Как это сделать? (Я говорю про Францию.)

Итак, французский проект: как исправить положение с образованием. Французская академия наук предлагает: *надо образовывать женщин.* Ну, это опять американская идея — это феминизм, который имеется

и во Франции, имеется, наверное, и у нас. Можно предвидеть, что и у нас скоро будет принят такой же проект.

Теперь, после этих грустных слов, я хочу сказать несколько слов относительно того, как мы до этой жизни дожили, как это образовалось, как получилось за много тысяч лет развития математики, как пришли к этой ситуации. Надо сказать, что я немножко интересовался в последние годы этой историей и выяснил, что всё, что написано в учебниках по поводу истории науки, большинство этих вещей — это грубые ошибки, совершенно неправильные утверждения. И я сейчас расскажу немножко про историю развития математики, то, что я узнал, вещи, о которых я не знал.

Историки, конечно, это знали, даже есть книги историков, в которых это всё написано. Но если мы посмотрим, что пишут математики, что пишут педагоги, что написано в книжках, которые мне дали на этой конференции, в которых даже мои друзья пишут о том, какие были великие математики, какие они сделали великие открытия, когда, что, как — многое было иначе. Открывали другие люди, открытия должны бы фигурировать под другими именами. . .

Я сейчас расскажу некоторое количество этих правд, которые, вообще, известны историкам, но неизвестны математикам, как правило. Я узнал очень недавно о великих открытиях такого крупнейшего математика, имя которого неизвестно, он был в Египте у фараона главным землемером и был после смерти объявлен богом, и его божественное имя известно, а его первоначальное имя я, во всяком случае, не знаю. Как египетский бог он назывался Тот¹. У греков потом его теории стали распространяться под именем Гермес Трисмегист, и в средние века была книга «Изумрудная скрижаль», которая ежегодно издавалась по нескольку раз, и было много изданий этой книги, например, в библиотеке Ньютона, который тщательно его изучал. И очень многие вещи, которые приписываются Ньютону, на самом деле уже там содержались. Что открыл Тот? Я перечислю некоторое небольшое количество открытий. По-моему, каждый культурный человек должен был бы знать, что был такой Тот, и что он открыл, и какие его великие изобретения. То, что я до этого года не знал об этом — это позор.

Первая вещь, которую он придумал — это *числа, натуральный ряд*. До него числа, конечно были: 2, 3, . . . до числа, которым выражалась сумма всего налога, который платили египетскому фараону — число,

¹ Тураев Б.А. Бог Тот. — Лейпциг, 1898.

которое выражает весь годовой налог, существовало, а больших чисел не было. Идея, что числа можно продолжать неограниченно, что нет самого большого числа, что всегда можно прибавить единицу, что можно построить систему счисления, в которой записываются как угодно большие числа — вот это идея Тота, это первая его идея. Сегодня мы называем её идеей актуальной бесконечности.

Второе открытие, которое тоже очень значительно, — это *алфавит*. До него были иероглифы, в которых изображались знаками слова, например «собака». А ему пришла в голову идея, что фонемы, звуки надлежит записывать, установив вместо тысяч иероглифов, которые были для слов, всего лишь несколько десятков иероглифов, например, упрощённой «собакой» изображать звук «с» всегда, «с» в любом слове — это будет похоже на эту самую «собаку», такую упрощённую «собаку». Он придумал египетский алфавит. Все наши европейские алфавиты пошли от него. У нас имеется такая легенда, которую можно найти во всех учебниках, что будто бы Шампольон открыл «розеттский камень», будто бы Шампольон, взявший этот «розеттский камень», трилингву, которая там была, нашёл соответствие, прочитал иероглифы и так далее. Так вот, это всё неправда. На самом деле я ухожу немножко в сторону от математики, это история другой науки, это всё равно неправда. На самом деле с Шампольоном была история такая: Шампольон действительно разгадал этот алфавит, он действительно прочитал, но без всякого «розеттского камня». Этот «розеттский камень» нашли после того, как Шампольон уже опубликовал свою теорию. Когда — лет через двадцать — был найден «розеттский камень», он взял этот камень и показал на этом камне, что даёт его теория, и сравнил с тем греческим переводом, который был на камне, и всё сошлось. Тем самым, это было доказательство, но теория была к этому времени давно опубликована. Шампольон открыл египетский алфавит совершенно другим способом. Основное, между прочим, открытие, которым воспользовался Шампольон, что было взято им у Плутарха, и основное, что ему позволило читать иероглифы, иероглифические тексты, алфавит вот этот, было очень странное открытие, которого никто до него почему-то не понимал. Оказывается, иероглифические тексты писались не слева направо, как у нас, а справа налево. Плутарх это знал, как это было написано, Шампольон это понял, и он стал читать в другую сторону, и тогда получилось. Тогда он

придумал расшифровку. Но вдаваться в детали теории расшифровки я не буду.²

Третье открытие Тота — это *геометрия*. Геометрия в буквальном смысле — это землемерие. Тоту поручалось фараоном, он должен был знать, участок земли, огороженный, вот такой-то величины, какой урожаёй принесёт. Это зависит от площади, ему надо было измерять эти площади, проводить межи, воду разделять из Нила, делать отвод воды и все эти практические работы. И он научился. Для этого он придумал геометрию, всё то, что мы сейчас учим, евклидову геометрию, вся эта геометрия — Тота на самом деле. В частности, Тот и впоследствии его ученики измерили при помощи своих геометрических методов радиус Земли. Радиус Земли, который они измерили, был ими получен *с ошибкой в один процент* относительно современных данных, это колоссальная точность. Вдоль Нила шли караваны верблюдов, от Фив до Мемфиса, они шли почти по меридиану и считали верблюжьих шаги, тем самым, знали расстояние. В то же время можно, наблюдая полярную звезду, померить широты городов и, зная разницу широт и расстояние по меридиану, можно померить радиус Земли, и они это очень хорошо сделали и нашли радиус с точностью 1%.

Ну и, наконец, последнее его открытие, про которое я упомяну, относительно мелкое, но всё-таки интересное, что он придумал, были *шашки*. Шахматы были у индусов, шахматы были известны, но это сложная и не народная игра, он демократизировал шахматы и придумал шашки. Шашки идут тоже от него.

В учебнике истории имеются ещё десятки его открытий, изобретений всяких, я для краткости, конечно, сейчас перечислять их не буду.

Откуда стало всё это известно нам? Вот мы знаем евклидову геометрию. Откуда идёт евклидова геометрия, откуда всё это произошло? Оказывается, изучение науки, которая была создана Тотом, составляло коммерческую тайну Египта. В Александрии была библиотека (мьюзиум), в которой хранилось семь миллионов томов, в которых вся наука была записана, но нужно было иметь специальный допуск, для того чтобы ознакомиться с этим материалом, и нужно было иметь от жрецов пирамид разрешение на то, чтобы всё это изучать. Имеется по крайней мере четыре великих греческих учёных (промышленных шпи-

²“Русский Шампольон” Н. А. Невский расшифровал тангутские иероглифы и восстановил этот забытый язык; он был расстрелян в 1937 году и посмертно реабилитирован в 1957 году. “Тангутская филология” удостоена Ленинской премии в 1962 году.

онов), которые украли у египтян эту науку, которая не была придумана вся египтянами, они заимствовали много — у халдеев, у вавилонян, у индусов — но, во всяком случае, это было засекречено.

Первым из них, по-видимому, был *Пифагор*³. Некоторые говорят, что он четырнадцать лет прожил среди этих жрецов, некоторые — что двадцать. Он получил допуск, ознакомился, выучил всю эту науку, всю евклидову геометрию, алгебру, арифметику и заявил, что он никогда не рассекретит эти секретные сведения. И действительно, от Пифагора не сохранилось ни одной строчки, он никогда ничего не записывал. Учение Пифагора, когда он вернулся в Грецию, распространялось устным образом его учениками. Никаких книг Пифагора не было. Тексты Евклида через несколько поколений — это произвели разные ученики Пифагора, которые всё записали уже впоследствии. Пифагор ничего не писал сам, потому что он поклялся, что не будет. Но он распространил эти знания в Греции — аксиомы, кроме, быть может, пятого постулата, который, по-видимому, принадлежит самому Евклиду⁴. В частности, теорема Пифагора была заведомо опубликована за две тысячи лет до него в Вавилоне, клинописью, а кроме теоремы, известны были и пифагоровы тройки (мне недавно вручили книжку, в которой Тихомиров, кажется, утверждает, что эти тройки нашёл кто-то ещё другой). Но всё это было давно-давно известно, за тысячу лет до Пифагора, и египетские жрецы всё это знали и употребляли при строительстве пирамид треугольники (3, 4, 5), (12, 13, 5) и другие, и формулу общую знали, как построить все эти треугольники. Всё это было хорошо известно, но — приписывается Пифагору (вместе с теорией переселения душ).

Я однажды получил письмо от английского физика Майкла Берри (знаменитые “фазы Берри”), который написал мне письмо — следствие нашего обсуждения приоритетных вопросов. И он написал, что эти обсуждения можно суммировать при помощи следующего принципа Арнольда: *если какой-нибудь предмет имеет персональное наименование* (например, Пифагоровы тройки или теорема Пифагора; Америка, например), *то это никогда не бывает имя первооткрывателя*. Это

³ Историк Диодор Сицилийский пишет: “Pythagoras learned from Egyptians his teaching about the gods, his geometrical propositions and the theory of numbers, the orbit of the sun...” (The Library of History, Book I, 96–98).

⁴ У Тота, видимо, место этого постулата занимали несколько эквивалентных ему аксиом. Тот факт, что все они вытекают из одной из них, и был, по-видимому, доказан Евклидом.

всегда имя какого-то другого человека. Америка не называется Колумбией, хотя открыл её Колумб.

Кстати, почему Колумб открыл Америку? Это тесно связано с тем, что я только что рассказывал. Когда Колумб отправился к испанской королеве Изабелле проситься в экспедицию (он не собирался открывать Америку, он собирался открывать путь через Атлантический океан в Индию), то королева ему сказала: нет, нельзя. А дело было вот в чём. Через двести лет после египтян вопрос о размере Земли рассмотрели греки. Греки, пользуясь украденными Пифагором сведениями, знали про египетские измерения, но не верили египтянам (что это за измерения, какие-то верблюды, что это такое. . .). И они провели измерения заново. Они взяли триеру, корабль, который пересёк Средиземное море с юга на север, от Александрии до острова Родос, померили путь, зная скорость корабля при сильном ветре, разность широт тоже можно померить, и получили новый размер (радиус) Земли. Но так как, конечно, египетский способ был надёжным, потому что верблюды — это хороший счёт расстояний, а скорость корабля при сильном ветре — это что-то такое неопределённое, греческая оценка была вдвое отличающейся от египетской. И греки это опубликовали и говорили, что египтяне уже мерили, но поскольку они слаборазвитый народ⁵, то хорошо померить не смогли и получили Землю, которая вдвое меньше, чем настоящая; на самом деле у них ошибочные данные, а правильный размер Земли вдвое больше.

И поскольку вся греческая наука — Евклид, Пифагор, всё это — распространилась потом повсеместно, в школе учили, то и королева Изабелла тоже думала, что Земля вдвое больше, чем она есть, и она сказала Колумбу: «Ты не доплывёшь до Индии, потому что ни в какой корабль не уместится столько бочек с водой, сколько нужно взять, чтобы проплыть такое большое расстояние». Потому что очень далеко, а ничего по дороге нет (Америка не предполагалась). Колумб шесть раз к ней ходил и в конце концов каким-то образом избежал этих запретов и всё-таки добрался.

⁵Утверждали даже, будто египетские женщины публично проституировали себя крокодилам (P. J. Proudhon “De la célébration du dimanche”, 1850). Александр Македонский утверждал, что истоком Нила является река Инд, так как обе эти реки полны крокодилами, а берега их заросли лотосами. Он также считал, что Амударья — это Танаис, впадающий с севера в меотийские болота (т. е. Дон, впадающий в Азовское море) и что Каспийское море соединяется проливом с Бенгальским заливом Индийского океана (и потому не пошёл в Китай из Индии). Топология тогда была слабо развита.

Так вот, Берри пишет дальше: «Но чтобы принципом Арнольда надёжно пользоваться, нужно к нему добавить ещё один очень важный принцип — *принцип Берри*. Принцип Берри таков: *принцип Арнольда применим к самому себе*».

Конечно, несомненно, научные открытия воруют, воровали всегда и воруют.

(Из зала: И будут воровать!)

Может быть, и будут воровать, а может быть, и нет, потому что наукой уже не будут интересоваться, потому что уже платить будет некому за это уворованное. Может быть, уже и перестанут воровать науку просто потому, что заказчиков не будет больше, вот в чём дело.

Я перечислю ещё несколько открытий, которые очень яркие и которые приписываются не первооткрывателям, а совершенно другим людям. Платон украл в Египте *логику* — *искусство рассуждать*, то, что дальше уже перешло в Европу через Аристотеля, Аристотелеву логику, софизмы, сориты (длинные цепочки силлогизмов) — вся эта наука была у египетских жрецов, была им хорошо известна. Её украл Платон, который тоже был шпионом. Ещё был такой знаменитый человек Орфей, который украл *музыку*: гармонию, гаммы, октавы, квинты, терции. . . Пифагор тоже занимался музыкой и знал, какой длины должны быть струны, чтобы соответствующее отношение частот получать, и какое натяжение струн надо было делать — это всё было у египтян совершенно стандартным, просто для ритуальной музыки, у них это было совершенно точно известно, а греки всё это заимствовали. Вся наша музыка заимствована через греков у египтян. И, наконец, последнее открытие, которое я хочу упомянуть — это странный случай. Это имя, может быть, менее известно, хотя автор — человек, очень заслуживающий глубокой нашей благодарности, — Эвдокс. Теория Эвдокса теперь называется *теорией чисел*. Эвдокс открыл следующее. Уже пифагорейцы знали (хотя кто первый открыл, не очень ясно, может быть, и Пифагор, может, и ученики Пифагора), что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и поэтому бывают иррациональные числа. Это открытие было немедленно *засекречено* уже самими греками, потому что для чего служили числа? Числа были только рациональные, и они служили для измерения. Но это открытие показывает, что чисел, т. е. рациональных дробей, недостаточно для измерения, потому что уже диагональ квадрата нельзя измерить. Следовательно, *арифметика* — *наука, не пригодная для практической жизни*, для физики, для всех приложений. Следовательно, если потребители — фараоны, люди вообще — узнают

о такого рода вещах, то они всех математиков прогонят, потому что они занимаются пропорциями, дробями — какой-то ерундой, которая никому не нужна. Так вот, Эвдокс преодолел эту трудность. Из-за этой трудности была запрещена теория рациональных чисел, а он её создал. Он создал то, что теперь называется теорией сечений Дедекин-да или кольцом Гротендика, это то же самое. Эта теория на самом деле полностью была создана Эвдоксом и изложена Евклидом в теории пропорций, в пятой, по-моему, книге Евклида. Так вошли в математику иррациональные числа.

Теперь я позволю себе немножко уклониться от математики и рассказать об открытиях, близких к математике (даже, собственно говоря, я бы включал это в математику, но некоторые мои современники не включают, я расскажу и об этом тоже). Это *астрономические* теории. Астрономия, небесная механика играла огромную роль в развитии математики, анализа — Ньютон, Кеплер хорошо известны. Законы Кеплера, то, что сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния — всему этому мы учим наших учеников, объясняем, какие великие открытия сделал Ньютон и так далее. Так вот, сам Ньютон имел совершенно другую точку зрения по истории этих вопросов. В его неопубликованных работах, алхимических и теологических, размер которых в десять раз больше, чем опубликованных математических и физических работ, он признаёт приоритет египтян, которые всё это знали за пару тысяч лет до него⁶. На самом деле в Египте было хорошо известно — не очень ясно, кто первый это открыл, но, во всяком случае, египетским жрецам были уже известны, во-первых, закон обратных квадратов, во-вторых, законы Кеплера и, в-третьих, что из закона обратных квадратов следуют законы Кеплера. У Ньютона написано, что, к сожалению, вывод одного из другого был записан в тех книгах, тех миллионах томов, которые сожгли в пожаре в библиотеке в Александрии, и поэтому в течение нескольких столетий это замечательное древнее рассуждение было потеряно, и он гордится тем, что ему принадлежит заслуга восстановить это доказательство. Теперь доказательство вновь объясняет, почему законы Кеплера вытекают из закона обратных квадратов. Но на самом деле всё это было хорошо известно. В VII веке до новой эры римский царь Нума Помпилий, царствовавший вскоре после Ромула, построил в Риме храм Весты, в котором был

⁶ Литературные ссылки о Тоте и его последователях можно найти в книге И. С. Дмитриева “Неизвестный Ньютон” (Издательство АЛЕТЕЙЯ, СПб, 1999), а кое-что есть уже в “Федре” Платона (М., 1989, стр. 64).

планетарий, который был построен по коперниковской гелиоцентрической системе. Коперник, между прочим, тоже цитирует этих древних и говорит, что гелиоцентрическая система не была его открытием, а была давно известна, но просто он обратил внимание людей нового времени на то, что было известно в старое время. В храме Весты, в центре, находился огонь, который изображал Солнце. Вокруг него жрецы носили с нужной скоростью по нужной эллиптической орбите изображение Меркурия, потом изображение Венеры, потом изображение Земли, потом изображение Марса, ну и, естественно, Юпитера и Сатурна. В любой день можно было встать на то место, где в это время жрецы держали Землю, и посмотреть, допустим, направление на то место, где жрецы держат Марс, а потом выйти на улицу и посмотреть вечером, и тогда в том направлении Марс увидеть.

Таким образом, весь этот вихрь небесномеханических открытий — всё это существовало за две тысячи лет до Ньютона. Вы не найдёте этого в учебниках. Ньютон ссылается, в частности, на учебник архитектуры Витрувия, в котором цитируется, но опять без доказательства, эллиптичность орбит, законы Кеплера, всё цитируется, всё было известно, но всё было уничтожено. Всё было уничтожено потому, что это было признано *бесполезной чистой наукой*. Кому там нужна эта астрономия, небесная механика, планеты. . . Это никого не интересовало, кроме разве астрологов. А вот архитектура, строительство — это другое дело. Поэтому из древних книг были сохранены копии книг по военному делу, по мореходству и по архитектуре. И только в них можно найти какие-то следы, когда цитируется, что где-то в Александрии лежит книга, в которой доказывалось то-то и то-то. Ньютон прочёл, использовал, нашёл доказательства⁷.

Я хочу здесь ещё процитировать одно высказывание, которое я недавно прочитал в изданной только что в Ижевске книжке Харди «Апология математика». Ужасная книжка совершенно, кошмарно безграмотный человек, который пишет, в частности, следующие вещи. Он пишет похвалу Гауссу, что Гаусс очень много занимался теорией чисел и что теория чисел справедливо называется королевой математики (я бы сказал, царицей математики даже, но он, по-моему, говорит «королевой»). Харди объясняет, почему теория чисел является королевой

⁷Первоначальное доказательство Ньютона (1666? г.) было ошибочным, но он понял это через много лет, когда, по совету Галлея, пытался использовать его для получения премии в сорок шиллингов, обещанной в пивной великим лондонским архитектором Реном Гуку и Галлею, пытавшимся доказать эллиптичность орбит.

математики. Вот это объяснение Харди, которое недавно повторил Юрий Иванович Манин, в некотором искажённом слегка виде, но почти то же самое говорил. Замечательное объяснение Харди таково: *теория чисел является, он говорит, королевой математики вследствие своей полной бесполезности*. Но у Юрия Ивановича немножко не так, он объясняет другое: что математика вся вообще является чрезвычайно полезной наукой, не потому, что, как говорят некоторые — это я на самом деле, — что математика способствует прогрессу техники, человечества и так далее, нет; потому, что она *препятствует этому прогрессу*, вот в чём её заслуга, вот основная проблема современной науки — препятствовать прогрессу, и математика в первую очередь это и делает, потому что, если бы ферматисты, вместо того чтобы доказывать теорему Ферма, строили самолёты, автомобили, они бы гораздо больше вреда причинили. А так математика отвлекает, отвлекает на какие-то глупые, никому не нужные задачи, и тогда всё в порядке. У Харди, между прочим, эта идея тоже присутствует, в несколько ином виде — поразительно, насколько можно быть наивным в XX веке! — у Харди написано так: страшной привлекательностью математики, особенно по сравнению с физикой и химией, является то, что она “абсолютно непригодна⁸ ни для каких военных применений”. У нас сейчас, конечно, другие точки зрения, может быть, Юрий Иванович и согласен с ним, но я нет. Что касается военных, то они тоже имеют совершенно другие точки зрения, и надо сказать, что Харди каким-то образом умудрялся работать с Литтлвудом, который занимался много прикладной математикой, и прилагал её к военному делу всерьёз, и Литтлвуд, конечно, никогда бы не подписался под такими глупыми словами.

Манин утверждает, что математика — своего рода лингвистика с несколько расширенным списком грамматических правил, включающим, скажем, что $1 + 2 = 3$, а обучение математике — обучение очковтирательству, так как тождественными преобразованиями, которыми только и занимаются математики, открыть ничего нового нельзя.

⁸ “Декартова” система координат постоянно использовалась древними римлянами при разбивке военного лагеря, чтобы можно было легко найти каждый легион. Следы этой системы координат заметны в топографии латинского квартала Парижа до сих пор.

Недалеко от начала координат сейчас имеется магазин “Jeux Descartes” (“Игры Декарта”). Впрочем, это название вряд ли можно считать попыткой приписать Декарту заслуги Цезаря: ведь “jeux des cartes” — это “карточные игры”, продающиеся в упомянутом магазине.

Наиболее полным современным воплощением идеи бесполезности математики является деятельность секты бурбакистов.

В действительности принципы Бурбаки были сформулированы частью Монтенем, частью Декартом в XVI–XVII веке. Монтень сформулировал два принципа всей французской науки, которыми французская наука отличается от наук других стран и которыми она до сих пор руководствуется. Первый принцип. Для того чтобы преуспеть, французский учёный должен в своих публикациях придерживаться такого правила: *ни одно слово из того, что он публикует, не должно быть никому понятно*, потому что, если что-нибудь будет кому-нибудь понятно, то все скажут, что это было и раньше известно, так что ты ничего не открыл. Поэтому надо писать так, чтобы было непонятно. Монтень ссылается на Тацита, указывавшего, что “ум человеческий склонен верить непонятному”. Декарт был его учеником в этом смысле, а за ним и Бурбаки пошёл. Изменить все тексты так, чтобы сделать их полностью недоступными — это первый принцип.

Приведу несколько доводов Монтеня, которыми он обосновывает необходимость писать непонятно (курсив везде мой):

- 1) “*Я ненавижу учёность* даже больше, чем полное невежество.” (“Опыты”, кн. III, гл. VIII)
- 2) “Кто сидит верхом на эпицикле Меркурия — *мне кажется, что он вырывает мне зуб*. Ведь они сами не знают ни причин движения восьмой небесной сферы, ни времени паводка на Ниле.” (кн. II, гл. XVII)
- 3) “*Первопричины явлений* понять было бы *проще*, но я не умею их объяснять. К простоте я не стремлюсь. Мои рекомендации — самые вульгарные.” (кн. II, гл. XVII)
- 4) “Науки доставляют *слишком тонкие* и искусственные *теории*. Когда я пишу, то стараюсь забыть всё, написанное в книгах, чтобы эти воспоминания не испортили форму моего сочинения.” (кн. III, гл. V)
- 5) “Наш *обычный понятный язык* в *практической жизни бесполезен*, так как он становится непонятным и полным противоречий при попытке применить его к формулировке контракта или завещания.” (кн. III, гл. XIII)

- 6) Квинтилиан (Inst. Orat., X, 3) давно уже заметил, что “трудность понимания создаётся *доктринами*”. (кн. III, гл. XIII) А Монтень именно доктрины хотел внушать читателю.
- 7) Согласно Сенеке (Epist., 89), “всякий предмет, разделённый на части, подобные пылинкам, становится *тёмным и непонятным*” (кн. III, гл. XIII). Сенека же заметил (Epist., 118), что “*Miramur ex intervallo fallentia*”, (т. е. “*восхищает нас именно обманчивое, вследствие своей удалённости*”). (кн. III, гл. XI) *Чтобы вызвать восхищение, необходимо напустить туману* в свои писания.
- 8) “Главный вывод всех моих исследований — убеждение в *обще-человеческой глупости*, самой надёжной черте всех школ мира.” (кн. III, гл. XIII) Этот принцип Монтеня применим и к его школе.

Понятно, что описывать достижения этих школ *ясно* Монтень не хотел. Паскаль отметил, что понимать то правильное, что есть у Монтеня, *трудно*. Энциклопедия Британника (1897) пишет, что Монтень не был понят, так как *этот юморист и сатирик обращался к читателям, лишённым чувства юмора*. Опыт Монтеня заразителен. Он писал: “именно среди учёных часто видим *умственно убогих* людей” (кн. III, гл. VIII) и “учёность может быть полезной для кармана, но душе она редко что даёт”. “Наука — дело нелёгкое, оно часто сокрушает.”

Второй принцип Монтеня состоит в том, чтобы полностью избегать чужой терминологии. Вся терминология должна быть твоя, собственная. Ты должен вводить новые понятия, ты можешь сослаться на свои предыдущие работы, где были введены эти термины, чтобы нельзя было читать твои следующие работы, не выучив наизусть предыдущие. *И никаких работ других авторов цитировать не следует, особенно же категорически запрещается цитировать иностранцев*⁹. Вот этот принцип, которого придерживаются до сих пор. В апреле французское министерство по науке, а также и органы безопасности, прислали мне приглашение принять участие в работе их комиссии, которая очень

⁹Вот явная формулировка Монтеня: “Il ne faudra jamais rencontrer quelque idiome du pays (toscan, napolitan, etc.) et de se joindre à quelqu'une des taut de formes. Ne faudra quelqu'un de dire «Voilà d'où il le print»” (“Опыты”, кн. II, гл. XII, стр. 274 издания образца 1588 года). То есть: “Не надо употреблять выражений чужих языков — тосканского, неаполитанского и т. д., ни следовать какой-либо из многочисленных форм. Не надо, чтобы кто-нибудь сказал бы: «Вот откуда он это взял!»”. Монтеня также удивляло, что “куда бы мои соотечественники ни попали, они всегда сторонятся иностранцев” (кн. III, гл. IX).

важна (и потому что они знают, что я занят, если я не смогу прийти, то чтобы ученика прислал, который бы моё мнение там представил, потому что им очень важно знать моё мнение), вот такая комиссия. *Комиссия по защите наследства французской науки от иностранцев.*

(Смех в зале.)

Борьба с космополитизмом, которая была у нас в конце сороковых годов, дошла до Франции, но почему-то только сейчас. Хотя у них, конечно, очень много всякой ксенофобии и того, чтобы найти всюду, что открыл любую вещь обязательно француз, например, у них есть свой изобретатель радио — ни Попов, ни Маркони не признаётся — у них есть свой памятник около Люксембургского вокзала в Париже человеку, который “изобрёл радиолокацию”, и так далее — всё сделали французы. Между прочим, я ещё хочу процитировать одного француза, высказывание которого мне, наоборот, очень нравится, это Пастер. Пастер высказался по поводу науки вообще и сделал замечательное высказывание, на которое мне хочется сослаться, потому что оно, по-моему, и для нас очень важно. Высказывание Пастера таково: *«Никогда не было, нет и не будет никакой прикладной науки. Существуют науки и их приложения»*. Имеется научное открытие, а потом оно прилагается к чему-нибудь — это да, а прикладная математика, прикладная физика, прикладная химия, прикладная биология — всё это обман, для того чтобы выкачивать деньги из налогоплательщиков или бизнесменов — больше ничего. Нет прикладной науки, есть одна наука — просто обычная.

Между прочим, эту идею можно встретить и у Маяковского, который говорил, что *человек, который открыл, что дважды два — четыре, был великим математиком, даже если он считал при этом окурки. А тот, кто теперь по этой же самой формуле считает гораздо большие предметы, например локомотивы, совершенно не математик*. Вот что такое прикладная математика. Нет никакой прикладной математики, учить “прикладной математике” — обман. Есть просто математика, есть наука, и в этой науке есть таблица умножения, например, что дважды два — четыре, есть евклидова геометрия, всему этому нужно учить обязательно. Если мы перестанем — к чему ведёт эта американизация или бурбакизация — перестанем учить, тогда что же от этого произойдёт? Произойдёт один Чернобыль за другим, и, соответственно, будут тонуть подводные лодки, и, соответственно, башни вроде Пизанской и Останкинской будут падать... Я недавно прочитал в Вестнике Академии наук, что Москву ждёт катастрофа,

подобная бывшей в Ульяновске, что, может быть, даже в ближайшую зиму просто миллион человек должен умереть от холода, потому что не справятся системы отопления, тепловые электростанции, отопление Москвы не приспособлено, не готово к тому, чтобы выдержать холода, которые являются типичными для нашего климата. Если наука будет прекращена, то тогда все вот эти несчастья апокалиптического характера свалятся на всё человечество, в том числе и на Россию. По американским данным, на сегодняшний день некоторые страны, в том числе Россия и Китай, остаются оазисом, в котором ещё имеется какая-то надежда на то, что эти процессы деградации образования идут медленнее. Они определили, что в Америке 80% школьных учителей математики не имеют никакого понятия о дробях: не могут сложить половину и треть, не знают даже, что больше, половина или треть, ничего не понимают. Не учили. А у школьников знания ещё хуже. В то время как в Японии, в Китае и даже в Корее положение гораздо лучше. Эти школьники прекрасно понимают, что такое половина, что такое треть, могут сложить половину с третью. . . Мы, как всегда, отстаём от передового человечества. Уничтожение науки, уничтожение культуры происходит повсюду, но у нас медленнее, чем в других местах, а это значит, что ещё есть некоторая надежда, что мы сохраним свой традиционный уровень культуры дольше, чем так называемые более передовые страны.

Джордж Малати, профессор университета в Финляндии: Я очень рад слушать Ваш доклад, и я могу сказать откровенно, от моего сердца, что я приехал сюда, специально чтобы поддержать ваши идеи, потому что, если культура падает, это очень трудно остановить обратно, на Западе мы знаем хорошо, что и вам очень легко разбить культуру. А сейчас мы знаем, что, естественно, логично, очень трудно остановить обратно. Я благодарю Вас и надеюсь, что мы все слушать и здесь, и за границей Вас. Ещё раз спасибо.

Из зала: Как по-вашему, нужно ли преподавать евклидову геометрию в школе?

— На мой взгляд, ничего лучшего у нас не придумано (а называть ли её евклидовой или как-нибудь иначе — есть разные варианты, конечно). Я знаю один случай человека, который не учил в школе евклидовой геометрии. Этот человек — Ньютон. Ньютон Евклида прочёл уже в университете. Он учил геометрию по Декарту, при помощи декартовой системы координат, а евклидову узнал позже, и был благодарен обоим. Хотя надо сказать, что Ньютон Декарта не любил, потому что Декарт, говорит он, наговорил столько глупостей и в физике, и в математике, что был просто вреден для науки. Как Ньютон мог, тем не менее, у него чему-то научиться, меня поражает. Теория Декарта — я приготовил, но не успел её рассказать — была такова. (Она и сейчас принята во Франции на вооружение, Бурбаки этому следуют.) Основных принципов четыре. Первый принцип Декарта: *не имеет никакого значения соответствие исходных аксиом какой-либо реальности*. Эти экспериментальные вопросы касаются приложений и каких-нибудь специальных наук. По Декарту, наука — это вывод следствий из произвольно взятых аксиом, которые не имеют ни к какому эксперименту, ни к какой реальности никакого отношения. (Это потом Гильберт много раз повторял.) Второй принцип: *столь же мало значения имеет соответствие какому-либо эксперименту окончательных выводов*. Мы делаем рассуждения какие-то, вроде умножения многозначных чисел, выводим из исходных аксиом какие-то новые следствия¹⁰, а сверять то, что

¹⁰ Лейбниц считал нашу врождённую склонность к дедуктивным умозаключениям доказательством существования Бога, изначально вложившего эту склонность в устройство нашего мозга. Литература по вопросу о борьбе Декарта и Лейбница против индукции и Ньютона приведена в статье “L'enfance de l'Homme”, Jacques Cheminade, в журнале Fusion, mars-avril 2000, Ed. Alcuin, Paris, p. 44.

получилось, с каким-либо экспериментом — это чистая бессмыслица, которой могут заниматься только какие-нибудь мелкие люди вроде Ньютона (Декарт последней фразы не говорил, Ньютон ему не был известен). Третий принцип: *математика не является наукой. Чтобы математика сделалась наукой, прежде всего нужно изгнать из неё все следы эксперимента, которые в ней проявляются в виде чертежей.* Когда мы проводим прямые, окружности, занимаемся евклидовой геометрией, то, согласно Декарту, мы совершаем ненужную деятельность, которая к науке не имеет отношения. Поэтому нужно заменить все прямые, окружности и так далее на идеалы, модули, кольца, оставить только то, что теперь называется алгебраической геометрией. А никакой геометрии (в таком обычном смысле) не надо, по Декарту. Нужно, на самом деле, *изгнать из всех наук вообще все места, где играет какую-либо роль воображение.* А в геометрии оно играет огромную роль, поэтому надо её исключить. И, наконец, последний, четвёртый, принцип Декарта, который относится уже прямо к министерству образования: *«Необходимо немедленно запретить все другие методы преподавания, кроме моего, потому что мой метод образования является единственным истинно демократическим методом. Демократический характер моего метода образования заключается в том, что среди обучающихся по моему методу самый тупой, самый посредственный ум достигнет таких же успехов, как и самый гениальный».*

Например, Декарт “обнаружил”, что скорость света в воде на 30% больше, чем в воздухе (в противоречии с принципом Ферма и с теорией огибающих волн Гюйгенса). Но на предшественников можно было не ссылаться.

Когда Паскаль сообщил Декарту о своих работах по гидростатике и о барометрических измерениях, основанных на экспериментах с торричеллиевой пустотой. Декарт презрительно выгнал молодого экспериментатора за незнание аксиомы Аристотеля («природа не терпит пустоты») и за нарушение двух своих первых (антиэкспериментальных) принципов. Он написал по этому поводу президенту Академии наук Гюйгенсу: *«лично я нигде в природе пустоты не вижу, разве в голове у Паскаля».* Через полгода теория Паскаля стала общепринятой, и Декарт уже говорил, что Паскаль приходил в нему рассказывать её, но сам ничего тогда не понимал; а теперь, когда он, Декарт, всё ему объяснил, Паскаль рассказывает, как свою, его (Декартову) теорию.

Интересно, что отношение Леонардо да Винчи к эксперименту было совсем иным: в своих гидродинамических исследованиях (где уже ана-

лизируется даже турбулентность) он настаивает на необходимости в этой области руководствоваться прежде всего экспериментами, а только потом рассуждениями. Вслед за чем он обсуждает законы подобия и автомодельности.

С. Г. Шеховцов: Вот Вы говорили про якобы имеющиеся принципы Монтеня... Но дело в том, что на русском языке, по крайней мере два раза, а сейчас очень много стали издавать «Опыты»... Монтень в этих «Опытах» непрерывно цитирует древних авторов. Как это вообще соотносится? Может быть, это была просто провокация?

— Нет, это не провокация. А дело заключается вот в чём. Монтень особенно критиковал французскую культуру после своих зарубежных путешествий. Он об этом много раз пишет¹¹. Он пишет, что если мы сравним науку во Франции с наукой в других странах: с наукой в Германии, в Англии, в Риме, в Испании, в Нидерландах — во всех этих странах, то те принципы, которые являются французскими типичными, там не действуют, и это гораздо лучше. Монтень критикует Францию, и вот эти фразы, которые я прочитал, являются для Монтеня не правильными утверждениями, а это его критика специфически французского образа мышления. Об учении Бурбаки Монтень сказал: “*Tout jugements universels sont laches et dangereux*” (“все универсальные суждения трусливы и опасны”) — в “Опытах” в книге III, гл. VIII, стр. 35 издания образца 1588 года. В “Опытах” о стиле изложения много говорится в главе XII книги II, главах VIII и IX книги III. В книге I гл. XXVI специально посвящена обучению: “Главное — возбудить аппетит и чувства: иначе воспитаёте осла, нагруженного книгами, ударами кнута и набиванием кармана наукой, которую надо бы не только поселить у себя, но на которой надо бы было жениться.” Поэтому вы совершенно правы, что он сам придерживался противоположной выраженной принципами точки зрения, это верно, но он подчеркнул, что во Франции эта точка зрения господствующая. Между прочим, интересно, что французская точка зрения была такой ещё гораздо раньше. Если вы возьмёте записки о Галльской войне Цезаря, то уже там имеется жесточайшая критика французов, ну, галлов в то время, конечно, но кельтский характер остался во многом и у нынешних французов, и характеристика Франции, которая дана Юлием Цезарем, во многом остаётся и сегодня верной. Цезарь ма-

¹¹ «Для французов обман и вероломство — не грех, а способ жизни, дело чести, со времён императора Валентиниана и до сегодняшнего дня.» (кн. II, гл. XVIII)

ло говорит о науке, хотя говорит и об этом тоже. Он говорит, что для французов (для галлов) характерна театральность и стремление устроить театральное представление там, где они не могут ничего сделать по-настоящему. Они добиться ничего не могут, однако могут претендовать. Вот умение претендовать и выдавать за якобы совершенное то, чего они не достигли, — это их чрезвычайно характерная черта. Они, говорит, с Римом подписали договор, что они ни одного германца не пропустят и что Рим от германцев совершенно защищён, потому что Франция станет стеной и германское нападение остановит (не Франция, а Галлия). Но, говорит Цезарь, это неправда. Если их (французских солдат) не накормить такой едой, которой вообще и купить-то невозможно, и не напоить таким замечательным вином, которого мы им не можем доставить, то они вообще не смогут ни сражаться, ни взойти на Альпы, ни, тем более, остановить германцев. Как только первый немецкий полк перейдёт через Рейн, все французы лягут просто, чтобы их не заметили, и пропустят немецкие легионы, которые сокрушат Рим. Поэтому единственное средство защититься от германцев для Рима — эту Галлию завоевать, и он начал Галльскую войну.

Д. В. Аносов: Прекрасная идея — завоевать страну для защиты от третьей страны.

Из зала: Вы изложили свои взгляды на историю развития математики. А как Вы относитесь к теории, ко взглядам академика Фоменко на историю?

— Имеется большая книжка “История и антиистория”, недавно выпущенная издательством “Языки русской культуры” (М., 2000), в которой специалисты, историки, астрономы и всякие другие очень подробно про это написали. Прочитую отсюда один маленький кусочек, который написал Андрей Зализняк, главный специалист по Новгородским берестяным грамотам. Согласно его описанию, Фоменко так объясняет происхождение шотландцев, которые по-английски называются Scots. Две тысячи лет назад на север от Чёрного моря жили скифские племена. Скифы были скотоводы, и у них было много скота. Они, кроме того, имели ладьи, на которых плавали по различным рекам, они любили очень плавать. Они погрузили свой скот на ладьи, поплыли вверх по Днепру, по Дону, поднялись на Оку, на Двину, переплыли Балтийское море, в Данию, в Северное море, в Англию, в Шотландию, нашли там пустые места, построили деревни, поселились там. Но им не понравилось, потому что плохой климат, всё время идёт дождь, холодно.

И они решили вернуться. Но так как в те времена аэрофлот работал плохо, то они поняли, что погрузить весь свой скот и вернуться со своим скотом обратно быстро им не удастся. Поэтому им пришлось скот там оставить, и скоты так с тех пор там и живут, это и есть Scots.

Другой из авторов этой книги указывает, что из опыта коммерческого успеха теории Фоменко следует с очевидностью тот важный для исторической науки вывод, что культурный и образовательный уровень нашего населения в области истории крайне низок.

М. А. Цфасман: Владимир Игоревич, если бы в этой аудитории нашлось несколько безумцев, которые хотели бы сохранить культуру, в том числе культуру математики, что бы Вы рекомендовали им делать?

— Знаете, это очень трудный вопрос. Я бы рекомендовал в преподавании в школе вернуться к Киселёву. Но это моё личное мнение. Мой учитель, Андрей Николаевич Колмогоров, очень меня убеждал, когда он начинал свою реформу, принять участие в этой реформе и переписывать все учебники, делать их по-новому и излагать, как он хотел, бурбакизировать школьную математику и так далее. Я категорически отказался, прямо чуть не поссорился с ним, потому что, когда он мне стал рассказывать свою идею, это был такой вздор, про который мне было совершенно очевидно, что пропускать его к школьникам нельзя. К сожалению, после него ещё несколько академиков пропустили, и они сделали ещё хуже, чем он. Я боюсь этим заниматься, сейчас я не берусь за это дело, в частности, пользуясь вот этим всем опытом. Уважаемые мною люди, А. Д. Александров, Погорелов, Тихонов, Понтрягин — все приняли участие и все написали плохо. Я могу точно сказать, что плохо написал Колмогоров, скажем, ну и про других тоже знаю; учебники, которые они предложили, могу критиковать, но не могу предложить своего учебника. . .

Я сам преподавал в школе (впрочем, в интернате — правда, это не обычная школа, но мне случалось и в обычной школе преподавать) — в интернате я читал лекции, про которые издана даже книжка Алексеева, который тут присутствует, по моим лекциям. Он был одним из слушателей, школьников, который записал эти самые лекции, упражнения, хорошая книжка “Теорема Абеля в задачах и решениях”. Там есть доказательство теоремы о том, что уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах. При этом по дороге излагаются (для школьников!) комплексные числа, римановы поверхности, теория накрытий, теория

групп, разрешимые группы и многое другое.¹² Свой опыт, как, по моему, надо преподавать математику, я многократно излагал конкретным образом по поводу конкретных вещей. Я читал различные лекции, записывал, издавал и так далее. Это я могу делать. Но стать во главе какого-нибудь большого такого проекта было бы страшно, потому что, на мой взгляд, здесь нужно иметь какую-то конкуренцию, при которой разрешается опыту лучших учителей выбиваться вверх, как это произошло с самим Киселёвым, который вовсе не был лучшим математиком России и который добился крупнейшего успеха, многократно перерабатывая свою первоначально не такую уж удачную книгу. Здесь нужны хорошие учителя, это должны делать хорошие учителя, и они должны это сделать хорошо.

М. А. Цфасман: А что делать в высшем и в послеуниверситетском образовании?

— У меня есть большой опыт, конечно, и в этом. Первое положение, которое в математическом высшем образовании нанесло огромный ущерб, — это тезис, который тоже исходит в основном от французов. Я его усвоил от моего друга Жан-Пьера Серра, французского математика, и этот довод состоит в следующем. Серр утверждает: ты¹³, говорит, неправильно пишешь во многих местах, что математика — часть физики. На самом деле *математика к физике* (по Серру) *не имеет никакого отношения*, это совершенно ортогональные науки. Дальше Серр пишет фразу, которую я называю бумерангом, т. е. самоопасной. Эта фраза такова: «Впрочем, нам, математикам, не следует высказываться по таким философским вопросам, потому что даже лучшие из нас, — ну, ясно, что, когда мы с ним разговаривали, то это он, — *даже лучшие из нас способны, высказываясь по таким вопросам, сказать совершеннейшую чушь*». Гильберт в тридцатом году опубликовал статью “Математика и естествознание”, в которой он написал, что

¹²Французы утверждают, что геометрию и “тригонометрическую форму” комплексных чисел (модули, аргументы и т. п.) придумал Арган. Но за много лет до него всё это сделал в Дании Вессель (идеи которого повлияли на Абеля). Между прочим, Вессель старался применить гиперкомплексные числа (в сущности, кватернионы) к описанию вращений трёхмерного пространства. Повороту на угол φ вокруг оси $bi + cj + dk$ ($b^2 + c^2 + d^2 = 1$) соответствует кватернион $\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)[bi + cj + dk]$. Половинка в этой формуле имеет огромное топологическое значение, а в физике ею объясняется так называемый *спин* частиц.

¹³Французская революция обязала всех граждан обращаться друг к другу только на “ты”, и разрушителей могли гильотинировать. Так что в Париже этот обычай сохраняется и сейчас.

геометрия является частью физики. По этому поводу я в каком-то месте должен был говорить, что два великих алгебраиста, Гильберт и Серр, выступают здесь противоречивым образом. Но мои друзья, в частности Дмитрий Викторович Аносов, ну и другие тоже, мне сказали, что это моё высказывание основано просто на том, что у меня плохо с формальной логикой, я Аристотеля не читал. На самом деле, вывод из этих двух высказываний — вовсе не противоречие, а, логически рассуждая, как этому учат школьников, можно из этих двух высказываний сделать логически строгий вывод. Он состоит в следующем: *геометрия не имеет никакого отношения к математике.* Это и есть логика французов. Они так решили, и они исключили геометрию из своего образования. В университетском образовании, и в школьном тоже, выкинуты учебники геометрии, и спросить какого-нибудь студента Эколь Нормаль Сюперьер в Париже, например, что-нибудь про поверхность $xy = z^2$ или про плоскую кривую, параметрически заданную уравнениями $x = t^3 - 3t$, $y = t^4 - 2t^2$, безнадёжно, этому ничему не учат. Учебники Лопиталя, Гурса, Жордана — все эти замечательные учебники, книжки Кляйна, Пуанкаре — все выкинуты из студенческих библиотек.

Д. В. Аносов: Адамара...

— Адамара тоже... Всё выкинуто! Всё выкинуто просто потому, как мне объяснили, что это — *старые* книги, в них заводится вирус, от которого гниёт вся библиотека, в том числе гниют книги Бурбаки, разве это можно?

Е. В. Юрченко: Я хотела сказать несколько слов по поводу изучения геометрии и учебника Киселёва, то, что вы говорили. Я считаю, что в последнее время у учителей есть великолепная возможность использовать разные учебники, и есть очень интересный вопрос о раннем изучении геометрии, вплоть до того, что начинать изучать её с первого класса, потому что это очень много даёт для развития воображения у детей, и настаивать только на возвращении к учебнику Киселёва я бы из своего опыта работы не стала.

— Я не спорю, может быть, есть и лучшие, чем учебник Киселёва, учебники, это вполне возможно. Но, во всяком случае, нужен учебник без этих общенаучных фокусов, без бурбакизма, вот что я имею в виду.

А. Ю. Овчинников: Очень маленький вопрос. В Вашей замечательной книжке по обыкновенным дифференциальным уравнениям существует необычайно много всяческих красивых картинок, вообще замечательная книжка, очень интересно и приятно читать. Но, как нетруд-

но убедиться при помощи очень простого эксперимента, подавляющее большинство Ваших студентов благодаря этой книжке не могут решить даже очень простых дифференциальных уравнений. По-Вашему, как это соотносится с тем, казалось бы, несколько прикладным подходом, который Вы сейчас пропагандируете?

— Ну, в применении к *лично моим* студентам, это просто неправда, у меня есть большой опыт. . . В конце учебника, в последнем издании, приведена чуть не сотня задач, с вполне серьёзными уравнениями, и у меня имеется большой экзаменационный опыт, письменные экзамены, на которых студенты и в Москве, и в Париже прекрасно решают такие уравнения, которые при других курсах решать студенты не могут. И эти уравнения совершенно стандартные, в то же время; это не трудные уравнения, понимаете? Я специально занимался этим вопросом — о требованиях, и я несколько раз писал списки задач, которые надо требовать, чтобы умели решать. Например, у меня есть такая большая статья, не только по дифференциальным уравнениям, по всей математике, которую я писал для Физтеха, но она годится и для математика, относительно того, *какие сто задач составляют весь курс математики*. Эти сто задач в “Успехах” опубликованы, и я очень рекомендую эту статью, “Математический тривиум”. Это задачи лёгкие, их много, сто, но они лёгкие¹⁴. Например, первая задача такая: «*Дан график функции. Нарисовать график производной.*» Если человек не умеет этого делать, то, хотя бы он умел дифференцировать все многочлены и рациональные функции, он ничего в производных не понимает. Точно таким же образом я вёл и дифференциальные уравнения, и у меня имеется опыт, я утверждаю, что, если кто-то по моим учебникам преподавал так, что студенты не умеют решать простейшие уравнения, то это плохой преподаватель.

¹⁴По дошедшим до меня сведениям, профессора Физтеха в среднем справляются с третью из этих задач.

Недавно мне пришлось столкнуться с задачей, с которой справляются пятилетние дети, но которую не поняла и искадила редакция одного из академических журналов (“Успехи физических наук”). На полке стоят два тома Пушкина. Листы каждого тома занимают 2 см, а каждая обложка — 2 мм. Червь прогрыз от первой страницы первого тома до последней второго. Какое расстояние он прогрыз?

Скажу ещё несколько слов о задачах.

Вот типичный пример задачи, с которой французские школьники легко справляются: “Доказать, что все поезда RER на планете Марс красно-синего цвета.”

Вот образец решения:

Обозначим через $X_n(Y)$ множество всех поездов системы Y на планете номер n (считая от Солнца, если речь идёт о солнечной системе).

Согласно таблице, опубликованной CNRS там-то и тогда-то, планета Марс имеет в Солнечной системе номер 4. Множество $X_4(RER)$ пусто. Согласно теореме 999-в из курса анализа *все элементы пустого множества обладают всеми наперёд заданными свойствами*.

Следовательно, все поезда RER на планете Марс красно-синего цвета.

Обучение математике, как своеобразной *юридической казуистике, основанной на произвольно выбранных законах*, начинается с самого раннего возраста: французских школьников учат, что *любое вещественное число больше самого себя*, что 0 — *натуральное число*, что *всё общее и абстрактное важнее частного, конкретного*.

Вместо простых и фундаментальных основ науки, французских студентов быстро специализируют, так что они становятся экспертами в какой-то узкой области своей науки, не зная ничего другого.

Уже Леонардо да Винчи отмечал, что *любой тупица, занявшись исключительно одной узкой темой, поупражнявшись достаточно долго, достигнет в ней успеха*. Он писал это в инструкции для художников, но сам занимался многими разными областями науки. Соседние разделы его записок содержат подробнейшие инструкции для подводных диверсантов (включающие как использование в подводных работах огня, так и рекомендации отравляющих веществ).

Впрочем, и в американский школьный тест десятилетиями входила задача: найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на неё высотой, длиной 6 дюймов. Да мнёт нас чаша сия.

Вот ещё несколько цитат из старых источников, поясняющих, как сложилась нынешняя грустная ситуация в области образования и нынешняя безграмотность населения.

Руссо в “Исповеди” писал, что не верил доказанной им самим формуле “квадрат суммы равен сумме квадратов слагаемых с их удвоенным произведением” до тех пор, пока не нарисовал соответствующее разбиение квадрата на четыре прямоугольника.

Лейбниц объяснял королеве Софии-Шарлотте, желая спасти её от влияния безбожника Ньютона, что существование Бога легче всего доказывается наблюдением нашего собственного сознания. Ибо если бы наши знания происходили только от внешних событий, то мы никогда не смогли бы узнать универсальные и абсолютно необходимые истины. То, что мы их знаем — и этим выделены среди животных — доказывает, по мнению Лейбница, наше божественное происхождение.

Реформируя школьное образование, французы писали в 1880 г.: «Каждая вещь стоит столько, за сколько её продают. Какая же будет цена вашему бесплатному образованию?»

Абель жаловался в 1820 г., что французские математики хотят только учить, но ничему не желают учиться. Позже они презрительно писали, что этот бедняк (сочинение которого Академия Наук потеряла) «возвращался из Парижа в свою часть Сибири, называемую Норвегией, пешком по льду».

Школьное обучение Абеля начал его отец, учивший сына, в частности, что $0 + 1 = 0$. Французы и сейчас учат своих школьников и студентов, что каждое вещественное число больше самого себя и что 0 — натуральное число (согласно Бурбаки и Лейбницу, все общие понятия важнее частных).

Бальзак упоминает «длинный и очень узкий квадрат».

Согласно Марату, «лучшие из математиков — Лаплас, Монж и Кузен: своего рода автоматы, привыкшие следовать определённым формулам, применяя их вслепую». Впрочем, позже Наполеон сменил Лапласа на посту министра внутренних дел «за попытку ввести в администрирование дух бесконечно малых» (я думаю, что Лаплас желал, чтобы счета сходились до копейки).

Американский президент Тафт заявил в 1912 году, что сферический треугольник с вершинами в Северном полюсе, в Южном полюсе и на Панамском канале равносторонний. Поскольку в вершинах развеваются американские флаги, он считал «все полушарие, охваченное этим треугольником» своим.

А. Дюма-сын упоминает «странную архитектуру» домов, состоящих «наполовину из штукатурки, наполовину из кирпичей, наполовину из дерева» (1856). Впрочем, парижская газета писала в 1911 году, что «пятая симфония Малера длится час с четвертью без перерыва, так что на третьей минуте слушатели смотрят на часы и говорят себе: ещё сто двенадцать минут!» Наверное, так и было.

Следующая история связана с Дубной. Два года назад Академия Линчей¹⁵ в Риме отмечала память Бруно Понтекорво, жившего с 1950 года до своей смерти в 1996 г. то в Москве, то в Дубне. Лет за тридцать до смерти он рассказывал, что однажды заблудился (в окрестностях Дубны?) и добрался до дому только подъехав на тракторе. Тракторист, желая быть любезным, спросил: «А чем вы там в Институте в Дубне занимаетесь?» Понтекорво честно ответил: «Нейтринной физикой».

Тракторист был очень доволен беседой, но заметил, похвалив русский язык иностранца: «Всё же у Вас сохраняется некоторый акцент: физика не нейтринная, а нейтронная!»

Рассказывая в Италии эту историю, Понтекорво добавил: «Я надеюсь дожить до того времени, когда уже никто не будет путать нейтрино с нейтронами!»

Докладчик в Академии Линчей, в Трудах которой я прочёл всё вышеизложенное происшествие, комментирует это так: «Сейчас мы можем уже сказать, что предвидение Понтекорво исполнилось: теперь уже никто не знает не только что такое нейтрино, но и что такое нейтрон!»»

¹⁵Слово «Линчей» означает «Рысей»: предполагалось, что участники обладают рысей зоркостью и пронизательностью. Галилей, помнится, расписался в толстенном фолианте, где регистрируются члены Академии Линчей, шестым (номером Ньютона в фолианте Лондонского Королевского Общества гораздо больше).

Владимир Игоревич Арнольд

НУЖНА ЛИ В ШКОЛЕ МАТЕМАТИКА?

Стенограмма пленарного доклада
(Дубна, 21 сентября 2000 г.)

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 25.12.2003.
Формат 60×90¹/₁₆. Печать офсетная. Печ. л. 2. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-72-85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».