

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2008

А. М. Райгородский

# Модели случайных графов

Москва  
Издательство МЦНМО  
2011

УДК 519.179.4  
ББК 22.176  
P18

P18 **Райгородский А. М.**

Модели случайных графов. — М.: МЦНМО, 2011. — 136 с.

ISBN 978-5-94057-840-6

Книга посвящена теории случайных графов. Эта теория находится на стыке комбинаторики, теории графов и теории вероятностей.

Книга основана на лекциях, которые автор читал на школах «Современная математика» в Дубне и «Комбинаторная математика и теория алгоритмов» в Судиславле, а также в Школе Анализа Данных Яндекса.

Книга предназначена для широкого круга читателей.

ББК 22.176

## Оглавление

Предисловие . . . . .	6
Глава 1	
Некоторые основы теории вероятностей . . . . .	8
1.1. Классическая вероятность . . . . .	8
1.2. Схема Бернулли . . . . .	9
1.3. Схема серий . . . . .	11
1.4. Общее конечное вероятностное пространство . . . . .	11
1.5. Условные вероятности и независимость событий . . . . .	12
1.6. Несколько слов о бесконечных вероятностных пространствах . . . . .	14
1.7. Случайные величины и их распределения . . . . .	16
1.8. Моменты распределений . . . . .	18
1.9. Формула обращения и предельные теоремы пуассоновского типа . . . . .	21
1.10. Нормальная аппроксимация . . . . .	24
1.11. Неравенства Чебышёва и Маркова . . . . .	25
1.12. Уточнение неравенства Чебышёва в случае схемы Бернулли . . . . .	26
1.13. Условные вероятности и математические ожидания относительно разбиений . . . . .	27
1.14. Понятие о мартингале . . . . .	29
1.15. Неравенство Азумы . . . . .	29
Глава 2	
Модель Эрдёша — Реньи случайного графа . . . . .	32
2.1. Введение . . . . .	32
2.2. Определение модели Эрдёша — Реньи . . . . .	33
2.3. Одна естественная модификация модели . . . . .	34
2.4. Треугольники в случайных графах . . . . .	34
2.4.1. Постановка задачи и формулировки результатов . . . . .	35
2.4.2. Доказательство теоремы 10 . . . . .	36
2.4.3. Доказательство теоремы 12 . . . . .	36
2.4.4. Доказательство теоремы 11 . . . . .	39
2.5. Связность случайного графа . . . . .	42
2.5.1. Формулировки результатов и комментарии к ним . . . . .	42
2.5.2. Доказательство теоремы 14 . . . . .	44
2.5.3. Вокруг теоремы 13 . . . . .	46
2.5.4. Гигантская компонента . . . . .	47

2.6. Хроматическое число случайного графа . . . . .	48
2.6.1. Определения, формулировки и комментарии . . . . .	48
2.6.2. Мартингалы реберного и вершинного типов . . . . .	51
2.6.3. Доказательство теоремы 18: формулировка леммы 1 и вывод из нее . . . . .	52
2.6.4. Доказательство теоремы 18: доказательство леммы 1	54
2.6.5. Нижняя оценка в теореме 17 . . . . .	56
2.6.6. Верхняя оценка в теореме 17: план действий . . . . .	58
2.6.7. Верхняя оценка в теореме 17: идея доказательства . .	58
2.6.8. Верхняя оценка в теореме 17: выбор параметров и оценка вероятности . . . . .	59
2.6.9. Верхняя оценка в теореме 17: доказательство леммы 2	60
2.6.10. Комментарий к лемме 2 . . . . .	63
2.6.11. Чем $Y_k$ лучше $X_k$ , или почему не работает неравен- ство Чебышёва? . . . . .	64
2.6.12. О функции $u$ в теореме 18 . . . . .	65
2.7. О числе независимости и кликовом числе случайного графа	66
2.8. Числа Рамсея . . . . .	67
2.9. Хроматическое число и обхват графа . . . . .	70
2.10. Законы нуля или единицы . . . . .	72
2.10.1. Язык первого порядка для графов . . . . .	73
2.10.2. Формулировки результатов . . . . .	73
2.10.3. Игра Эренфойхта . . . . .	74
2.10.4. Выигрышная стратегия для Консерватора . . . . .	76
2.11. Еще ряд сюжетов . . . . .	77
2.11.1. Деревья в случайных графах . . . . .	77
2.11.2. Еще несколько слов о хроматическом числе случай- ного графа . . . . .	79
2.11.3. Планарность случайного графа . . . . .	80
2.11.4. Степени вершин случайного графа . . . . .	81
2.11.5. Изоморфизм случайных графов . . . . .	82

### Глава 3

Обобщенная модель Эрдёша—Реньи и случайные дистанционные графы . . . . .	84
3.1. Определение модели . . . . .	84
3.2. Случайные подграфы куба . . . . .	85
3.3. Случайные дистанционные графы . . . . .	87
3.4. Вспомогательные факты и свойства полного дистанционно- го графа . . . . .	88
3.4.1. Немного простой аналитики . . . . .	88

3.4.2. О числе независимости полного графа расстояний . . . . .	89
3.4.3. О кликовом числе полного графа расстояний . . . . .	91
3.4.4. О хроматическом числе полного графа расстояний . . . . .	92
3.4.5. О числе ребер в произвольном подмножестве множества вершин полного графа расстояний . . . . .	94
3.4.6. «Олимпиадный» комментарий к предыдущему пункту . . . . .	97
3.5. Хроматическое и кликовое числа дистанционного графа . . . . .	99
3.6. Хроматическое число случайного дистанционного графа . . . . .	103
3.7. Дистанционные числа Рамсея . . . . .	103
3.7.1. Постановка задачи . . . . .	103
3.7.2. Формулировки результатов . . . . .	105
3.7.3. Доказательство теоремы 35 . . . . .	106
3.7.4. Доказательство теоремы 37 . . . . .	108
3.8. О связности случайного дистанционного графа . . . . .	111
3.9. Законы нуля или единицы для случайного дистанционного графа . . . . .	111
Глава 4	
Модели случайных веб-графов . . . . .	114
4.1. Наблюдения Барабаша — Альберт . . . . .	114
4.2. Модель Боллобаша — Риордана . . . . .	116
4.2.1. Динамическая модификация . . . . .	116
4.2.2. Статическая модификация, или LCD-модель . . . . .	117
4.2.3. Некоторые результаты . . . . .	118
4.2.4. Доказательство теоремы 44 при $k = 1$ . . . . .	121
4.3. Модель копирования . . . . .	127
Глава 5	
Приложение . . . . .	129
Литература . . . . .	131

## Предисловие

В этой книге мы поговорим об одной весьма красивой и богатой приложениями науке — науке о случайных графах. Эта наука находится на стыке комбинаторики, теории графов и теории вероятностей. В основе ее лежит глубокая идея о том, что мощные инструменты современной теории вероятностей должны поспособствовать более верному осознанию природы графа, призваны помочь решению многих комбинаторных и теоретико-графовых задач.

Данная книга возникла на основе лекций, которые ее автор читал на школах «Современная математика» в Дубне и «Комбинаторная математика и теория алгоритмов» в Судиславле, а также в Школе Анализа Данных Яндекса. В ней мы не претендуем на исчерпывающее изложение теории, которая давно уже превратилась в огромную и бурно развивающуюся — почти необозримую — математическую дисциплину. У нас совсем другая цель. Мы хотим на максимально доступном уровне рассказать наиболее яркие и красивые сюжеты, связанные со случайными графами. В сущности, мы постараемся сделать книгу понятной студентам младших курсов университетов и даже старшеклассникам, всерьез увлекающимся математикой. В то же время мы дойдем до столь глубоких и нетривиальных фактов, что книга окажется полезной всем, кто интересуется комбинаторикой, вероятностью и их приложениями.

В целом структура книги следующая. В первой главе мы изложим основы теории вероятностей, знание которых необходимо для дальнейшего чтения. Читатель, знакомый с этими основами, может при желании пропустить эту главу. Однако стоит иметь в виду, что некоторые понятия, обсуждаемые в ней, не вполне элементарны. Например, таково понятие мартингала, которое в стандартных курсах теории вероятностей обычно не возникает.

Во второй главе мы расскажем о модели Эрдёша — Реньи случайного графа, которая была предложена ровно полвека назад и с которой, по большому счету, и началась вся наука. Мы представим, в наглядной и увлекательной форме, несколько результатов, которые удастся получить в рамках такой модели.

В третьей главе мы поговорим о моделях, которые естественным образом обобщают модель Эрдёша — Реньи. С их помощью мы дока-

жем ряд исключительно красивых утверждений в области комбинаторной геометрии.

Наконец, в четвертой главе мы выйдем, можно сказать, на передний край науки: мы обсудим модели Интернета и других больших или, как принято говорить, «реальных» сетей.

Заключительным разделом книги будет «приложение», в котором мы опишем ряд простых и в то же время довольно скучных понятий математического анализа. Разумеется, мы предполагаем хотя бы поверхностное знакомство читателя с пределами, производными и интегралами. Однако некоторые объекты и обозначения мы постараемся аккуратно ввести и прокомментировать.

Хотя, повторим еще раз, наша книга отнюдь не является полноценной монографией, она, безусловно, закладывает основы теории и с нее удобно начинать изучение случайных графов, благо она предлагает сразу (как минимум) три принципиально различных направления исследований. Некоторые факты, доказанные в ней, совсем свежие, и они еще ждут правильного осмысления и развития. Мы приглашаем читателя на увлекательную экскурсию и надеемся, что если кому-то она будет просто интересной, то кому-то она поможет и с выбором задач для последующего их изучения.

Отметим, что для дальнейшей работы со случайными графами крайне полезны, например, такие книги, как [1–4]. Есть и масса другой близкой по тематике литературы. Кое-что мы процитируем по ходу дела, а кое-что заинтересованный читатель, сориентировавшись в науке, отыщет и сам.

# 1. Некоторые основы теории вероятностей

В этой главе мы расскажем о наиболее значимых для дальнейшего аспектах теории вероятностей. Наше изложение будет достаточно сжатым, хотя и предельно элементарным, и замкнутым в себе. В качестве литературы к этой главе сразу стоит указать книги [5–7].

## 1.1. Классическая вероятность

Представим себе обычную игральную кость — кубик, сделанный из идеально однородного материала. Если мы бросим такую кость на стол, то произойдет ровно одно из шести событий: либо кость выпадет кверху той гранью, на которой нарисована одна точка, либо той, на которой точек две, и так далее. Поскольку кость идеально однородная, разумно считать, что указанные события *равновероятны*. При этом они *попарно несовместны* в том смысле, что никакие два из них не происходят одновременно. Наконец, как мы уже говорили, одно из этих событий непременно случится. Все перечисленные обстоятельства позволяют сказать, что с вероятностью  $\frac{1}{6}$  кость выпадет заданной стороной кверху.

В общем случае классическая вероятность устроена совершенно аналогично. Есть некоторый набор событий  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Они попарно несовместны, одно из них обязательно реализуется, и они равновероятны. Такие события называют *элементарными*, и полагают вероятность каждого из них равной  $\frac{1}{n}$ .

Теперь допустим, что некоторое событие происходит тогда и только тогда, когда выполнено (ровно) одно из элементарных событий  $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}$ . Например, событие «кость выпала кверху гранью, на которой нарисовано четное число точек» имеет место, коль скоро реализовалось либо элементарное событие «с двумя точками», либо элементарное событие «с четырьмя точками», либо элементарное событие «с шестью точками». Говорят, что такие элементарные события *благоприятствуют* данному событию. Очевидно, что и в примере с костью вероятность интересующего нас события следует полагать равной  $\frac{3}{6}$ , и в общем случае ее нужно приравнять к  $\frac{k}{n}$ .



В итоге вероятность любого события есть отношение числа благоприятствующих ему элементарных событий к числу всех элементарных событий.

Обычно используют формальные обозначения и соответствующую терминологию. А именно, полагают  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  и называют множество  $\Omega$  *пространством элементарных событий*. Каждое событие интерпретируют как подмножество в  $\Omega$ , состоящее из благоприятствующих элементов. Множество всех событий обозначают  $\mathcal{F}$ . Как правило,  $\mathcal{F}$  — это множество всех подмножеств из  $\Omega$ , так что  $|\mathcal{F}| = 2^n$ . Наконец, вероятность обозначают символом  $P$  (в честь «probability» (англ.), «probabilité» (фр.) и т. д.). Это функция, заданная на множестве  $\mathcal{F}$  и принимающая значения в  $\left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ :  $P(A) = \frac{|A|}{n}$ . Всю тройку описанных объектов  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называют (*классическим*) *вероятностным пространством*.

Ясно, что события можно объединять и пересекать. Если есть события  $A, B \in \mathcal{F}$ , то событие  $A \cup B$  — это событие, которое, по сути, состоит в том, что либо выполнено  $A$ , либо выполнено  $B$ . Аналогично,  $A \cap B$  — это событие, состоящее в том, что одновременно реализовались  $A$  и  $B$ . Наконец, через  $\bar{A}$  обозначают отрицание события  $A$ : в терминах множеств  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ .

Вероятность обладает очевидными свойствами:

- 1) Для любого события  $A \in \mathcal{F}$  выполнено  $P(A) \in [0, 1]$ .
- 2)  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ .
- 3) Каковы бы ни были  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
В частности, если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- 4) Для любого события  $A \in \mathcal{F}$  выполнено  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

## 1.2. Схема Бернулли

Вот еще одна вероятностная конструкция, которая очень широко используется в науке и ее приложениях; для нас она также будет одной из основных.

Допустим, есть у нас монетка. Только, в отличие от нашей же игральной кости, эта монетка сделана из неоднородного материала. Бросим мы ее на стол. С какой «вероятностью» она ляжет «решкой» кверху? с какой — «орлом»? Ну, это зависит от распределения материала внутри монетки. Не будем вдаваться в столь технические детали. Просто сочтем, что  $p \in [0, 1]$  — это и есть вероятность решки. Соответственно, тогда вероятность орла — это  $q = 1 - p$ : на ребро наша монетка не становится.

Будем бросать монетку на стол и каждый раз фиксировать «выпавшую» сторону. Если выпала решка, напишем 1 и скажем, что произошел успех; если выпал орел, напишем 0 и скажем, что случилась неудача. Всего таких «испытаний» произведем  $n$  штук. Это и будет *схемой испытаний Бернулли*. На выходе образуется последовательность из нулей и единиц длины  $n$ . Эта последовательность, естественно, случайна. А какова вероятность, что это будет именно последовательность  $(x_1, \dots, x_n)$  с конкретными  $x_1, \dots, x_n$ ? Кажется весьма уместным счесть, что такая вероятность равна произведению вероятностей чисел  $x_1, \dots, x_n$ . Иными словами, если  $\omega = (x_1, \dots, x_n)$ , то

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} q^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Снова возникает вероятностное пространство. На сей раз элементарными событиями в нем служат как раз последовательности  $\omega$ : недаром мы их так и обозначили. В результате  $\Omega$  — пространство элементарных событий — состоит из всевозможных реализаций схемы испытаний Бернулли, каковых, очевидно,  $2^n$ . Как и прежде, события — это всевозможные подмножества из  $\Omega$ . Например, событие «в  $n$  испытаниях Бернулли произошло ровно  $k$  успехов» формируется из  $C_n^k$  элементарных кирпичиков — тех последовательностей нулей и единиц, в которых ровно  $k$  единиц. Множество событий  $\mathcal{F}$  имеет мощность  $2^{2^n}$ .

Понятно, что вероятность  $P$  — это и здесь функция, определенная на  $\mathcal{F}$  и принимающая значения из  $[0, 1]$ . По аналогии с классической вероятностью, для данного  $A \in \mathcal{F}$  она полагается равной сумме вероятностей элементарных событий, которые благоприятствуют  $A$ :  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ . Например, вероятность события, описанного

в предыдущем абзаце, есть  $C_n^k p^k q^{n-k}$ . По понятным причинам ее называют *биномиальной вероятностью*.

Нетрудно видеть, что и в нынешнем пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  выполнены свойства 1–4 из предыдущего параграфа.

Приведем пример сравнительно нетривиального вычисления, связанного со схемой Бернулли и биномиальными вероятностями. Пусть дано множество  $\mathfrak{X}_n = \{1, \dots, n\}$ . Производя схему испытаний Бернулли, извлекаем из него элемент  $i$ , коль скоро в  $i$ -м испытании произошел успех; иначе переходим к следующему испытанию. В итоге получается случайное подмножество  $U \subset \mathfrak{X}_n$  (состоящее из извлеченных элементов). Аналогично строим множества  $V$  и  $W$ . Спрашивается: какова вероятность того, что  $U \cap V \subseteq W \subseteq U \cup V$ ? Обозначим через  $A$  такое событие.

Запишем друг под дружкой реализации схем Бернулли, «породившие» множества  $U, V, W$ :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Если  $A$  произошло, то нетрудно видеть, что при любом  $i$  столбец с номером  $i$  в приведенной табличке не может состоять из элементов  $x_i = 1, y_i = 1, z_i = 0$  и из элементов  $x_i = 0, y_i = 0, z_i = 1$ : в первом случае получилось бы, что  $i$ -й элемент множества  $\mathfrak{A}_n$  принадлежит  $U$  и  $V$ , но не принадлежит  $W$ , что невозможно, поскольку ввиду  $A$  у нас  $U \cap V \subseteq W$ ; во втором случае было бы противоречие с условием  $W \subseteq U \cup V$ . Все остальные тройки из нулей и единиц в столбцах встречаться могут.

Вероятность тройки  $1, 1, 0$  есть, очевидно,  $p^2q$ ; вероятность тройки  $0, 0, 1$  есть  $q^2p$ . Значит, вероятность того, что «запрещенная» тройка в данном столбце не возникла, есть, по свойствам вероятности,  $1 - (p^2q + q^2p) = 1 - pq(p + q) = 1 - pq$ . Окончательно получаем, что  $P(A) = (1 - pq)^n$ .

Правомерность возведения в степень в рамках последнего рассуждения так же интуитивно понятна, как и допустимость перемножения вероятностей в самом определении схемы Бернулли. Строгое обоснование подобным действиям будет дано чуть позднее — когда мы будем говорить о независимости событий.

### 1.3. Схема серий

Важной разновидностью схемы испытаний Бернулли служит так называемая *схема серий*. Рассмотрим произвольную (вообще говоря, бесконечную) последовательность натуральных чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ . Для каждого  $i$  осуществим  $n_i$  испытаний Бернулли, причем вероятность успеха будем считать зависящей от  $i$ . Иными словами, мы производим серии испытаний, и вероятность успеха в каждой очередной серии есть  $p_i \in [0, 1]$  (меняем монетки от серии к серии). Для определения случайного графа такая схема нам будет очень нужна.

### 1.4. Общее конечное вероятностное пространство

Рассмотренные в предыдущих параграфах вероятностные конструкции ничего не стоит обобщить. А именно, пусть  $\Omega$  — произвольное конечное множество. Назовем его *пространством элементарных*

событий. Пусть, далее,  $\mathcal{F}$  — произвольная совокупность подмножеств из  $\Omega$ , обладающая свойствами:

- 1) для любых  $A, B \in \mathcal{F}$  выполнено  $A \cup B \in \mathcal{F}$ ;
- 2) для любых  $A, B \in \mathcal{F}$  выполнено  $A \cap B \in \mathcal{F}$ ;
- 3) для любого  $A \in \mathcal{F}$  выполнено  $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
- 4)  $\Omega \in \mathcal{F}$ .

Элементы совокупности  $\mathcal{F}$  назовем *событиями*. Ясно, для чего нужны свойства? Разумеется, для того чтобы можно было корректно говорить об «одновременном» выполнении любых двух событий (пересекать их), о выполнении «хотя бы одного» из любых двух событий (объединять их) и о «невыполнении» любого события (брать отрицание). При этом, конечно, «хотя бы что-то должно произойти», т. е.  $\Omega$  — событие, и бывает «невозможное» событие  $\emptyset = \bar{\Omega}$ . Впрочем, как правило,  $\mathcal{F}$  — это совокупность всех подмножеств пространства элементарных событий, так что свойства заведомо выполнены.

Пусть, наконец,  $P$  — это функция из  $\mathcal{F}$  в  $[0, 1]$  со свойствами 1—4 из параграфа 1.1. Тогда назовем ее *вероятностью* или *вероятностной мерой*, а тройку  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — *вероятностным пространством*.

Нетрудно понять, что если  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  и  $P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n$ , то каково бы ни было  $A \in \mathcal{F}$ , выполнено  $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$ ,

причем, разумеется,  $p_1 + \dots + p_n = P(\Omega) = 1$ . Имеем прямое обобщение прежних ситуаций.

### 1.5. Условные вероятности и независимость событий

Пусть дано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Для простоты будем считать, что речь идет о классической модели. Представим себе, что некоторое событие  $B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}$  уже произошло. Скажем, бросили мы игральную кость на стол и точно знаем, что она упала четной стороной кверху. Спрашивается: какова, при условии этого дополнительного знания, вероятность события  $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_l}\} \in \mathcal{F}$ ? Посмотрим сперва на наш пример с игральной костью. Если событие  $A$  состоит в том, что число очков на кости равно 1, то при условии указанного выше события  $B$  такое просто невозможно, и вероятность  $A$  есть теперь не  $\frac{1}{6}$ , а 0. Если же, допустим,  $A$  — это событие, при котором число очков есть полный квадрат натурального числа, то, поскольку среди чисел от единицы до шести таким свойством обладают 1 и 4, обычная вероятность  $A$  есть  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ; условную же вероятность разумно полагать равной отношению числа полных квадратов среди

чисел 2, 4, 6 (каковые только и могли реализоваться, коль скоро случилось событие  $B$ ) к количеству всех этих чисел. Иными словами, на сей раз условная вероятность совпадает с безусловной и равна  $\frac{1}{3}$ .

В общем случае схема совершенно аналогичная. Мы просто забываем про те элементарные события, которые не могли произойти, раз уже случилось  $B$ . Соответственно, вероятность любого  $A$  мы считаем как  $\frac{|A \cap B|}{|B|}$ . В итоге, если именно такую вероятность назвать *условной* и обозначить ее  $P(A|B)$ , то

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Заметим, что если  $P(B) = 0$ , то условная вероятность считается неопределенной.

В случае произвольного пространства мы сразу определяем условную вероятность равенством  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , происхождение которого теперь вполне понятно. Разумеется, мы по-прежнему работаем лишь в ситуации, когда  $P(B) \neq 0$ .

Для условных вероятностей имеются очевидные формулы. Так, тождество  $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$ , в некотором смысле справедливое даже при  $P(B) = 0$ , носит громкое название *теорема умножения*. Выполнена, далее, важная *формула полной вероятности*: если  $\Omega$  разбито на непересекающиеся события  $B_1, \dots, B_k$  (будем писать  $\Omega = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$ , подчеркивая, что элементы объединения не пересекаются), то

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_k)P(B_k).$$

Наконец, верна *формула Байеса*, действующая в тех же предположениях, что и формула полной вероятности: для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^k P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Многочисленные стандартные примеры «с урнами», иллюстрирующие применение формул полной вероятности и Байеса, можно найти в отличном задачнике [8].

Из понятия условной вероятности вытекает глубочайшее понятие *независимости* событий — центральное понятие теории вероятностей. Действительно, какие события  $A$  и  $B$  естественно считать независимыми? Разумеется, такие, что  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ . Из

теоремы умножения получаем более симметричную и универсальную запись  $P(AB) = P(A)P(B)$ , осмысленную и при  $P(A) = 0$  или  $P(B) = 0$ . Эта запись и служит определением независимости наших двух событий.

Вот он, тот момент, который проясняет суть действий, осуществленных нами в параграфе о схеме Бернулли. Возможность перемножения вероятностей, которую тогда мы считали интуитивно ясной, строго обосновывается через независимость: испытания Бернулли были именно независимыми, и ровно за счет этого вероятности перемножались.

Если даны события  $A_1, \dots, A_n$ , то они называются *независимыми в совокупности* или *взаимно независимыми*, если для любого  $k \leq n$  и для любых  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  выполнено

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Легко привести пример совокупности попарно независимых, но взаимно зависимых событий. Советуем читателю сделать это самостоятельно.

## 1.6. Несколько слов о бесконечных вероятностных пространствах

В дальнейшем нам почти никогда не понадобятся бесконечные пространства. Скорее, мы будем работать с «неограниченно растущими» конечными структурами. Тем не менее, для полноты картины, а также для пущей формальной строгости некоторых деталей последующего изложения скажем буквально несколько слов о «совершенно общей» ситуации.

В действительности, отличий немного. Пространство — это снова тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Только множество  $\Omega$  бесконечное. В связи с этим и  $\mathcal{F}$  может содержать бесконечное множество элементов. Желая корректно говорить о выполнении хотя бы одного события из любого (разумного) их множества, а также об одновременном выполнении любого (разумного) ряда событий, добавим к свойствам 1–4 из параграфа 1.4 еще одно: объединение и пересечение *счетного* множества событий  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  лежит в  $\mathcal{F}$ . Поскольку операцию пересечения можно интерпретировать как умножение, а операцию объединения — как сложение, множество событий  $\mathcal{F}$  называют *алгеброй* или, точнее, *сигма-алгеброй* (пишут « $\sigma$ -алгебра»), подчеркивая с помощью частички «сигма» замкнутость алгебры относительно взятия бесконечных объединений и пересечений. На самом деле, вся эта теоретико-

множественная возня исключительно нетривиальна, и в нее можно очень долго углубляться. Мы не станем здесь этого делать.

Заметим, что добавление нового свойства в определение  $\mathcal{F}$  приводит к необходимости аналогичного пополнения множества свойств 1—4 из параграфа 1.1. А именно, требуют, чтобы вероятность объединения счетного множества попарно непересекающихся событий равнялась сумме их вероятностей. Такое свойство называется  *$\sigma$ -аддитивностью*.

В целом описанное построение вероятностного пространства носит аксиоматический характер. Данную аксиоматику предложил великий советский математик Андрей Николаевич Колмогоров.

Приведем напоследок пример простейшего бесконечного пространства. Пусть  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $\mathcal{F}$  состоит из всех подмножеств квадрата  $\Omega$ , площадь которых можно измерить<sup>1</sup>, вероятность — это просто отношение площади данного события (множества) к площади всего квадрата.

В каком-то смысле мы имеем тут предельный аналог классического вероятностного пространства. Мы не можем теперь суммировать вероятности элементарных событий (у каждой точки вероятность 0); взамен этого мы «интегрируем» их и получаем площади. Кстати, важным отличием от классической ситуации служит и тот факт, что отныне «невероятные» и «невозможные» события суть разные вещи: площадь любого конечного множества нулевая, т. е. мы считаем, что, «тыкая» наугад бесконечно тонкой иглой в  $\Omega$ , мы с вероятностью 0 попадем, например, в его центр. При этом говорить о невозможности попадания в центр нелепо: почему бы и нет?

Легко объяснить и «практическое» значение описанного вероятностного пространства. Рассмотрим простую, на первый взгляд, задачу. Два человека (назовем их Петя и Вася) договорились о встрече. Встречаются они на автобусной остановке между 9:00 и 10:00. Более точно они время не назначали. Идея такая: если один из двоих приходит на остановку и не видит второго, то ждет 15 минут. Коли не дожидается — уходит. Какова вероятность встречи?

Понятно, что времена прихода Пети и Васи на остановку мы считаем случайными и независимыми. Понятно также, что классическая модель нам не поможет: время течет непрерывно, и подразбить наше событие (встречу Пети и Васи) на конечное число элементарных

---

<sup>1</sup> Строгое понятие измеримости множества нетривиально и выходит за рамки этой книги. Если читатель знаком с ним, то он должен представлять себе измеримость по Жордану; если нет, то он может ограничиться интуитивным представлением о площади.

кирпичиков нам не удастся. Давайте, стало быть, интерпретировать точку  $(x, y) \in [0, 1]^2$  как пару, в которой  $x$  — это время прихода на остановку Пети, а  $y$  — Васи. Встрече благоприятствуют те и только те точки, у которых  $|x - y| \leq \frac{1}{4}$ . Считаем площади и получаем вероятность  $\frac{7}{16}$ .

Между прочим, если бы мы все-таки сочли, что время «дискретно» (разбили бы, скажем, час на 3600 секунд), то мы смогли бы воспользоваться классической вероятностью и получить ответ, весьма близкий к правильному. Вообще, чем мельче мы будем дробить наш временной интервал, тем ближе обычная комбинаторная вероятность окажется к величине  $\frac{7}{16}$ . В этом и состоит смысл словосочетания «предельный аналог», который мы употребили выше в отношении нынешнего пространства.

## 1.7. Случайные величины и их распределения

Пусть дано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Если оно конечно и  $\mathcal{F}$  — это множество всех подмножеств  $\Omega$ , то любая функция  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *случайной величиной* на этом пространстве. Иначе надо потребовать, чтобы  $\xi$  была «измеримой», т. е. чтобы прообраз любого луча  $(-\infty, x]$  принадлежал  $\sigma$ -алгебре:

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

(пишут еще короче  $\{\xi \leq x\} \in \mathcal{F}$ ).

Вероятностное поведение случайной величины полностью характеризуется ее *функцией распределения*:  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$ . Именно здесь видно, откуда появилось условие измеримости. Поскольку в основном нас будут интересовать конечные пространства, мы будем, как правило, иметь дело лишь с ситуациями, когда  $\xi: \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$ . Соответственно, функция распределения будет целиком задаваться вероятностями  $p_i = P(\xi = y_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;  $p_1 + \dots + p_k = 1$ . Случайные величины с подобными функциями называются *дискретными*.

В общем случае бывают весьма изощренные распределения, которые нам совсем не пригодятся. Однако еще один приятный класс распределений, возникающих исключительно на бесконечных пространствах, служит предельным аналогом дискретных распределений. Речь идет о так называемых *абсолютно непрерывных распределениях*. Вместо конечного набора вероятностей  $p_1, \dots, p_k$ , имеющих сумму 1, они порождаются *плотностью* — функцией  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , принимающей неотрицательные значения и обладающей тем свойством, что пло-



щадь под ее графиком («сумма» ее значений или, точнее,  $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt$ ) равна единице. В этом случае  $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ . Опять же, даже если читатель не знает понятия интеграла или несобственного интеграла, он может апеллировать к интуитивному пониманию площади под кривой.

Приведем примеры некоторых распределений, которые будут для нас важны.

1. *Биномиальное распределение.* Здесь  $\{y_1, \dots, y_k\} = \{0, 1, \dots, n\}$ . При этом  $P(\xi = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ , коль скоро  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Пишут  $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$  и говорят о биномиальном распределении с параметрами  $n$  и  $p$ . В специальном случае  $n = 1$  говорят, что  $\xi$  — *бернуллиевская* случайная величина. Происхождение терминологии, очевидно, связано со схемой Бернулли: по существу,  $\xi$  есть просто число успехов в схеме с  $n$  испытаниями и вероятностью успеха  $p$ .
2. *Пуассоновское распределение.* Здесь случайная величина принимает счетное множество значений  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Таким образом, пространство бесконечно, но распределение по-прежнему можно задавать вероятностями конкретных значений. Полагают  $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ , где  $\lambda > 0$ . Если вспомнить, что  $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$  (ряд Тейлора для экспоненты), то станет ясно, что обычное условие  $p_1 + p_2 + \dots = 1$  здесь выполнено. Пишут  $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . «Poisson» — это французское (оригинальное) написание фамилии Пуассон.
3. *Равномерное распределение.* Это абсолютно непрерывное распределение с плотностью  $p(t) = \frac{1}{b-a}$  при  $t \in [a, b]$  и  $p(t) = 0$  иначе. Пишут  $\xi \sim R(a, b)$ . Смысл очень простой: случайная величина  $\xi$ , имеющая равномерное распределение, попадает в тот или иной интервал из отрезка  $[a, b]$  с вероятностью, равной отношению длины интервала к длине исходного отрезка.
4. *Нормальное распределение.* Это тоже абсолютно непрерывное распределение. Оно играет исключительно большую роль в теории вероятностей. Тем не менее нам оно практически не понадобится. Плотность его задается формулой

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Пишут  $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Для случайных величин актуально понятие независимости. Говорят, что  $\xi$  и  $\eta$  *независимы*, если таковы любые два события вида  $\{\xi \leq x\}$  и  $\{\eta \leq y\}$ . Иными словами, требуется, чтобы

$$P(\xi \leq x, \eta \leq y) = P(\{\xi \leq x\} \cap \{\eta \leq y\}) = P(\xi \leq x)P(\eta \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Если случайных величин много, то осмысленно говорить об их взаимной независимости (независимости в совокупности). Снова не составляет труда привести пример попарно независимых, но взаимно зависимых величин.

Отметим, что биномиальная величина есть сумма взаимно независимых бернуллиевских величин.

## 1.8. Моменты распределений

У распределений случайных величин бывают важные числовые характеристики. Каждая из них дает кусочек информации о распределении, которое в целом найти не всегда просто. Иной раз совокупность этих характеристик полностью задает распределение.

Самое базовое понятие здесь — *математическое ожидание*. В содержательном смысле математическое ожидание случайной величины — это ее среднее значение. Пишут  $M\xi$  или  $E\xi$ . Мы будем использовать первый вариант записи. Если  $\xi$  принимает конечное множество значений  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , то

$$M\xi = \sum_{i=1}^n y_i P(\xi = y_i).$$

Например, если значения равновероятны, то мы имеем дело с простым средним арифметическим. Иначе среднее взвешенное — это своего рода центр масс.

Можно написать то же самое и по-другому:

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega).$$

Так даже проще.

Если  $\xi$  принимает счетное множество значений, то сумма становится бесконечной, но суть не меняется. Наконец, в случае абсолютно непрерывной  $\xi$  имеем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} tp(t) dt.$$

Опять-таки, это прямой аналог суммы значений, помноженных на их вероятности.

Основное свойство математического ожидания — его линейность. Иначе говоря, для любых  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  и любых случайных величин  $\xi_1, \xi_2$  выполнено  $M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1M\xi_1 + c_2M\xi_2$ . Хотя доказательство этого факта почти тривиально (мы оставляем его читателю), с точки зрения приложений значение этого факта нельзя переоценить.

Приведем два примера. Во-первых, пусть  $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$ . Найдем  $M\xi$ . По определению

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1)-(k-1)!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Несмотря на то, что ответ можно было угадать, выкладка тяжеловата. С помощью линейности ответ получается мгновенно. В самом деле,  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — (независимые) бернуллиевские величины. Независимость сейчас не важна, и потому мы взяли ее в скобки. За счет линейности  $M\xi = M\xi_1 + \dots + M\xi_n$ , но  $M\xi_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$  для любого  $i$ , и, значит,  $M\xi = np$ . Все!

Во-вторых, вспомним задачу на схему Бернулли, которую мы решили в параграфе 1.2. Только пусть теперь множеств не три, а  $m$ :  $U_1, \dots, U_m$ . Выбираются они по-прежнему независимо друг от друга. Введем случайную величину  $\xi = \xi(U_1, \dots, U_m)$ , равную количеству троек  $U_i, U_j, U_k$  в совокупности  $\{U_1, \dots, U_m\}$ , которые обладают известным свойством  $U_i \cap U_j \subseteq U_k \subseteq U_i \cup U_j$ . Если мы попробуем найти  $M\xi$ , исходя из определения, у нас точно ничего не выйдет. Даже, например, величину  $P(\xi = 1)$  не ясно, как считать. Зато с помощью линейности все делается «в уме». Действительно, обозначим через  $N$  количество троек, каждая из которых могла бы обладать нужным свойством. Понятно, что  $N = 3C_m^3$  (мы домножаем на 3, так как выбор «центрального» множества  $U_k$  в данной неупорядоченной тройке множеств осуществим тремя способами). Занумеруем наши тройки, обозначая их  $T_1, \dots, T_N$ , и рассмотрим «индикаторные» случайные величины  $\xi_i$ , принимающие значения 1 и 0, смотря по тому, обладают требуемым свойством тройки  $T_i$  или не обладают. В сущности,  $\xi_i$  — бернуллиевские величины. Их математические ожидания суть вероятности успешных исходов, каковые мы нашли еще в параграфе 1.2, то есть  $M\xi_i = (1 - pq)^n$ . С другой стороны,  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_N$ . Пользуемся линейностью и получаем  $M\xi = N(1 - pq)^n$ . Снова все!

Посчитанное математическое ожидание играет неожиданно большую роль в комбинаторной геометрии (см. [9, 10]).

Еще одно важное свойство математического ожидания следующее: если  $\xi, \eta$  независимы, то  $M\xi\eta = M\xi M\eta$ . Доказательство снова элементарно, и мы его не приводим.

Заметим, наконец, что если  $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , то  $M\xi = \lambda$  (докажите это!).

Коль скоро математическое ожидание случайной величины известно, можно попробовать измерить разброс значений случайной величины около него. Такой разброс меряет *дисперсия*, т. е. величина  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$ . Это своего рода среднее квадратичное отклонение  $\xi$  от своего среднего значения. Очевидно, что дисперсия всегда неотрицательна. Кроме того,  $D(c\xi) = c^2 D\xi$ , так что о линейности говорить не приходится. Наконец, за счет второго свойства математического ожидания  $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$ , коль скоро величины  $\xi_1, \xi_2$  независимы. Например, если  $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$ , то ввиду последнего утверждения

$$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = npq.$$

Несложный анализ показывает, что для пуассоновской величины  $D\xi = M\xi = \lambda$ . Более трудоемкие выкладки свидетельствуют о том, что  $M\xi = \mu$  и  $D\xi = \sigma^2$ , коль скоро  $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

*Моментом  $k$ -го порядка* называют величину  $M\xi^k$ . *Факториальным моментом  $k$ -го порядка* или  *$k$ -м факториальным моментом* называют величину

$$M_f^k \xi = M\xi(\xi - 1) \cdot \dots \cdot (\xi - k + 1).$$

Нетрудно убедиться в том, что если  $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , то  $M_f^k \xi = \lambda^k$ .

На бесконечных пространствах моменты случайных величин могут и не существовать. Так, величина с плотностью  $p(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$  не имеет даже математического ожидания, поскольку соответствующий интеграл расходится. Ее распределение носит имя Коши.

Вообще говоря, даже зная все моменты случайной величины, нельзя восстановить ее распределение. Читателю предлагается придумать пример двух случайных величин, у которых все моменты существуют и совпадают, но которые по-разному распределены. Это уже не совсем легко.

Впрочем, в весьма широком классе случаев (и именно они будут для нас особенно актуальны) распределение однозначно задается моментами. Об этом мы поговорим в следующем параграфе.

## 1.9. Формула обращения и предельные теоремы пуассоновского типа

Имеет место следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $\xi$  принимает значения из множества  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Тогда

$$P(\xi = k) = \sum_{r=k}^n (-1)^{k+r} \frac{M_f^r \xi}{k!(r-k)!}.$$

Теорема дает своего рода формулу обращения: если по определению любой факториальный момент случайной величины с конечным множеством значений есть комбинация вероятностей этих значений, то тут мы сами вероятности выражаем в виде комбинаций моментов. И это не праздное занятие. Помните второй пример подсчета математического ожидания из предыдущего параграфа? Вот именно: иной раз с помощью трюкачества типа линейности найти (или хотя бы достаточно точно оценить) моменты сравнительно легко, а вероятности сходу не ищутся вовсе; применяем формулу обращения, и вероятности (или их оценки) у нас в кармане.

Доказательство теоремы — это, по сути, применение формулы включений и исключений (см. [11, 12]). Проще, однако, понять смысл, действуя с помощью «неполной индукции». В самом деле, берем первое слагаемое суммы:

$$\begin{aligned} (-1)^{2k} \frac{M_f^k \xi}{k!} &= \frac{1}{k!} M \xi (\xi - 1) \dots (\xi - k + 1) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^n i(i-1) \dots (i-k+1) P(\xi = i). \end{aligned}$$

Здесь в последнем равенстве мы пользуемся тем почти очевидным фактом, что если  $\xi: \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$ , а  $f$  — некоторая функция, то

$$Mf(\xi) = \sum_{i=1}^k f(y_i) P(\xi = y_i).$$

Расписываем дальше:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^n i(i-1) \dots (i-k+1) P(\xi = i) = \\ = \frac{1}{k!} \left( k! P(\xi = k) + \frac{(k+1)!}{1!} P(\xi = k+1) + \dots \right). \end{aligned}$$

И что мы видим? Выделилось (после сокращения факториалов) в аккурат нужное слагаемое. Если взять второе слагаемое суммы из фор-

мулировки теоремы, то оно уже пойдет с минусом и уничтожит величину  $\frac{(k+1)!}{k!1!}P(\xi = k+1)$ . И так далее. В конечном итоге останется только  $P(\xi = k)$  (это можно доказать строго по индукции), а того нам и хотелось.

Для случайных величин, принимающих счетное множество значений, имеет место прямой аналог теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\xi$  принимает значения из множества  $\{0, 1, \dots\}$ . Пусть, кроме того, все ее моменты конечны и для любого  $t$  справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(M_f^r \xi) r^m}{r!} = 0.$$

Тогда

$$P(\xi = k) = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{k+r} \frac{M_f^r \xi}{k!(r-k)!}.$$

Фактически теорема 2 есть следствие теоремы 1. Мы не станем заострять внимание читателя на технических деталях.

Теоремы 1 и 2 говорят о том, что для случайных величин, обладающих указанными в формулировках свойствами, распределение целиком задается моментами. Более того, из этих теорем можно получить одно исключительно важное для наших будущих исследований следствие.

Вот о чем идет речь. Зачастую в теории вероятностей рассматривают не одно вероятностное пространство, но (бесконечную) последовательность пространств, на каждом из которых введена своя случайная величина. Действительно, пусть  $\mathfrak{A}_n = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — серия подобных пространств. Например, это может быть серия пространств, фактически возникавших в параграфе 1.3. Тогда для  $\omega = (x_1, \dots, x_{n_i}) \in \Omega_{n_i}$  мы имеем

$$P_{n_i}(\omega) = p_i^{\sum_{k=1}^{n_i} x_k} q_i^{n_i - \sum_{k=1}^{n_i} x_k}.$$

В качестве случайной величины здесь естественнее всего брать количество успехов  $\mu_{n_i}$ , т. е., собственно,  $\mu_{n_i}(\omega) = \sum_{k=1}^{n_i} x_k$ . Аналогично и в общем случае: на каждом  $\mathfrak{A}_n$  есть некоторая величина  $\xi_n: \Omega_n \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ .

Имеет место

**Теорема 3.** Пусть каждая величина  $\xi_n$  из заданной последовательности случайных величин принимает значения из множества

$\{0, 1, \dots\}$ . Пусть, кроме того, для каждого  $r$  выполнено  $M_f^r \xi_n \sim \lambda^r$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\lambda > 0$  — некоторая константа. Тогда

$$P_n(\xi_n = k) \sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Здесь « $\sim$ » — значок асимптотического равенства (см. приложение). По понятным причинам говорят, что  $\xi_n$  имеет *асимптотически пуассоновское распределение*.

Смысл теоремы 3 очень простой. В параграфе 1.8 мы отметили, что у пуассоновской случайной величины с параметром  $\lambda > 0$  факториальные моменты суть  $\lambda^r$ ,  $r = 1, 2, \dots$ . Теперь же мы видим обратное: если факториальные моменты случайной величины «почти» степенные по некоторому  $\lambda$ , то и сама величина «почти пуассоновская».

Доказательство теоремы 3 несколько муторное с аналитической точки зрения. Но его можно сделать интуитивно ясным при некоторых дополнительных условиях. Предположим, например, что существуют такие функции  $\varphi_1, \varphi_2$ , определенные на множестве натуральных чисел, что  $\varphi_i(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для обоих значений индекса  $i$  и при всех  $r, n \in \mathbb{N}$  выполнено

$$(1 + \varphi_1(n))\lambda^r \leq M_f^r \xi_n \leq (1 + \varphi_2(n))\lambda^r.$$

Разумеется, из сделанного предположения следует асимптотическое равенство  $M_f^r \xi_n \sim \lambda^r$ . Но обратное, вообще говоря, неверно. Почему? Представим себе, что

$$M_f^r \xi_n = \left(1 - \frac{e^r}{n}\right)\lambda^r.$$

При каждом  $r$  имеем  $M_f^r \xi_n \sim \lambda^r$ ; однако найти функцию  $\varphi_1$ , которая бы не зависела от  $r$  и с которой бы выполнялось неравенство

$$M_f^r \xi_n \geq (1 + \varphi_1(n))\lambda^r,$$

нельзя!

Итак, пусть наше предположение выполнено. Тогда при всех  $n, k \in \mathbb{N}$

$$P_n(\xi_n = k) = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{k+r} \frac{M_f^r \xi_n}{k!(r-k)!}.$$

Это так, поскольку условие теоремы 2 сейчас, очевидно, выполнено.

За счет неравенств, которым удовлетворяют факториальные моменты, получаем

$$\begin{aligned} P_n(\xi_n = k) &\geq \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{k+r} \frac{(1 + \varphi_1(n))\lambda^r}{k!(r-k)!} = (1 + \varphi_1(n)) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^{k+i}}{k!i!} = \\ &= (1 + \varphi_1(n)) \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^i}{i!} = (1 + \varphi_1(n)) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$P_n(\xi_n = k) \leq (1 + \varphi_2(n)) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

А это и значит, что

$$P_n(\xi_n = k) \sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

В частности, имеет место классическая теорема Пуассона для схемы серий.

**Теорема 4.** Пусть в схеме серий  $p_i n_i \sim \lambda > 0$  при  $i \rightarrow \infty$ . Тогда

$$P_{n_i}(\mu_{n_i} = k) \sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Эта теорема говорит о том, что в определенных условиях биномиальная случайная величина приближается к пуассоновской. Как видно, для ее выполнения не требуется знание о поведении всех моментов, достаточно лишь информации о математическом ожидании. Доказательство теоремы Пуассона совсем простое, и его можно найти в любом стандартном руководстве по теории вероятностей.

Для полноты картины в следующем параграфе мы скажем еще об одном классическом способе аппроксимации биномиальной случайной величины.

## 1.10. Нормальная аппроксимация

В предыдущем параграфе распределения биномиальных случайных величин мы приближали посредством пуассоновского распределения. При этом нам было важно, что мы работали в условиях схемы серий. Однако последовательность биномиальных случайных величин вполне может возникать и в рамках обычной схемы Бернулли, т. е. в случае, когда вероятность успеха не зависит от числа проделанных испытаний. В этом случае работает так называемая *интегральная предельная теорема Муавра — Лапласа*.



**Теорема 5.** *Имеет место предельное соотношение*

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Сходимость в теореме 5 равномерная по  $a$  и  $b$ . Смысл в том, что если мы вычитаем из биномиальной величины ее математическое ожидание и полученную разность делим на корень из дисперсии той же величины, то распределение новой величины с ростом числа испытаний весьма похоже на нормальное со средним 0 и дисперсией 1. Это своего рода универсальный статистический закон природы, о котором можно многое узнать из книг типа [5–7].

Мы не станем здесь доказывать теорему 5.

## 1.11. Неравенства Чебышёва и Маркова

Очень важным инструментом для работы со случайными величинами служит неравенство П. Л. Чебышёва. Оно справедливо для любого вероятностного пространства, но мы сформулируем и докажем его в случае конечного пространства.

**Теорема 6.** *Для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено*

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышёва показывает, сколь плотно произвольная случайная величина сконцентрирована около своего среднего значения. Вопросы концентрации случайных величин около некоторых своих средних характеристик играют особую роль в теории случайных графов.

**Доказательство теоремы 6.** Прочитаем неравенство «справедливо»:

$$\begin{aligned} D\xi &= \sum_y (y - M\xi)^2 P(\xi = y) = \\ &= \sum_{y: (y - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2} (y - M\xi)^2 P(\xi = y) + \sum_{y: (y - M\xi)^2 < \varepsilon^2} (y - M\xi)^2 P(\xi = y) \geq \\ &\geq \sum_{y: (y - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2} \varepsilon^2 P(\xi = y) = \varepsilon^2 P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Все получилось, теорема доказана.  $\square$

Вариантом неравенства Чебышёва служит неравенство Маркова.

**Теорема 7.** Если  $\xi$  принимает неотрицательные значения, то для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Его доказательство столь же элементарно.

### 1.12. Уточнение неравенства Чебышёва в случае схемы Бернулли

Пусть  $\xi$  — не произвольная случайная величина, а величина, которая имеет вид  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i = 1$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$  и  $\xi_i = -1$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$  ( $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы). Это, по сути, биномиальная величина, с той лишь разницей, что неудаче теперь отвечает не 0, но  $-1$ . Справедлива

**Теорема 8.** Для любого  $a > 0$  выполнено

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Поясним сперва, почему теорема 8 значительно уточняет в данном специальном случае неравенство Чебышёва. В самом деле, по теореме 6 и ввиду  $M\xi = 0$  имеем

$$\begin{aligned} P(\xi \geq a) &= P(\xi - M\xi \geq a - M\xi) \leq P(|\xi - M\xi| \geq a - M\xi) = \\ &= P(|\xi - M\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2} = \frac{nD\xi_1}{a^2} = \frac{n}{a^2}. \end{aligned}$$

Если теперь  $a = n^{2/3}$  (например), то  $P(\xi \geq a) \leq n^{-1/3}$ . Однако по теореме 8 выполнено  $P(\xi \geq a) \leq e^{-n^{1/3}/2}$ . С ростом  $n$  последняя величина убывает настолько быстрее, нежели  $n^{-1/3}$ , что все вопросы отпадают.

В принципе при достаточно больших  $n$  теорему 8 можно вывести из бронебойной теоремы 5. Весь пафос в том, что нижеследующее доказательство совершенно элементарно и справедливо при всех  $n$ .

**Доказательство теоремы 8.** Возьмем произвольное число  $\lambda > 0$ . Получим

$$P(\xi \geq a) = P(\lambda\xi \geq \lambda a) = P(e^{\lambda\xi} \geq e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} M e^{\lambda\xi}.$$

Последняя оценка обусловлена неравенством Маркова. Далее, ввиду независимости  $\xi_1, \dots, \xi_n$ ,

$$M e^{\lambda\xi} = (M e^{\lambda\xi_1}) \cdot \dots \cdot (M e^{\lambda\xi_n}).$$

Понятно, что

$$Me^{\lambda \xi_i} = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = \operatorname{ch} \lambda.$$

Несложное упражнение состоит в том, чтобы убедиться в правильности неравенства  $\operatorname{ch} \lambda \leq e^{\lambda^2/2}$ . В итоге

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\lambda a} \cdot e^{n \frac{\lambda^2}{2}}.$$

Положим  $\lambda = \frac{a}{n}$ , ведь  $\lambda$  мы вольны брать каким угодно. Имеем

$$P(\xi \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{n} + n \frac{a^2}{2n^2}} = e^{-\frac{a^2}{2n}},$$

и теорема доказана.  $\square$

Заметим, что выбор параметра  $\lambda$  мы осуществили оптимально, минимизировав по  $\lambda$  квадратичное выражение  $n\lambda^2/2 - a\lambda$ . Наше рассуждение выглядит трюкачеством, но и к трюкачеству постепенно можно привыкнуть, благо оно не последнее в этой книге.

### 1.13. Условные вероятности и математические ожидания относительно разбиений

До сих пор мы умели обуславливать события лишь по событиям же. Для многих вероятностных целей, однако, полезно бывает умение обуславливать события по целым группам событий. В простейшем случае конечного вероятностного пространства в роли таких групп выступают произвольные разбиения пространства элементарных событий на части ненулевой меры.

Итак, пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — конечное вероятностное пространство. Рассмотрим любое разбиение  $D$  множества  $\Omega$  на части  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  с условием  $P(\Omega_i) \neq 0$  для любого  $i$ . Если  $A \in \mathcal{F}$ , то *условной вероятностью события  $A$  относительно разбиения  $D$*  называется случайная величина

$$P(A|D) = P(A|D)(\omega) = \sum_{i=1}^n I_{\Omega_i}(\omega) P(A|\Omega_i),$$

где  $I_{\Omega_i}(\omega) = 1$ , если  $\omega \in \Omega_i$ , и  $I_{\Omega_i}(\omega) = 0$  иначе. Проще говоря, величина  $P(A|D)$  принимает значение, равное обычной условной вероятности  $P(A|\Omega_i)$ , коль скоро элементарное событие находится в  $\Omega_i$ . Всего таких значений  $n$  штук.

Пусть теперь  $\xi: \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$ . Назовем *условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно разбиения  $D$*

случайную величину

$$M(\xi|D) = M(\xi|D)(\omega) = \sum_{j=1}^k y_j P(\xi = y_j|D)(\omega).$$

Каждая случайная величина  $\eta: \Omega \rightarrow \{z_1, \dots, z_l\}$  порождает разбиение  $D_\eta = \{\Omega_1, \dots, \Omega_l\}$ , где  $\Omega_i = \{\omega: \eta(\omega) = z_i\}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Соответственно  $M(\xi|\eta)$  определяется как  $M(\xi|D_\eta)$ . Аналогично вводятся  $D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$  и  $M(\xi|\eta_1, \dots, \eta_m)$ .

Условное математическое ожидание обладает рядом свойств.

1. *Линейность.* Для любых  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  и  $\xi_1, \xi_2$  выполнено

$$M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2|D) = c_1M(\xi_1|D) + c_2M(\xi_2|D).$$

2.  $M(M(\xi|D)) = M\xi$  (математическое ожидание условного математического ожидания есть среднее от исходной случайной величины).
3. Если случайная величина  $\eta$  *измерима* относительно  $D$ , т. е. принимает постоянные значения на элементах разбиения, то для любой  $\xi$  выполнено  $M(\xi\eta|D) = \eta M(\xi|D)$ . В частности,  $M(\eta|D) = \eta$ .
4. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $M(\xi|\eta) = M\xi$ .

Можно привести и другие свойства, но нам с запасом хватит перечисленных. Свойство 1 почти очевидное. Методы доказательства свойств 2—4 похожи (см. [6]), и мы приведем лишь рассуждение, которое обосновывает свойство 2. Итак,

$$M(M(\xi|D)) = M\left(\sum_{j=1}^k y_j P(\xi = y_j|D)\right) = \sum_{j=1}^k y_j M(P(\xi = y_j|D)).$$

В свою очередь,

$$M(P(\xi = y_j|D)) = \sum_{i=1}^n P(\xi = y_j|\Omega_i)P(\Omega_i) = P(\xi = y_j)$$

по формуле полной вероятности. Таким образом,

$$M(M(\xi|D)) = \sum_{j=1}^k y_j P(\xi = y_j) = M\xi,$$

и свойство установлено.

### 1.14. Понятие о мартингале

На конечном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  *мартингал* — это любая последовательность случайных величин  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$ , такая что для каждого  $i$

$$M(\xi_i | \xi_{i-1}, \dots, \xi_0) = \xi_{i-1}.$$

Очень легко создать интуитивное понятие мартингала. Представим себе, что мы пришли в казино и играем в «честную» игру. Честность понимается в том смысле, что вероятности выигрыша и проигрыша равны. В начальный момент времени у нас в кошельке  $\xi_0$  рублей, после первого раунда  $\xi_1$ , и т. д. Ясно, что среднее наполнение кошелька в  $i$ -й момент времени при условии всей предыстории должно совпадать с его же наполнением в  $(i - 1)$ -й момент. Такая цепочка величин и есть мартингал.

Более формально описанную ситуацию можно изложить следующим образом. Пусть  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$  — независимые случайные величины, принимающие значения  $-1, 1$  с равными вероятностями. Мы понимаем  $\eta_i$  как проигрыш или выигрыш в  $i$ -м раунде. Тогда  $\xi_i = \eta_0 + \dots + \eta_i$ , и можно строго показать, что  $\xi_0, \dots, \xi_m$  — мартингал.

Само слово «мартингал» в переводе с французского означает «хлястик» (болтающийся кончик ремня, пояса). Мартингалы играют огромную роль в финансовой математике. Важны они и для теории случайных графов. Прежде всего они служат еще одним инструментом для получения результатов о плотной концентрации случайных величин около своих математических ожиданий. Именно об этом мы поговорим в следующем параграфе.

### 1.15. Неравенство Азумы

Справедлива

**Теорема 9** (неравенство Азумы). Пусть  $0 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$  — мартингал, причем  $|\xi_i - \xi_{i-1}| \leq 1$  для всех допустимых  $i$  и всех  $\omega \in \Omega$ . Тогда для любого  $a > 0$  выполнено

$$P(\xi_m \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2m}}.$$

Ввиду примера мартингала из предыдущего параграфа, теорема 8 есть, очевидно, частный случай теоремы 9. Однако теорема 9 несколько сложнее.

**Доказательство теоремы 9.** Начало очень знакомое. Возьмем произвольное  $\lambda > 0$ . Тогда

$$P(\xi_m \geq a) = P(\lambda \xi_m \geq \lambda a) = P(e^{\lambda \xi_m} \geq e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} M e^{\lambda \xi_m}.$$

Поскольку  $\xi_0 = 0$ , мы можем написать

$$\xi_m = (\xi_m - \xi_{m-1}) + (\xi_{m-1} - \xi_{m-2}) + \dots + (\xi_1 - \xi_0),$$

так что в обозначениях  $\eta_i = \xi_i - \xi_{i-1}$  имеем

$$e^{\lambda \xi_m} = e^{\lambda \eta_m} \cdot e^{\lambda \eta_{m-1}} \cdot \dots \cdot e^{\lambda \eta_1}.$$

Если бы сомножители были независимы, как то было в теореме 8, то до завершения доказательства было бы рукой подать. Но тут все хитрее.

Мы используем второе и третье свойство условного математического ожидания:

$$\begin{aligned} M e^{\lambda \xi_m} &= M \left( \prod_{i=1}^m e^{\lambda \eta_i} \right) = M \left( M \left( \prod_{i=1}^m e^{\lambda \eta_i} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0 \right) \right) = \\ &= M \left( \left( \prod_{i=1}^{m-1} e^{\lambda \eta_i} \right) M(e^{\lambda \eta_m} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0) \right). \end{aligned}$$

Посмотрим на второй сомножитель под знаком последнего математического ожидания. С этой целью введем функцию

$$h(x) = \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda.$$

Эта функция линейна по  $x$ , и нетрудно показать, что  $e^{\lambda x} \leq h(x)$ , коль скоро  $\lambda > 0$ ,  $|x| \leq 1$  (сделайте это!). Имеем с учетом линейности условного математического ожидания и неравенства  $|\eta_m| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} M(e^{\lambda \eta_m} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0) &\leq M(h(\eta_m) \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0) = \\ &= h(M(\xi_m - \xi_{m-1} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0)). \end{aligned}$$

По определению мартингала  $M(\xi_m \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0) = \xi_{m-1}$ . В то же время  $M(\xi_{m-1} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0) = \xi_{m-1}$ , благодаря «частному случаю» свойства 3 условного математического ожидания, который упомянут в конце формулировки свойства. Получаем

$$h(M(\xi_m - \xi_{m-1} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0)) = h(0) = \operatorname{ch} \lambda \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Снова апеллируя к линейности, убеждаемся в том, что

$$M \left( \left( \prod_{i=1}^{m-1} e^{\lambda \eta_i} \right) M(e^{\lambda \eta_m} \mid \xi_{m-1}, \dots, \xi_0) \right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} M \left( \prod_{i=1}^{m-1} e^{\lambda \eta_i} \right).$$

Последовательно «выщипывая» сомножители согласно описанной технологии, имеем в итоге

$$M e^{\lambda \xi_m} \leq e^{\frac{\lambda^2 m}{2}}$$

и, стало быть,

$$P(\xi_m \geq a) \leq e^{-\lambda a} \cdot e^{\frac{\lambda^2 m}{2}}.$$

Завершение доказательства такое же, как и в теореме 8: минимизируем квадратичное по  $\lambda$  выражение в показателе экспоненты посредством  $\lambda = \frac{a}{m}$  и приходим к нужной оценке.  $\square$

Если в теореме 9 положить  $\xi_0 = c$ , то

$$P(\xi_m - c \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2m}}$$

и

$$P(\xi_m - c \leq -a) \leq e^{-\frac{a^2}{2m}},$$

т. е.

$$P(|\xi_m - c| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2m}}.$$

Поскольку  $c = M\xi_i$  для каждого  $i$ , мы видим, что неравенство Азумы говорит именно о плотной концентрации последней величины в мартингале («кончика хлястика») около своего среднего значения.

## 2. Модель Эрдёша — Реньи случайного графа

В этой главе мы расскажем о самой глубоко изученной модели случайного графа — модели Эрдёша — Реньи.

### 2.1. Введение

Каждый из нас хорошо знает, что такое граф. Нет, разумеется, речь идет не о титуле, но о математическом объекте, который сплошь и рядом встречается как в «чистой» комбинаторике, так и в ее приложениях. Именно этот объект должен быть знаком всякому, кто хотя бы немного занимался или просто интересовался математикой — в особенности ее «дискретным» аспектом. Давайте только, на всякий случай, договоримся о терминологии и обозначениях.

Произнося слово «граф», мы подразумеваем, что в нашем графе нет петель, кратных ребер и ориентации. Говоря формально, граф у нас — это любая пара  $G = (V, E)$ , в которой  $V$  — это (как правило, конечное) множество вершин, а  $E$  — совокупность таких пар  $(x, y)$  с  $x, y \in V$ , что

- 1)  $x \neq y$  (отсутствие петель),
- 2)  $(x, y) = (y, x)$  (отсутствие ориентации),
- 3) в  $E$  нет совпадающих элементов (отсутствие кратных ребер).

Коль скоро мы пожелаем избавиться от ограничения 1), слово «граф» нам придется заменить на «псевдограф»; коль скоро мы захотим обойтись без условия 2), вместо слова «граф» мы скажем «орграф» (т. е. ориентированный граф); коль скоро мы пренебрежем свойством 3), «граф» превратится в «мультиграф»; возможны «мультипсевдографы», «псевдоорграфы» и т. д. Тем не менее до тех пор, пока не оговорено противное, граф — это именно граф в указанном, так сказать, узком смысле.

Про графы есть много книг: [13–19] и др. Имеется масса задач о графах. Некоторые из этих задач мы изучим в дальнейшем с вероятностной точки зрения.

В следующем параграфе мы дадим строгое определение модели Эрдёша — Реньи случайного графа.



## 2.2. Определение модели Эрдёша — Реньи

Зафиксируем произвольное натуральное число  $n$  и рассмотрим множество  $V = \{1, \dots, n\}$ . Это будет множество вершин случайного графа. Собственно случайными будут только ребра. Пусть  $N = C_n^2$  и  $e_1, \dots, e_N$  суть все возможные ребра, которые можно провести на парах элементов из  $V$ , коль скоро строим мы именно *граф*. Иными словами,  $e_1, \dots, e_N$  — ребра *полного* графа  $K_n$ . Зададимся некоторым  $p \in [0, 1]$  и станем выбирать ребра из множества  $\{e_1, \dots, e_N\}$  согласно схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$  (см. §1.2), т. е. в случае успеха кладем очередное ребро в строящееся множество ребер  $E$ , а в случае неудачи — не кладем. Возникает случайный граф  $G = (V, E)$ .

Фактически, как и в схеме Бернулли, граф — это последовательность  $\omega = (x_1, \dots, x_N)$  из нулей и единиц. Просто теперь мы последовательность в известном смысле представляем графом:  $x_i = 1$  — значит,  $e_i \in E$ ;  $x_i \neq 1$  — значит,  $e_i \notin E$ .

В итоге имеем вероятностное пространство  $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p})$ , в котором, как и положено,

$$|\Omega_n| = 2^N = 2^{C_n^2}, \quad P_{n,p}(G) = p^{|E|} q^{C_n^2 - |E|}.$$

По-другому можно еще сказать так: в модели Эрдёша — Реньи каждое ребро независимо от всех остальных ребер входит в случайный граф с вероятностью  $p$ . Хотя через  $G(n, p)$  мы обозначили вероятностное пространство, мы будем говорить зачастую о «модели  $G(n, p)$ ». Эта небольшая вольность речи нужна нам будет исключительно для краткости и удобства.

Каждое событие из  $\mathcal{F}$  есть, разумеется, множество графов. Однако естественно интерпретировать события как свойства графов. В самом деле: что значит посчитать вероятность того, что граф обладает данным свойством  $A$ ? Это и значит описать множество  $A$  тех графов, которые данным свойством обладают, а затем найти вероятность  $A$ . Например, если  $A$  — множество всех связанных графов, то вероятность события «случайный граф связан» и есть  $P_{n,p}(A) = \sum_{G \in A} P_{n,p}(G)$ .

Наука о случайном графе изучает вероятности тех или иных свойств графов. Наибольший интерес представляет «динамика» этих вероятностей, т. е. их изменение с ростом  $n$ . А числу вершин и впрямь ничто не мешает расти. При этом вероятность возникновения ребра графа тоже вполне может эволюционировать. Иными словами, мы интерпретируем  $G(n, p)$  даже не как схему Бернулли, но как схему серий (ср. §1.3). В обозначениях параграфа 1.3  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\} =$

$= \{C_2^2, C_3^2, C_4^2, \dots\}$  и  $p = p(n)$ . Может статься, скажем, что  $p = \frac{1}{2}$  для всех  $n$ , а может статься,  $p = \frac{1}{n}$  или  $p = 1 - \frac{1}{\ln n}$ , — как угодно.

Пусть  $\{A_n\}$  — некоторая последовательность свойств-событий в пространствах  $G(n, p)$ . Например,  $A_n$  состоит в связности графа, и тогда зависимости от  $n$ , по сути, нет, или  $A_n$  сводится к наличию в графе не менее  $n$  треугольников (троек вершин, попарно соединенных ребрами), и тогда индекс  $n$  важен, и т. д. Мы говорим, что  $A_n$  *выполнено почти наверное* (п. н.), если  $P_{n,p}(A_n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Иными словами, вероятностная доля тех графов, для которых свойство выполняется, с ростом числа вершин все ближе к единице. Мы увидим в дальнейшем массу ситуаций, когда выполнение того или иного свойства почти наверное влечет поистине удивительные следствия.

Модель  $G(n, p)$  была предложена П. Эрдёшем и А. Реньи в конце 50-х годов XX века. С тех пор наука шагнула далеко вперед, и о многих аспектах проблематики полувековой давности известно «почти все». Тем не менее даже здесь остается великое множество нерешенных задач.

Несколько весьма любопытных вопросов такого типа мы и изучим в настоящей главе.

### 2.3. Одна естественная модификация модели

Зачастую схему Бернулли, лежащую в основе модели  $G(n, p)$ , заменяют классической вероятностью. Делают это так. Рассматривают  $M \leq N$  и выбирают  $M$  случайных элементов из множества  $\{e_1, \dots, e_N\}$ , получая, таким образом, случайный граф  $G = (V, E)$ . Если соответствующее вероятностное пространство обозначить  $G(n, M) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,M})$ , то здесь, очевидно,  $P_{n,M}(G) = \frac{1}{C_N^M}$ . Опыт показывает, что работать с базовой (бернуллиевской) моделью значительно проще, нежели с только что описанной. В то же время, повозившись, можно показать, что во многих случаях есть прямая связь между вероятностями свойств в двух моделях. Заинтересованный читатель найдет необходимые сведения в книге [1]. Мы же для простоты будем работать только с моделью  $G(n, p)$ .

### 2.4. Треугольники в случайных графах

Этот параграф мы посвятим одной несложной задаче о случайном графе. Она не столь интересная, зато весьма иллюстративная. Речь пойдет о распределении треугольников в случайных графах.

### 2.4.1. Постановка задачи и формулировки результатов

Легче всего почувствовать вкус задач о случайных графах на примере задачи о распределении треугольников в них. Обозначим через  $T_{3,n}$  случайную величину на пространстве  $G(n, p)$ , равную количеству треугольников в случайном графе. Например,  $T_{3,n}(K_n) = C_n^3$ , а для любого графа  $G$  с двумя ребрами  $T_{3,n}(G) = 0$ . Сформулируем основные утверждения и прокомментируем их.

**Теорема 10.** Пусть  $\alpha$  — любая функция натурального аргумента  $n$ , стремящаяся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Предположим,  $p(n) = \frac{\alpha(n)}{n}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда почти наверное  $T_{3,n} = 0$  (т. е. граф не содержит треугольников).

**Теорема 11.** Пусть  $p(n) \sim \frac{c}{n}$ , где  $c > 0$  — константа. Тогда  $T_{3,n}$  имеет асимптотически пуассоновское распределение с параметром  $\lambda = \frac{c^3}{6}$ .

**Теорема 12.** Пусть  $\omega$  — любая функция натурального аргумента  $n$ , стремящаяся к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ . Предположим,  $p(n) = \frac{\omega(n)}{n}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда почти наверное  $T_{3,n} \geq 1$  (т. е. граф содержит треугольники).

Поясним, почему в совокупности теоремы 10–12 дают практически исчерпывающую картину в задаче о треугольниках. Действительно, в теореме 10 говорится о функциях  $p(n)$ , которые «бесконечно малы» по сравнению с  $\frac{1}{n}$  (в математическом анализе принято обозначение  $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , см. приложение); в теореме 11 имеем  $p(n) \sim \frac{c}{n}$ ; наконец, в теореме 12 имеем  $\frac{1}{n} = o(p)$ . Понятно, что разумные функции как-то так и устроены: либо малы в сравнении с дробью  $\frac{1}{n}$ , либо в константу раз от нее отличаются, либо велики в сравнении с ней. Остальные изыски нам вряд ли интересны в данном контексте.

Получается, что в первой ситуации (когда вероятность ребра совсем маленькая) треугольников п.н. нет; в третьей ситуации (когда вероятность ребра совсем большая) треугольники п.н. есть; и лишь в пограничной — второй — ситуации вероятность отсутствия треугольника (равно как и вероятность его наличия) не стремится ни к нулю, ни к единице. Точнее, во второй ситуации

$$P_{n,p}(T_{3,n} = 0) \sim \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\frac{c^3}{6}} \in (0, 1).$$

В науке о случайных графах, коль скоро возникла подобная картина, принято говорить о *фазовом переходе*, а функцию типа нынешней  $\frac{1}{n}$  принято называть *пороговой*. Смысл в том, что, едва мы преодолеваем «порог», как от «почти наверное выполнено данное свойство» мы переходим к «почти наверное не выполнено данное свойство», и только, «стоя прямо на пороге», мы, возможно, не сваливаемся ни в одну из «воронок».

В последующих пунктах мы приведем доказательства теорем 10, 11 и 12.

### 2.4.2. Доказательство теоремы 10

Нам нужно убедиться в том, что  $P_{n,p}(T_{3,n} = 0) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это равносильно соотношению  $P_{n,p}(T_{3,n} \geq 1) \rightarrow 0$ . Воспользуемся неравенством Маркова (см. § 1.11):  $P_{n,p}(T_{3,n} \geq 1) \leq MT_{3,n}$ . Найдем, стало быть, математическое ожидание числа треугольников в случайном графе и проверим, что оно стремится к нулю с ростом числа вершин графа. Применим линейность (см. § 1.8), а именно, занумеруем все тройки вершин из множества  $V = \{1, \dots, n\}$ , обозначая их, скажем,  $\tau_1, \dots, \tau_{C_n^3}$ , и для каждого  $i \in \{1, \dots, C_n^3\}$  положим  $T_{3,n,i}(G) = 1$ , если вершины из  $\tau_i$  попарно соединены ребрами в  $G$  (образуют треугольник), и  $T_{3,n,i}(G) = 0$  в противном случае. Очевидно,

$$T_{3,n} = T_{3,n,1} + \dots + T_{3,n,C_n^3},$$

так что

$$MT_{3,n} = MT_{3,n,1} + \dots + MT_{3,n,C_n^3}.$$

Однако  $MT_{3,n,i} = p^3$  для любого  $i$ , и, значит,  $MT_{3,n} = C_n^3 p^3$ .

Вспоминаем комбинаторику и тот факт, что у нас  $p = \frac{\alpha}{n}$ :

$$MT_{3,n} = C_n^3 p^3 = \frac{n!}{6(n-3)!} \cdot \frac{\alpha^3}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)\alpha^3}{6n^3} \sim \frac{\alpha^3}{6} \rightarrow 0$$

ввиду условий, наложенных нами на функцию  $\alpha$  в формулировке теоремы. Теорема доказана.

### 2.4.3. Доказательство теоремы 12

Здесь нам нужно установить неравенство, противоположное тому, которое мы обосновали в предыдущем пункте. Прежде всего обратим-

ся к помощи неравенства Чебышёва (см. § 1.11):

$$\begin{aligned} P_{n,p}(T_{3,n} = 0) &= P_{n,p}(T_{3,n} \leq 0) = P_{n,p}(-T_{3,n} \geq 0) = \\ &= P_{n,p}(MT_{3,n} - T_{3,n} \geq MT_{3,n}) \leq \frac{DT_{3,n}}{(MT_{3,n})^2}. \end{aligned}$$

Если теперь нам удастся показать, что  $\frac{DT_{3,n}}{(MT_{3,n})^2} \rightarrow 0$ , то утверждение теоремы будет у нас в кармане. Как видно, отныне нам не хватит знания об асимптотическом поведении среднего; нужно еще и со вторым моментом разобраться.

Итак,  $DT_{3,n} = MT_{3,n}^2 - (MT_{3,n})^2$ , причем вычитаемое мы уже нашли ранее. В обозначениях п. 2.4.2

$$MT_{3,n}^2 = M(T_{3,n,1} + \dots + T_{3,n,C_n^3})^2.$$

Ни о какой линейности речь тут, разумеется, уже не идет, тем более что индикаторы  $T_{3,n,i}$  отнюдь не являются независимыми. После возведения в квадрат получаем (за счет обычной линейности математического ожидания)

$$MT_{3,n}^2 = MT_{3,n,1}^2 + \dots + MT_{3,n,C_n^3}^2 + \sum_{i \neq j} M(T_{3,n,i}T_{3,n,j}).$$

Здесь последнее суммирование идет по всем упорядоченным парам несовпадающих индексов  $i, j$ ; оттого и двойки нет в качестве сомножителя.

Заметим, что  $T_{3,n,i}^2 = T_{3,n,i}$ , так что

$$MT_{3,n,1}^2 + \dots + MT_{3,n,C_n^3}^2 = MT_{3,n}.$$

В то же время полезно понимать, что

$$\sum_{i \neq j} M(T_{3,n,i}T_{3,n,j}) = M_f^2 T_{3,n}.$$

Эта величина есть среднее количество упорядоченных пар  $i, j$ , для которых обе тройки вершин  $\tau_i, \tau_j$  случайного графа образуют треугольник в нем.

Промежуточный итог следующий:

$$DT_{3,n} = MT_{3,n}^2 - (MT_{3,n})^2 = MT_{3,n} + M_f^2 T_{3,n} - (MT_{3,n})^2.$$

Допустим, мы показали, что одновременно выполнены два свойства: 1)  $MT_{3,n} \rightarrow \infty$ ; 2)  $M_f^2 T_{3,n} \sim (MT_{3,n})^2$  или, что то же самое,  $M_f^2 T_{3,n} =$

$= (1 + o(1))(MT_{3,n})^2$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_{n,p}(T_{3,n} = 0) &\leq \frac{DT_{3,n}}{(MT_{3,n})^2} = \frac{MT_{3,n} + M_f^2 T_{3,n} - (MT_{3,n})^2}{(MT_{3,n})^2} = \\ &= \frac{1}{MT_{3,n}} + \frac{(1 + o(1))(MT_{3,n})^2 - (MT_{3,n})^2}{(MT_{3,n})^2} = o(1) + o(1) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и дело в шляпе. Проверим утверждения 1) и 2).

С утверждением 1) все совсем просто:

$$MT_{3,n} = C_n^3 p^3 = \frac{n!}{6(n-3)!} \cdot \frac{\omega^3}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{6n^3} \sim \frac{\omega^3}{6} \rightarrow \infty,$$

и вся недолга.

Что же до утверждения 2), то тут придется чуть-чуть попотеть. В самом деле, нам нужно найти асимптотику для

$$M_f^2 T_{3,n} = \sum_{i \neq j} M(T_{3,n,i} T_{3,n,j}).$$

Фактически каждое слагаемое  $M(T_{3,n,i} T_{3,n,j})$  есть вероятность того, что треугольники с вершинами в  $\tau_i \neq \tau_j$  принадлежат случайному графу. Если  $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$ , то такая вероятность равна  $p^6$ ; если  $|\tau_i \cap \tau_j| = 1$ , то ответ тот же; если же  $|\tau_i \cap \tau_j| = 2$ , то вероятность равна  $p^5$ . Разобьем искомую сумму на две части: в первой будут слагаемые величины  $p^6$ , во второй —  $p^5$ . Простая комбинаторика показывает, что в первой части слагаемых  $C_n^3 C_{n-3}^3 + 3C_n^3 C_{n-3}^2$ , а во второй —  $3C_n^3(n-3)$ . Имеем

$$M_f^2 T_{3,n} = \sum_{i \neq j} M(T_{3,n,i} T_{3,n,j}) = (C_n^3 C_{n-3}^3 + 3C_n^3 C_{n-3}^2) p^6 + 3C_n^3(n-3) p^5.$$

Остается доказать, что

$$\frac{M_f^2 T_{3,n}}{(MT_{3,n})^2} \rightarrow 1.$$

Действительно,

$$C_n^3 \sim C_{n-3}^3 \sim \frac{n^3}{6}, \quad C_{n-3}^2 \sim \frac{n^2}{2}, \quad n-3 \sim n,$$

поэтому

$$M_f^2 T_{3,n} \sim \left( \frac{n^6}{36} + \frac{n^5}{4} \right) p^6 + \frac{n^4}{2} p^5 \sim \frac{n^6}{36} p^6 + \frac{n^4}{2} p^5.$$

Более того,

$$\frac{n^4 p^5}{n^6 p^6} = \frac{1}{n^2 p} = \frac{1}{n\omega(n)} \rightarrow 0,$$

так что

$$M_f^2 T_{3,n} \sim \frac{n^6}{36} p^6.$$

В то же время

$$(MT_{3,n})^2 = (C_n^3 p^3)^2 \sim \frac{n^6}{36} p^6,$$

ввиду чего

$$\frac{M_f^2 T_{3,n}}{(MT_{3,n})^2} \sim 1.$$

Утверждение 2) доказано, и теорема доказана вместе с ним.

#### 2.4.4. Доказательство теоремы 11

Всем, кто читал вводную главу 1 этой книги, а также всем, кто знаком с *методом моментов*, идея доказательства понятна с ходу: раз нам нужно установить асимптотическую пуассоновость некоторой случайной величины, значит, наверное, нам следует обратиться к технологии из параграфа 1.9.

Разумеется, наша задача состоит, тем самым, в отыскании асимптотик для факториальных моментов величины  $T_{3,n}$ . Начнем с первого из них, т. е. просто с математического ожидания. Ну, его-то мы уже не раз находили, и равно оно  $C_n^3 p^3$ . В текущей ситуации  $p \sim \frac{c}{n}$  и, стало быть,

$$MT_{3,n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot p^3 \sim \frac{n^3}{6} \cdot \frac{c^3}{n^3} = \frac{c^3}{6}.$$

Все, дальнейшее уже ясно: если мы верим в справедливость теоремы 11, то происхождение величины  $\lambda$  из ее формулировки очевидно и нам остается только проверить, что для каждого  $r$  величина  $M_f^r T_{3,n}$  надлежащим образом близка к  $\lambda^r$  (см. теорему 3); благо при  $r = 1$  близость стопроцентная.

Итак, нам нужно найти асимптотику для  $M_f^r T_{3,n}$  при любом фиксированном  $r$  и  $n \rightarrow \infty$ . Для  $r = 1$  и даже для  $r = 2$  (см. п. 2.4.3) мы ее знаем: в первом случае это  $\lambda$ , во втором —  $\lambda^2$ . Попробуем посмотреть на общий случай.

В пункте 2.4.3 мы специально обратили внимание читателя на то, что второй факториальный момент величины  $T_{3,n}$  есть сумма по всем упорядоченным парам несовпадающих чисел  $i, j$  математических ожиданий произведений индикаторов  $T_{3,n,i}, T_{3,n,j}$ . Аналогично устроен и  $r$ -й факториальный момент:

$$M_f^r T_{3,n} = \sum_{i_1, \dots, i_r} M(T_{3,n,i_1} \cdot \dots \cdot T_{3,n,i_r}),$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным кортежам длины  $r$  попарно различных индексов, каждый из которых лежит в пределах от 1 до  $C_n^3$ . Рассмотрим отдельно слагаемые, отвечающие тем кортежам  $(i_1, \dots, i_r)$ , для которых тройки  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_r}$  не только попарно различны, но еще и попарно не пересекаются. Сумму этих слагаемых назовем  $\Sigma_1 = \Sigma_1(n, r)$ ; сумму всех остальных математических ожиданий обозначим  $\Sigma_2 = \Sigma_2(n, r)$ .

Справедливы следующие два факта: 1)  $\Sigma_1 \sim \lambda^r$ ; 2)  $\Sigma_2 = o(\Sigma_1)$ . Ниже мы последовательно эти факты докажем и тем завершим доказательство теоремы 11.

Начнем с факта 1). Каждое слагаемое в сумме  $\Sigma_1$  есть вероятность того, что некоторые  $r$  попарно не пересекающихся троек вершин из множества  $\{1, \dots, n\}$  образуют  $r$  треугольников в случайном графе. Очевидно, такая вероятность равна  $p^{3r}$ . Количество слагаемых в сумме (т. е. количество способов выбрать  $r$  троек из  $n$ -элементного множества) есть 0, коль скоро  $3r > n$ , и

$$C_n^3 \cdot C_{n-3}^3 \cdot \dots \cdot C_{n-3(r-1)}^3$$

в противном случае. Здесь мы пользуемся тем, что кортежи из наших троек упорядочены. Таким образом, при условии  $3r \leq n$

$$\Sigma_1 = C_n^3 \cdot C_{n-3}^3 \cdot \dots \cdot C_{n-3(r-1)}^3 \cdot p^{3r}.$$

При фиксированном  $r$

$$\lambda^r \sim (C_n^3 p^3)^r, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оценим

$$\frac{\Sigma_1}{\lambda^r} \sim \frac{C_n^3}{C_n^3} \cdot \frac{C_{n-3}^3}{C_n^3} \cdot \dots \cdot \frac{C_{n-3(r-1)}^3}{C_n^3}.$$

Для каждого  $i \in \{1, \dots, r\}$  имеем  $\frac{C_{n-3(i-1)}^3}{C_n^3} \leq 1$  и

$$\begin{aligned} \frac{C_{n-3(i-1)}^3}{C_n^3} &= \frac{(n-3i+3)(n-3i+2)(n-3i+1)}{n(n-1)(n-2)} = \\ &= \left(1 - \frac{3i-3}{n}\right) \left(1 - \frac{3i-3}{n-1}\right) \left(1 - \frac{3i-3}{n-2}\right) \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{3r}{n}\right) \left(1 - \frac{3r}{n-1}\right) \left(1 - \frac{3r}{n-2}\right) \geq \left(1 - \frac{3r}{n-2}\right)^3 \sim 1. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом фиксированном  $r$  справедлива асимптотика  $\Sigma_1 \sim \lambda^r$ ,  $n \rightarrow \infty$ , и факт 1) обоснован.



Перейдем к факту 2). Нам нужно убедиться в том, что  $\Sigma_2 = o(\Sigma_1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Однако мы только что установили асимптотику  $\Sigma_1 \sim \lambda^r = \text{const}$ . Таким образом, наше утверждение эквивалентно равенству  $\Sigma_2 = o(1)$ . В сумме  $\Sigma_2$  суммирование идет по всем кортежам  $(i_1, \dots, i_r)$ , для которых хотя бы две тройки в множестве  $\{\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_r}\}$  пересекаются (но никакие две тройки не совпадают). Поэтому можно представить  $\Sigma_2$  в виде

$$\Sigma_2 = \sum_{s=4}^{3r-1} \Sigma^s,$$

где в  $\Sigma^s$  суммируются прежние  $M(T_{3,n,i_1} \dots T_{3,n,i_r})$  по всем кортежам, удовлетворяющим условию  $|\tau_{i_1} \cup \dots \cup \tau_{i_r}| = s$ .

Практически очевидно, что если фиксированы  $s$  и  $i_1, \dots, i_r$  со свойством  $|\tau_{i_1} \cup \dots \cup \tau_{i_r}| = s$ , то совокупное число ребер  $t$  у треугольников, порождаемых тройками  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_r}$ , строго больше  $s$  (см. примеры на рис. 1). Значит,

$$M(T_{3,n,i_1} \dots T_{3,n,i_r}) = p^t \sim \frac{c^t}{n^t} = \frac{1}{n} \cdot O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

где значок  $O$  имеет стандартный аналитический смысл, объясняемый в приложении.

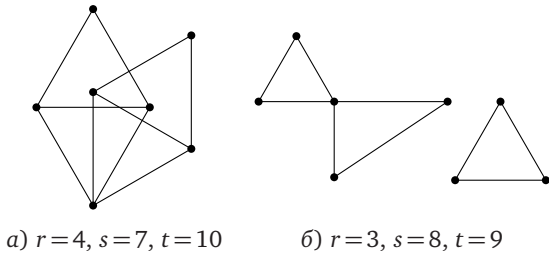


Рис. 1

С другой стороны, при каждом  $s$  количество слагаемых в  $\Sigma^s$  есть  $C_n^s \theta(s, r)$ , где  $\theta(s, r)$  является константой по  $n$ . При этом  $C_n^s = O(n^s)$ , и мы имеем в итоге

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{s=4}^{3r-1} \Sigma^s = \sum_{s=4}^{3r-1} C_n^s \cdot \theta(s, r) \cdot \frac{1}{n} \cdot O\left(\frac{1}{n^s}\right) = \\ &= \sum_{s=4}^{3r-1} O(n^s) \cdot \frac{1}{n} \cdot O\left(\frac{1}{n^s}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1). \end{aligned}$$

Факт 2) доказан, и теорема 11 доказана вместе с ним.

## 2.5. Связность случайного графа

Задача о треугольниках, которую мы изучали до сих пор, отлично иллюстрирует базовые методы теории случайных графов. Однако она слегка ученическая. Здесь мы перейдем к рассмотрению куда более глубокой и богатой приложениями проблематики. А именно, нас будет интересовать свойство связности случайного графа. Разумеется, мы не дадим уже столь исчерпывающей картины, какую мы имели в случае треугольников, но все же мы «снимем» самые «сливки» науки.

### 2.5.1. Формулировки результатов и комментарии к ним

Начнем с простейшего утверждения.

**Теорема 13.** Пусть  $p = \frac{c \ln n}{n}$ . Если  $c > 1$ , то почти наверное случайный граф связан. Если  $c < 1$ , то почти наверное случайный граф связным не является.

Опять фазовый переход! Но это и все, пожалуй, что понятно с ходу. Мы поступим следующим образом. Сперва сформулируем упрощенный (хотя и уточненный в то же время) результат. Затем прокомментируем его. В пункте 2.5.2 мы его докажем.

**Теорема 14.** Пусть  $p = \frac{c \ln n}{n}$ . Если  $c \geq 3$  и  $n \geq 100$ , то

$$P_{n,p}(G \text{ связан}) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Теорема 14 дает упрощенный вариант первого утверждения теоремы 13. Зато в ней конкретизируется выражение «почти наверное»: не просто вероятность стремится к единице, но делает она это с известной скоростью. Так практичнее.

Константа 100 в формулировке взята с большим запасом. Да не в ней суть.

Есть очень наглядная интерпретация теоремы 14. Представим себе, что в некоторой стране есть 2000 стратегически важных пунктов, причем страна столь богата, что каждые два из упомянутых пунктов связаны в ней *отдельным* железнодорожным путем. Из пункта М можно проехать в пункт В, минуя И, из М можно попасть в Ма через В, и т. д. Короче говоря, 2000-вершинный граф железных дорог полон (см. рис. 2).

Но есть у страны и «потенциальный противник». Допустим, в случае конфликта он уничтожает отдельно взятый железнодорожный путь с вероятностью  $q$  независимо от всех остальных путей. Спрашивается, насколько большим может быть  $q$ , если страна желает

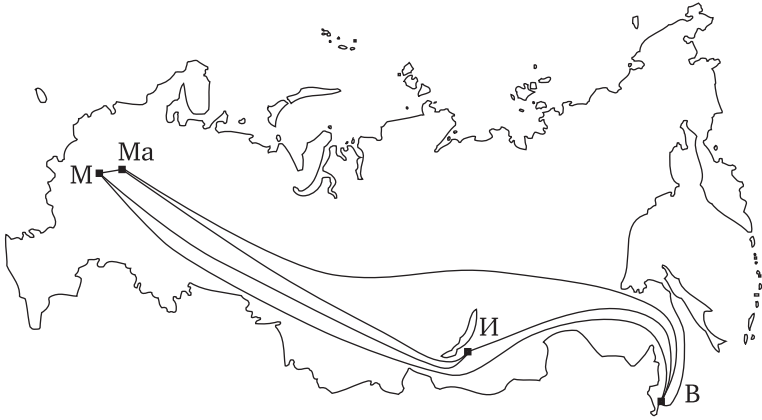


Рис. 2

сохранить свою «инфраструктуру» с достаточно большой вероятностью? Что такое инфраструктура? А это и есть связность! Если хоть каким-нибудь окольным путем мы можем добраться из любого пункта в любой другой, это уже кое-что. Иначе все: развал и дробление.

Заметим, что уничтожение путей с вероятностью  $q$  — это ровно то же, что их возникновение с вероятностью  $p$ . Так ведь на выходе у нас будет как раз случайный граф железных дорог. По теореме 14, если  $p = \frac{3 \ln 2000}{2000} \approx 0,01$  (а стало быть,  $q \approx 0,99$ ), то этот граф связан с вероятностью не меньше  $1 - \frac{1}{2000} > 0,999$ . Не правда ли, впечатляющий результат? Мы «разрешаем» противнику уничтожить каждый путь с вероятностью 0,99 и, тем не менее, сохраняем целостность дорожной сети с вероятностью 0,999!

Именно на этом примере отчетливо видно, почему, изучая случайный граф, мы не ограничиваемся схемой Бернулли с фиксированной вероятностью успеха, но рассматриваем схему серий, в рамках которой вероятность успеха может меняться с ростом числа испытаний. Если в стране окажется не 2000 стратегически важных пунктов, а, скажем, 100 000, то результат применения теоремы 14 будет еще более удивительным. Правда, стране тоже придется поднапрячься: шутка ли — в деле  $C_{100000}^2$  железных дорог...

На самом деле, пример с железными дорогами взят лишь для наглядности. Любая сеть, в которой связи между узлами нарушаются независимо друг от друга с равными вероятностями, служит анало-

гичным примером. Например, речь может идти о телефонных станциях и линиях связи, об интернет-серверах, о различных социальных и биологических сетях и пр., и пр. Таким образом, практическая значимость теоремы 14 очевидна, и в свете сказанного она обычно интерпретируется прикладниками как теорема о *надежности сети*.

Разумеется, тут есть два крайне существенных ограничения: независимость, с которой уничтожаются связи в сети, и полнота исходного графа связей (т. е., собственно, сети). От этих ограничений необходимо избавляться, и кое-что мы скажем об этом в следующей главе. Пока же разберемся и с более простой ситуацией, благо и она совсем не так уж проста.

### 2.5.2. Доказательство теоремы 14

Мы слегка упростим себе жизнь и докажем лишь, что в условиях теоремы вероятность связности стремится к единице. Оценку скорости стремления мы оставим читателю в качестве упражнения.

Введем случайную величину на пространстве  $G(n, p)$ :

$$X_n = X_n(G) = \begin{cases} 0, & \text{если } G \text{ связен,} \\ k, & \text{если у } G \text{ } k \text{ компонент.} \end{cases}$$

Таким образом,  $X_n$  принимает неотрицательные целые значения, причем  $X_n \neq 1$ . Нам нужно показать, что  $P_{n,p}(X_n = 0) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это равносильно асимптотике  $P_{n,p}(X_n \geq 1) \rightarrow 0$ . По неравенству Маркова (см. § 1.11)  $P_{n,p}(X_n \geq 1) \leq MX_n$ , и нам остается обосновать стремление к нулю математического ожидания.

Представим  $X_n$  в виде суммы

$$X_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n-1},$$

где  $X_{n,k} = X_{n,k}(G)$  — число  $k$ -вершинных компонент графа  $G$ . Занумеруем все  $k$ -элементные подмножества множества вершин  $V$  случайного графа в некотором (произвольном) порядке:  $K_1, \dots, K_{C_n^k}$ . Тогда, в свою очередь,

$$X_{n,k} = X_{n,k,1} + \dots + X_{n,k,C_n^k},$$

когда скоро

$$X_{n,k,i} = X_{n,k,i}(G) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i \text{ образует компоненту в } G, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В итоге

$$MX_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} MX_{n,k,i}.$$

Очевидно,

$$MX_{n,k,i} = P_{n,p}(K_i \text{ образует компоненту в } G) \leq \leq P_{n,p}(\text{из } K_i \text{ в } V \setminus K_i \text{ нет ребер в } G).$$

Получая последнее неравенство, мы просто пренебрегли условием связности той части графа  $G$ , которая «сидит» на множестве вершин  $K_i$  (такую часть принято называть *индуцированным подграфом* и обозначать  $G|_{K_i}$ ). Далее (см. рис. 3),

$$P_{n,p}(\text{из } K_i \text{ в } V \setminus K_i \text{ нет ребер в } G) = q^{k(n-k)},$$

и, значит,

$$MX_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} q^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k q^{k(n-k)}.$$

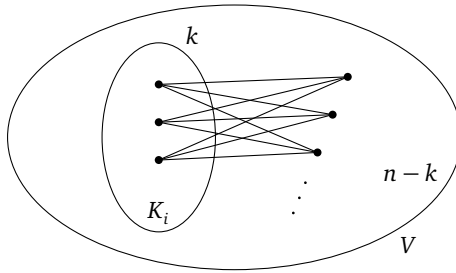


Рис. 3

Последняя сумма симметрична в том смысле, что ее слагаемые при  $k$  и  $n - k$  равны. Рассмотрим  $k = 1$ :

$$nq^{n-1} = n(1 - p)^{n-1} \leq ne^{-p(n-1)} \leq e^{-\frac{3(\ln n)(n-1)}{n}}.$$

При достаточно больших  $n$  имеем  $\frac{n-1}{n} \geq 0,9$ . Следовательно,

$$nq^{n-1} \leq e^{-2,7 \ln n} = \frac{1}{n^{2,7}}.$$

Возьмем теперь отношение соседних слагаемых в исследуемой сумме:

$$\frac{C_n^{k+1} q^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k q^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot q^{-k+n-k-1}.$$

Ввиду упомянутой выше симметрии достаточно смотреть лишь на  $k \leq \frac{n}{2}$ . Если, например,  $k \leq \frac{n}{8}$ , то

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot q^{-k+n-k-1} \leq (n-1)q^{\frac{3n}{4}-1} \leq (n-1)e^{-\frac{9\ln n}{4}+p} \leq ne^{-\frac{9\ln n}{4}+1}.$$

При достаточно больших  $n$  имеем

$$ne^{-\frac{9\ln n}{4}+1} \leq ne^{-2\ln n} = \frac{1}{n}.$$

Все это означает, что при  $k \leq \frac{n}{8}$  каждое слагаемое в сумме заведомо меньше первого. При  $k > \frac{n}{8}$  выполнены другие неравенства:

$$C_n^k < 2^n, \quad q^{k(n-k)} \leq q^{\frac{n}{8} \cdot \frac{n}{2}} = q^{\frac{n^2}{16}} \leq e^{-\frac{pn^2}{16}} \leq e^{-\frac{3(\ln n)n}{16}}.$$

В итоге

$$C_n^k q^{k(n-k)} \leq 2^n \cdot n^{-\frac{3n}{16}}.$$

При достаточно больших  $n$  последнее выражение снова ничтожно мало по сравнению с  $\frac{1}{n^{2,7}}$ .

Итак, слагаемое с  $k = 1$  в искомой сумме наибольшее (с огромным запасом). Значит,

$$MX_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^{2,7}} < \frac{n}{n^{2,7}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и теорема доказана.

### 2.5.3. Вокруг теоремы 13

В этом пункте мы скажем еще несколько слов о теореме 13, которая все-таки точнее теоремы 14 с теоретической точки зрения.

Во-первых, понятно, что доказательство той части теоремы 13, которая касается  $c > 1$ , практически дословно повторяет доказательство теоремы 14. Просто надо еще аккуратнее провести выкладки.

Во-вторых, что такое случай  $c < 1$ ? По сути нам нужно доказать в его рамках, что  $P_{n,p}(X_n > 1) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ . Это очень похоже на теорему 12. Так и есть: доказательство следует осуществлять с помощью неравенства Чебышёва. Мы эти (довольно громоздкие) выкладки проводить не станем. Но заинтересованный читатель справится с ними и сам. Благо все инструменты у него уже есть.

Итак, мы снова имеем дело с фазовым переходом. Однако в прошлый раз (при изучении задачи о треугольниках) мы разобрались даже с ситуацией «балансирования на пороге». Сейчас ее аналогом

служит та, в которой  $p \sim \frac{\ln n}{n}$ . Функций указанного вида великое множество. И вот для одного их класса удается получить аналог теоремы 11.

**Теорема 15.** Пусть  $p = \frac{\ln n + c + o(1)}{n}$ . Тогда

$$P_{n,p}(G \text{ связан}) \rightarrow e^{-e^{-c}}.$$

В частности, при  $p = \frac{\ln n}{n}$  вероятность стремится к  $e^{-1}$ .

Доказательство теоремы 15 можно найти в книге [1], и мы его не приводим. Оно довольно сложное, но сам факт выглядит весьма привлекательно.

#### 2.5.4. Гигантская компонента

В этом пункте мы расскажем еще об одном удивительном фазовом переходе, относящемся к свойству связности.

**Теорема 16.** Пусть  $p = \frac{c}{n}$ . Тогда при любом  $c < 1$  существует такая константа  $\beta = \beta(c) > 0$ , что почти наверное каждая компонента случайного графа имеет не более  $\beta \ln n$  вершин. При любом  $c > 1$  существует такая константа  $\gamma = \gamma(c) \in (0, 1)$ , что почти наверное среди компонент случайного графа есть одна, число вершин которой не меньше  $\gamma n$ .

В действительности, это один из результатов, которые Эрдёш и Реньи получили в своих основополагающих работах [20–22]. Именно с него, по большому счету, пошла вся наука о случайных графах. Вокруг этого результата есть масса литературы, и в ней можно найти его разнообразные доказательства. Сошлемся, например, на книги [1] и [23]. Здесь мы теорему 16 доказывать не станем.

Сразу отметим, что и о «внутренности фазового перехода», т. е. о случае  $p \sim \frac{1}{n}$  известно очень много (см. [1, 23]). Однако тут все гораздо сложнее, нежели то было в предшествующих ситуациях, и мы не будем вдаваться в соответствующие детали.

Если вернуться к «стратегической» интерпретации задачи о связности, можно сказать так. «Разрешив» противнику уничтожать каждый железнодорожный путь с вероятностью  $1 - \frac{1}{n}$ , мы с вероятностью, близкой к единице, сохраним если не всю страну, то хотя бы ее огромный кусок — кусок размера  $\gamma n$ . Этот кусок принято называть *гигантской компонентой*. Если же мы дадим противнику еще больше воли, то развал почти неизбежен, и это развал катастрофический:

островки связности, скорее всего, имеют ничтожный — логарифмический — размер. Кстати, даже при наличии гигантской компоненты все остальные компоненты крошечные — логарифмические. Это тоже можно строго обосновать.

В принципе так устроена любая крупная сеть. Например, так устроен Интернет. В нем узлы — это сайты, а связи — ссылки между сайтами. Есть гигантская связная компонента и масса мелких, разрозненных «краин». Ну, об Интернете мы поговорим отдельно.

Завершим пункт еще одной стратегической интерпретацией. Итак, можно представлять себе, что  $p$  — это своего рода время, меняющееся на отрезке  $[0, 1]$ . Если задано достаточно большое  $n$ , то при  $p \ll \frac{1}{n}$  мы имеем феодальную раздробленность; время идет, и возникает империя; наконец, при  $p \gg \frac{\ln n}{n}$  империя получает мировое господство. Такая вот история.

## 2.6. Хроматическое число случайного графа

Этот параграф мы посвятим одному из самых изящных и нетривиальных сюжетов теории случайных графов: речь пойдет о хроматическом числе.

### 2.6.1. Определения, формулировки и комментарии

Напомним, что *хроматическим числом* графа  $G = (V, E)$  называется величина  $\chi(G)$ , равная минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого ребра были разноцветными. Иными словами,

$$\chi(G) = \min\{\chi : V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall x, y \in V_i (x, y) \notin E\}.$$

Здесь посредством значка « $\sqcup$ » мы подчеркиваем тот факт, что множества  $V_i$  попарно не пересекаются.

Хроматическое число — это одна из важнейших «экстремальных» характеристик графа. Можно представлять себе, например, такую модельную задачу. В тюрьме сидит тысяча заключенных. Некоторые из них настолько ненавидят друг друга, что их опасно сажать в одну камеру. Спрашивается, каково минимальное число камер, при котором возможна безопасная рассадка заключенных? Понятно, что в данном случае вершины графа — это заключенные, и мы соединяем пару вершин ребром, если соответствующие заключенные несовместимы.



В каждой из книг [13–19] можно найти разделы, посвященные хроматическим числам. Разумеется, нас будут интересовать вероятностные аспекты проблематики.

Прежде чем перейти к формулировкам наиболее ярких результатов, напомним еще пару экстремальных характеристик графа, которые тесно связаны с хроматическим числом. А именно, положим

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W (x, y) \notin E\},$$

$$\omega(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W (x, y) \in E\}.$$

Величина  $\alpha(G)$  называется *числом независимости* графа  $G$ , а величина  $\omega(G)$  носит название *кликкового числа*. Вообще, любой полный подграф данного графа называется *кликкой* в нем, а любой «пустой» подграф (т. е. индуцированный подграф без ребер) называется *независимым множеством*.

Практически очевидно, что  $\chi(G) \geq \omega(G)$  и  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ . Смысл последнего неравенства в том, что в любой раскраске каждый цветовой класс образует независимое множество, и лучшее, на что мы можем рассчитывать, строя оптимальную раскраску, — это придумать разбиение на цвета, в каждом из которых наибольшее возможное количество вершин. Это неравенство нам будет очень полезно в дальнейшем, и позже мы поймем, насколько оно сильнее первой оценки.

Теперь сформулируем и прокомментируем две теоремы.

**Теорема 17.** Пусть  $p = \frac{1}{2}$ . Тогда существует такая функция  $\varphi = \varphi(n) = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$ , что

$$P_{n,p}\left(\left|\chi(G) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| > \varphi(n)\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 18.** Пусть  $p = n^{-\alpha}$ , где  $\alpha > \frac{5}{6}$ . Тогда существует такая функция  $u = u(n, \alpha)$ , что

$$P_{n,p}(u \leq \chi(G) \leq u + 3) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 17 говорит о том, что хроматическое число «почти всякого» графа на  $n$  вершинах асимптотически ведет себя как  $\frac{n}{2\log_2 n}$ . Это значит, грубо говоря, что при случайном заполнении тюрьмы преступниками камер потребуется лишь в малое (хотя и медленно растущее) число раз меньше, нежели количество самих преступников. Мы употребили выражение «почти всякого», поскольку при  $p = \frac{1}{2}$  вероятность графа подчиняется фактически классическому определе-

нию вероятности (см. §1.1), т. е. вероятность — это доля графов, обладающих данным свойством. Мы написали «грубо говоря» не только по причине некоторой искусственности задачи о тюрьме, но еще и потому, что на самом деле «социальные» связи не вполне правильно моделировать в том виде, в каком мы это делаем сейчас. О социальных сетях и об их адекватных моделях речь пойдет в последней главе. Тем не менее смысл остается прежним: с ростом числа вершин хроматическое число случайного графа с «подавляющей» вероятностью оказывается заключенным между  $(1 - \varepsilon) \frac{n}{2 \log_2 n}$  и  $(1 + \varepsilon) \frac{n}{2 \log_2 n}$ , где  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малое наперед заданное число; хроматическое число *плотно сконцентрировано* около величины  $\frac{n}{2 \log_2 n}$  (ср. конец параграфа 1.15).

Теорема 18 на порядок более удивительна и неожиданна, нежели теорема 17. Действительно, мы ведь утверждаем, что с вероятностью, близкой к единице, хроматическое число принимает всего четыре из возможных  $n$  значений! Вот уж концентрация, так концентрация, — плотнее некуда. Раньше-то функция  $\varphi$  вполне могла расти вместе с  $n$  (оставаясь, конечно, бесконечно малой в сравнении с  $\frac{n}{\log_2 n}$ ); теперь никакой функции нет и в помине. Да, вероятность ребра случайного графа в теореме 18 быстро убывает, но с ходу это говорит лишь о том, что, по-видимому, у типичного графа хроматическое число не будет большим. А вот предугадать то, что это число вряд ли примет какое-либо значение вне множества  $\{u, \dots, u + 4\}$ , куда труднее. При этом мы ничего не говорим о поведении самой функции  $u$ . Но это и не самое интересное. Впрочем, мы и об этом скажем в надлежащий момент.

Теоремы 17 и 18 как бы выдернуты из общего многообразия потенциальных утверждений подобного типа. Мы же ничего не говорим о  $p = \text{const} \neq \frac{1}{2}$ ; ничего не говорим мы и о функциях  $p$ , отличных от функций вида  $n^{-\alpha}$ . Однако самая суть науки о хроматическом числе случайного графа улавливается именно тут, а к исчерпывающему изложению теории мы и не стремимся. Более широкий обзор достижений в рассматриваемой области читатель сможет найти в книгах [1, 3, 23].

Заметим, кстати, что условие теоремы 18 несколько избыточно: можно ослабить ограничение  $\alpha > \frac{5}{6}$ , можно даже  $u + 3$  заменить на  $u + 1$ . Просто мы докажем относительно несложный и потому максимально проясняющий существо дела вариант утверждения.

Теоремы 17 и 18 принадлежат Б. Боллобашу — одному из крупнейших современных специалистов по случайным графам. В пункте 2.6.2 мы разовьем технику, необходимую для доказательства теорем, в пунктах 2.6.3 и 2.6.4 мы докажем теорему 18, в пунктах 2.6.5—2.6.11 мы опишем общую схему доказательства теоремы 17 (опустив лишь одну чрезмерно громоздкую выкладку), в пункте 2.6.12 мы обсудим поведение функции  $u$  из формулировки теоремы 18.

### 2.6.2. Мартингалы реберного и вершинного типов

Мы недаром сделали отсылку к параграфу 1.15, говоря о плотной концентрации. Именно техника мартингаловых неравенств поможет нам доказать теоремы 17 и 18. Здесь мы введем понятия мартингала *реберного типа* и мартингала *вершинного типа*.

Пусть  $\xi$  — произвольная случайная величина на пространстве  $G(n, p)$ . Свяжем с ней некоторую последовательность случайных величин  $Y_0, \dots, Y_N$ , где  $N = C_n^2$ . Действительно, пусть  $e_1, \dots, e_N$  — ребра полного графа на  $n$  вершинах. Для каждого  $G \in \Omega_n$  и для всякого  $i \in \{0, \dots, N\}$  положим

$$Y_i(G) = M(\xi | \{H \in \Omega_n : \forall j \leq i e_j \in E(H) \iff e_j \in E(G)\}).$$

Здесь  $E(G)$  — множество ребер графа, а условное математическое ожидание берется относительно *одного* события, т. е.

$$M(\xi | A) = \sum_{i=1}^k y_i P_{n,p}(\xi = y_i | A).$$

Мы как бы добавляем потенциальные ребра случайного графа одно за другим и следим за тем, как меняется среднее значение  $\xi$  при таком добавлении. Читателю предлагается самому убедиться в том, что  $Y_0, \dots, Y_N$  — это мартингал (см. § 1.14), тем более, что интуитивно это понятно. Именно этот мартингал и называется мартингалом *реберного типа* или мартингалом *проявления ребер* (ср. [23]).

Легко сообразить, что  $Y_0 = M\xi$ , тогда как  $Y_N = \xi$ . Последнее обстоятельство особенно важно.

Мартингал *вершинного типа* или *мартингал проявления вершин* строится аналогично:

$$Y_i(G) = M(\xi | \{H \in \Omega_n : \forall x, y \leq i (x, y) \in E(H) \iff (x, y) \in E(G)\}),$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Мартингал  $Y_1, \dots, Y_n$  — это своего рода подмартингал в мартингале *реберного типа*. Как и в случае с проявлением ребер,  $Y_1 = M\xi$ ,  $Y_n = \xi$ .

Назовем случайную величину  $\xi$  *липшицевой по ребрам (по вершинам)*, если  $|\xi(G) - \xi(H)| \leq 1$ , коль скоро графы  $G$  и  $H$  отличаются на не более чем одно ребро (одну вершину). Несложное упражнение состоит в том, чтобы обосновать такой факт: если  $\xi$  липшицева по ребрам (вершинам), то соответствующий мартингал реберного (вершинного) типа удовлетворяет неравенству Азумы, т. е.  $|Y_i - Y_{i-1}| \leq 1$  для всех  $i$ . Вот это и есть основа дальнейшего метода. Берем случайную величину  $\xi$ , которая липшицева либо по ребрам, либо по вершинам. Сопоставляем ей мартингал подходящего типа. В нем последняя величина и есть  $\xi$ , причем для нее (т. е., собственно, для  $\xi$ ) выполнено неравенство Азумы. Главное — не забыть заменить обозначение  $m$  из параграфа 1.15 на  $N$  в случае проявления ребер и на  $n - 1$  в случае проявления вершин.

Рассмотрим естественный пример: в качестве  $\xi$  возьмем  $\chi$ , т. е. хроматическое число. Случайная величина  $\chi$  липшицева и по ребрам, и по вершинам. Стало быть, можно написать неравенства

$$P_{n,p}(|\chi(G) - M\chi| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}},$$

$$P_{n,p}(|\chi(G) - M\chi| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2N}}.$$

Очевидно, первое неравенство гораздо сильнее. Оно носит название теоремы Шамира — Спенсера.

### 2.6.3. Доказательство теоремы 18: формулировка леммы 1 и вывод из нее

Нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $p = n^{-\alpha}$ ,  $\alpha > \frac{5}{6}$ . Пусть также  $V$  — множество вершин случайного графа в модели  $G(n, p)$ . Тогда при достаточно больших  $n$  имеет место соотношение

$$P_{n,p}(\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n, \text{ выполнено } \chi(G|_S) \leq 3) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Лемма говорит о том, что почти наверное хроматическое число каждого не слишком большого индуцированного подграфа случайного графа не превосходит тройки, коль скоро вероятность ребра случайного графа надлежащим образом мала. Это интуитивно понятное, хотя и нетривиальное утверждение. Мы докажем его в пункте 2.6.4. А пока воспользуемся им.

Итак, давайте считать, что  $n$  достаточно велико. Насколько именно — будет ясно из контекста. Зафиксируем это  $n$ , а также  $\alpha > \frac{5}{6}$ . По

таким  $n$  и  $\alpha$  выберем наименьшее  $u = u(n, \alpha)$ , для которого

$$P_{n,p}(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}.$$

Такое  $u$  корректно определено при  $n \geq 3$ , поскольку

$$P_{n,p}(\chi(G) \leq n) = 1$$

и, чем меньше  $u \leq n$ , тем меньше вероятность. Ввиду минимальности  $u$  имеем

$$P_{n,p}(\chi(G) \leq u - 1) \leq \frac{1}{\ln n} \Rightarrow P_{n,p}(\chi(G) \geq u) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Иными словами,  $u$  — это уже такая функция, что первое неравенство из теоремы 18 для нее выполнено с вероятностью, стремящейся к единице.

Надо бы как-то еще показать, что с большой вероятностью  $\chi(G) \leq u + 3$ . Дальнейшее рассуждение напоминает магию: ловкость рук — и никакого обмана.

Рассмотрим случайную величину  $Y$ , равную наименьшей мощности множества  $S \subseteq V$ , удаление которого из  $V$  порождает граф с хроматическим числом не больше  $u$ :

$$Y(G) = \min\{|S| : S \subseteq V, \chi(G|_{V \setminus S}) \leq u\}.$$

Ясно, что  $Y$  липшицева по вершинам. Применим технологию из предыдущего пункта:

$$P_{n,p}(Y(G) - MY \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}},$$

$$P_{n,p}(Y(G) - MY \leq -a) \leq e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}}.$$

Положим  $a = \sqrt{2(n-1) \ln \ln n}$ . Тогда

$$P_{n,p}(Y(G) - MY \geq a) \leq \frac{1}{\ln n},$$

$$P_{n,p}(Y(G) - MY \leq -a) \leq \frac{1}{\ln n}.$$

Предположим,  $MY \geq a$ . Если так, то вторая оценка влечет цепочку неравенств

$$P_{n,p}(Y(G) \leq 0) \leq P_{n,p}(Y(G) \leq MY - a) \leq \frac{1}{\ln n}.$$

Однако

$$P_{n,p}(Y(G) \leq 0) = P_{n,p}(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}.$$

Противоречие.

Значит,  $MY < a$ . Отсюда за счет первого мартингального неравенства получаем

$$P_{n,p}(Y(G) \geq 2a) \leq P_{n,p}(Y(G) \geq MY + a) \leq \frac{1}{\ln n},$$

т. е.

$$P_{n,p}(Y(G) \leq 2\sqrt{2(n-1)\ln\ln n}) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Обозначим через  $A_1$  множество графов из леммы 1, т. е. множество, каждый элемент которого обладает свойством

$$\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n, \text{ выполнено } \chi(G|_S) \leq 3.$$

По лемме 1 имеем  $P_{n,p}(A_1) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$ .

Обозначим через  $A_2$  множество графов, для которых  $\chi(G) \geq u$ . Мы знаем, что  $P_{n,p}(A_2) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$ .

Пусть, наконец,  $A_3$  — множество графов со свойством

$$Y(G) \leq 2\sqrt{2(n-1)\ln\ln n}.$$

Разумеется,  $P_{n,p}(A_3) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$ .

Рассмотрим событие  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ . Каждый граф  $G$  в нем таков, что:

- 1)  $\chi(G) \geq u$ ;
- 2)  $Y(G) \leq 2\sqrt{2(n-1)\ln\ln n} < \sqrt{n} \ln n$ ;
- 3)  $\chi(G|_S) \leq 3$ , каким бы ни было  $S$  с условием  $|S| \leq \sqrt{n} \ln n$ .

Для данного  $G \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$  берем то самое  $S \subseteq V$ , для которого  $\chi(G|_{V \setminus S}) \leq u$ . За счет 2) и 3) имеем  $\chi(G|_S) \leq 3$ . Следовательно,  $\chi(G) \leq u + 3$ . В итоге

$$P_{n,p}(u \leq \chi(G) \leq u + 3) \geq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 1 - \frac{3}{\ln n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

#### 2.6.4. Доказательство теоремы 18: доказательство леммы 1

Утверждение леммы равносильно неравенству

$$P_{n,p}(\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n, \text{ выполнено } \chi(G|_S) > 3) \leq \frac{1}{\ln n},$$

коль скоро  $n$  достаточно велико. Будем оценивать указанную вероятность сверху, предполагая, что  $n$  большое.

Прежде всего заметим, что событие

$$\{\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n, \text{ выполнено } \chi(G|_S) > 3\}$$

совпадает с событием

$$\{\exists S \subset V, 4 \leq |S| \leq \sqrt{n} \ln n, \text{ выполнено } \chi(G|_S) > 3\},$$

поскольку у любого графа на не более трех вершинах хроматическое число не превосходит тройки. Более того, можно считать, что  $S$  минимально по вложению, т. е., что  $S$  обладает описанным свойством, но для любого  $x \in S$  разность  $S \setminus \{x\}$  этим свойством не обладает. Перепишем, стало быть, интересующее нас событие так:

$$A = \{\exists T \subset V, 4 \leq |T| \leq \sqrt{n} \ln n,$$

$$T \text{ минимально, и выполнено } \chi(G|_T) > 3\}.$$

Ясно, что если ввести обозначение  $\tau = \lceil \sqrt{n} \ln n \rceil$ , то

$$A = \bigcup_{t=4}^{\tau} \bigcup_{\substack{T \subset V, |T|=t, \\ T \text{ минимально}}} A_{t,T},$$

где

$$A_{t,T} = \{\text{для данного минимального } T, |T| = t, \text{ выполнено } \chi(G|_T) > 3\}.$$

Если граф  $G$  обладает свойством  $A_{t,T}$  с конкретными  $t$  и  $T$ , то

$$|E(G|_T)| \geq \frac{3t}{2}.$$

Действительно, возьмем любую вершину  $x \in T$ . Мы знаем, что

$$\chi(G|_{T \setminus \{x\}}) \leq 3,$$

хотя и верно, что  $\chi(G|_T) \geq 4$ . Следовательно, степень вершины  $x$  в графе  $G|_T$  (т. е. число ребер из  $E(G|_T)$ , которые имеют  $x$  одним из своих концов) не меньше трех. Отсюда и вытекает неравенство  $|E(G|_T)| \geq \frac{3t}{2}$ .

В итоге мы получаем импликацию  $A_{t,T} \Rightarrow B_{t,T}$ , где

$$B_{t,T} =$$

$$= \left\{ \text{для данного минимального } T, |T| = t, \text{ выполнено } |E(G|_T)| \geq \frac{3t}{2} \right\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} P_{n,p}(A) &\leq \sum_{t=4}^{\tau} \sum_{\substack{T \subset V, |T|=t, \\ T \text{ минимально}}} P_{n,p}(A_{t,T}) \leq \sum_{t=4}^{\tau} \sum_{\substack{T \subset V, |T|=t, \\ T \text{ минимально}}} P_{n,p}(B_{t,T}) \leq \\ &\leq \sum_{t=4}^{\tau} \sum_{\substack{T \subset V, |T|=t, \\ T \text{ минимально}}} C_r^s p^s, \end{aligned}$$

где  $r = C_t^2$ ,  $s = \left\lceil \frac{3t}{2} \right\rceil$  (обрамление  $\lceil \cdot \rceil$  обозначает верхнюю целую часть, т. е. минимальное целое число, не меньшее данного). Последняя двойная сумма не превышает величины

$$\sum_{t=4}^{\tau} C_n^t C_r^s P^s.$$

Применим неравенство  $C_a^b \leq \left(\frac{ae}{b}\right)^b$ , где  $e = 2,71828\dots$  — основание натурального логарифма. Оно доказывается по индукции, и мы на этом не останавливаемся. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=4}^{\tau} C_n^t C_r^s P^s &\leq \sum_{t=4}^{\tau} \left(\frac{ne}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{re}{s}\right)^s \cdot P^s \leq \sum_{t=4}^{\tau} \left(\frac{ne}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{t^2 e}{2 \cdot 3t/2}\right)^{3t/2+1} \cdot n^{-\alpha 3t/2} = \\ &= \sum_{t=4}^{\tau} \left(\frac{ne}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{te}{3}\right)^{3/2} \cdot n^{-3\alpha/2} \right)^t \cdot \frac{te}{3} \leq \sum_{t=4}^{\tau} t(3 \cdot n \cdot \sqrt{t} \cdot n^{-3\alpha/2})^t \leq \\ &\leq \sum_{t=4}^{\tau} t(3 \cdot n \cdot \sqrt{t} \cdot n^{-3\alpha/2})^t \leq \sum_{t=4}^{\tau} t(3 \cdot n \cdot \sqrt{\ln n} \cdot n^{-3\alpha/2})^t \leq \\ &\leq \sum_{t=4}^{\tau} t(3n^{5/4-3\alpha/2} \sqrt{\ln n})^t. \end{aligned}$$

Вспоминаем, что  $\alpha > \frac{5}{6}$ . Значит,  $\frac{5}{4} - \frac{3\alpha}{2} = -\beta < 0$ . Иными словами,

$$\begin{aligned} \sum_{t=4}^{\tau} t(3n^{5/4-3\alpha/2} \sqrt{\ln n})^t &= \sum_{t=4}^{\tau} t(3n^{-\beta} \sqrt{\ln n})^t = \\ &= \sum_{t=4}^{\lfloor \ln n \rfloor} t(3n^{-\beta} \sqrt{\ln n})^t + \sum_{t=\lfloor \ln n \rfloor+1}^{\tau} t(3n^{-\beta} \sqrt{\ln n})^t \leq \\ &\leq \lfloor \ln n \rfloor \cdot \lfloor \ln n \rfloor \cdot (3n^{-\beta} \sqrt{\ln n})^4 + n \cdot n \cdot (3n^{-\beta} \sqrt{\ln n})^{\lfloor \ln n \rfloor} < \frac{1}{\ln n}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство при больших  $n$  выполнено с колоссальным запасом, и лемма доказана.

### 2.6.5. Нижняя оценка в теореме 17

Для доказательства теоремы 17 достаточно обосновать два следующих утверждения.

1) Существует такая функция  $\varphi_1 = \varphi_1(n) = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$ , что

$$P_{n,1/2}\left(\chi(G) \geq \frac{n}{2\log_2 n} - \varphi_1(n)\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty;$$



2) Существует такая функция  $\varphi_2 = \varphi_2(n) = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$ , что

$$P_{n,1/2}\left(\chi(G) \leq \frac{n}{2\log_2 n} + \varphi_2(n)\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

В этом пункте мы докажем утверждение 1. С этой целью мы установим асимптотику

$$P_{n,1/2}(\alpha(G) \leq [2\log_2 n] - 1) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Почему? Да потому, что, как мы знаем (см. п. 2.6.1),  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ , и, стало быть, обещанная асимптотика мгновенно влечет нужный результат.

Положим  $k = [2\log_2 n]$  и рассмотрим случайную величину  $X_k$ , которая для данного графа  $G$  равна числу независимых множеств мощности  $k$  в нем. Тогда

$$P_{n,1/2}(\alpha(G) \leq [2\log_2 n] - 1) = P_{n,1/2}(X_k = 0).$$

Ввиду неравенства Маркова последняя вероятность не меньше, чем  $1 - MX_k$ , так что для завершения рассуждения остается лишь убедиться в том, что  $MX_k \rightarrow 0$ .

Воспользуемся линейностью математического ожидания:

$$MX_k = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^{C_k^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^{C_k^2} &\leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}} \leq \frac{n^{2\log_2 n}}{k!} \cdot 2^{-(2\log_2 n - 1)^2/2 + \log_2 n} = \\ &= \frac{1}{k!} \cdot 2^{2\log_2^2 n - 2\log_2^2 n + 3\log_2 n - 1/2} = \frac{1}{k!} \cdot 2^{3\log_2 n - 1/2} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k \cdot 2^{3\log_2 n}, \end{aligned}$$

поскольку  $k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k$  (доказывается по индукции). Продолжаем выкладку:

$$MX_k \leq 2^{3\log_2 n + k\log_2 e - k\log_2 k} \leq 2^{3\log_2 n + 2(\log_2 e)\log_2 n - [2\log_2 n]\log_2 [2\log_2 n]}.$$

Видно, что вычитаемое в показателе последней экспоненты растет значительно быстрее уменьшаемого. Следовательно,  $MX_k \rightarrow 0$ , и первое утверждение доказано.

### 2.6.6. Верхняя оценка в теореме 17: план действий

Ниже мы «почти» докажем второе утверждение. Не хватит лишь некоторых чисто технических деталей, связанных с чересчур громоздкими вычислениями.

Сперва в самых общих чертах поймем, чего нам будет достаточно для доказательства. Потом все это аккуратно конкретизируем.

Заметим, что для специалиста в области случайных графов нижняя оценка из предыдущего пункта — тривиальное упражнение. То, о чем мы будем говорить дальше, на несколько порядков сложнее. Именно в том и состояла заслуга Боллобаша, что он придумал всю кухню, о которой мы здесь расскажем.

### 2.6.7. Верхняя оценка в теореме 17: идея доказательства

Предположим, что существуют целочисленные функции  $k = k(n) \sim 2 \log_2 n$  и  $m = m(n) = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$ , с которыми  $P_{n,1/2}(A) \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ , коль скоро

$$A = \{\forall S \subset V, |S| = m, \text{ выполнено } \alpha(G|_S) \geq k\}.$$

Тогда возьмем любой граф  $G$  из  $A$ . За счет свойства  $A$  в нем есть независимое множество  $K_1$  размера  $k$  (ведь  $n > m$ ). Покрасим все вершины из  $K_1$  в цвет 1. Удалим  $K_1$  из  $V$ . Если все еще  $n - k \geq m$ , то снова за счет свойства  $A$  найдем независимое множество  $K_2 \subseteq V \setminus K_1$ , элементы которого покрасим в цвет 2. Действуем так до тех пор, пока после удаления очередного независимого множества  $K_l$  не останется меньше  $m$  вершин. Очевидно,

$$l \leq \left\lceil \frac{n-m}{k} \right\rceil \sim \frac{n}{2 \log_2 n}.$$

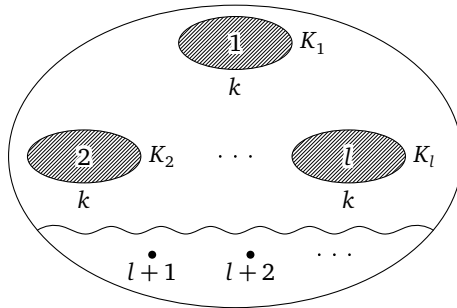


Рис. 4

По окончании процедуры каждую из недокрашенных вершин покрашим в отдельный цвет с номером  $l + 1, l + 2, \dots$ . Всего получится не больше, нежели

$$l + m \sim \frac{n}{2 \log_2 n}$$

цветов (см. рис. 4). Это значит, что

$$P_{n,1/2}(\chi(G) \leq l + m) \geq P_{n,1/2}(A) \rightarrow 1,$$

и верхняя оценка в теореме 17 доказана.

**2.6.8. Верхняя оценка в теореме 17:  
выбор параметров и оценка вероятности**

Во-первых, положим  $m = \left\lceil \frac{n}{\log_2^2 n} \right\rceil$ . Далее, можно показать, что существует  $k \sim 2 \log_2 m \sim 2 \log_2 n$ , с которым

$$C_m^k 2^{-C_k^2} > m^4.$$

Соответствующая выкладка крайне похожа на выкладку из пункта 2.6.5, и мы ее не проводим, предоставляя ее добросовестному читателю в качестве упражнения.

Хочется теперь убедиться в том, что с выбранными  $m$  и  $k$  выполнено соотношение  $P_{n,1/2}(A) \rightarrow 1$ . Мы проверим, что, напротив,  $P_{n,1/2}(\bar{A}) \rightarrow 0$ . Запишем

$$\bar{A} = \{ \exists S \subset V, |S| = m, \text{ выполнено } \alpha(G|_S) < k \} = \bigcup_{S \subset V, |S|=m} A_S,$$

где

$$A_S = \{ \text{для данного множества } S, |S| = m, \text{ выполнено } \alpha(G|_S) < k \}.$$

Очевидно, величина  $P_{n,1/2}(A_S)$  не зависит от  $S$ . Таким образом,

$$P_{n,1/2}(\bar{A}) \leq \sum_{S \subset V, |S|=m} P_{n,1/2}(A_S) = C_n^m P_{n,1/2}(\alpha(G) < k).$$

Пусть  $Y_k$  — это случайная величина на  $G(m, 1/2)$ , равная максимальному количеству независимых множеств мощности  $k$  в случайном графе, любые два из которых имеют не более одной общей вершины:

$$Y_k(G) = \max \{ |\mathcal{K}| : \mathcal{K} = \{K_1, \dots\}, K_i \text{ — независимое множество в } G \text{ и } |K_i \cap K_j| \leq 1 \}.$$

Тогда

$$P_{m,1/2}(\alpha(G) < k) = P_{m,1/2}(Y_k = 0).$$

Заметим, что  $Y_k$  липшицева по ребрам (см. п. 2.6.2), чего нельзя сказать, например, про  $X_k$  (см. п. 2.6.5). Именно последнее обстоятельство поспособствовало тому, что событие  $\{\alpha(G) < k\}$  мы заметили «странным» событием  $\{Y_k = 0\}$ , а не вполне, казалось бы, естественным  $\{X_k = 0\}$ . Позже мы вернемся к этим тонкостям и прокомментируем их. А пока продолжим доказательство.

Раз  $Y_k$  липшицева, применим неравенство Азумы. Имеем

$$\begin{aligned} P_{m,1/2}(Y_k = 0) &= P_{m,1/2}(Y_k \leq 0) = \\ &= P_{m,1/2}(-Y_k \geq 0) = P_{m,1/2}(MY_k - Y_k \geq MY_k) \leq e^{-\frac{(MY_k)^2}{2c_m^2}}. \end{aligned}$$

Справедлива

**Лемма 2.** *Выполнено неравенство*

$$MY_k \geq \frac{m^2}{2k^4} \psi(m),$$

где  $\psi(m) \rightarrow 1$ .

Лемму мы докажем в следующем пункте, а пока применим ее:

$$C_n^m P_{m,1/2}(\alpha(G) < k) < 2^n P_{m,1/2}(Y_k = 0) \leq 2^n e^{-\frac{(MY_k)^2}{2c_m^2}} \leq 2^n e^{-\frac{m^4 \psi^2}{4k^8 m^2}} = 2^n e^{-\frac{m^2 \psi^2}{4k^8}}.$$

Величина, стоящая после знака минус в показателе последней экспоненты, растет гораздо быстрее, нежели  $n$ . Значит, все произведение стремится к нулю, и «по модулю леммы 2» теорема 17 доказана.

Читатель может спросить: а где же мы использовали столь специфический выбор параметров, который мы осуществили в начале этого пункта? Ответ очевиден: он нужен для доказательства леммы 2, и как раз к нему мы теперь переходим.

### 2.6.9. Верхняя оценка в теореме 17: доказательство леммы 2

Нам нужно доказать, что в среднем случайный граф содержит достаточно много «почти непересекающихся» независимых множеств размера  $k$ . Представим себе на минуту, что граф не случаен, а фиксирован. Как бы в нем найти побольше нужных нам объектов? А что, если и их выбирать случайно? Как ни странно, это именно та идея, которая работает.

Пусть для данного графа  $G \in \Omega_m$  совокупность  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{\alpha(G)}\}$  состоит из всех его независимых множеств мощности  $k$ . Если  $G$

считать случайным, то и величина  $x(G)$  случайная; собственно, это и есть  $X_k$ , просто мы ввели более краткое обозначение.

Для данного  $G$  проведем  $x(G)$  испытаний Бернулли с вероятностью успеха  $p'$ , которую мы оптимально выберем позднее. Если в испытании с номером  $i$  произошел успех, то «вытаскиваем» из  $\mathcal{K}$  множество  $K_i$ , иначе — пропускаем. На выходе возникает случайная совокупность  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$  независимых  $k$ -подмножеств в  $G$  (состоящая из вытасканных множеств).

Теперь вспомним, что сам граф  $G$  случаен. Строго говоря, появившаяся «двойную случайность» — графа и совокупности подмножеств в нем — следует описывать путем введения нового вероятностного пространства. В нем элементарные события суть пары  $(G, \mathcal{C}(G))$ , а вероятность каждой пары есть произведение вероятности графа на вероятность совокупности, т. е.

$$P_{m,1/2,p'}((G, \mathcal{C}(G))) = P_{m,1/2}(G)(p')^{|\mathcal{C}(G)|}(1-p')^{x(G)-|\mathcal{C}(G)|}.$$

Нетрудно видеть, что

$$M|\mathcal{C}| = p'M|\mathcal{K}| = p'Mx = p'MX_k = p'C_m^k 2^{-C_k^2}.$$

Здесь важно понимать, что первое математическое ожидание в цепочке определено на новом вероятностном пространстве, тогда как все остальные — на старом, т. е. на  $G(m, 1/2)$ .

Рассмотрим еще два случайных множества. Одно из них будет определено на пространстве  $G(m, 1/2)$ , другое — на новом пространстве. Итак,

$$W = W(G) = \{(K_i, K_j) : K_i, K_j \in \mathcal{K}, 2 \leq |K_i \cap K_j| \leq k-1\},$$

$$W' = W'((G, \mathcal{C}(G))) = \{(K_i, K_j) : K_i, K_j \in \mathcal{C}, 2 \leq |K_i \cap K_j| \leq k-1\}.$$

Иными словами, в обоих случаях речь идет о совокупности (неупорядоченных) пар (различных)  $k$ -вершинных независимых множеств, которые цепляют друг друга слишком сильно — не так, как это происходит при определении величины  $Y_k$ .

Ясно, что  $M|W'| = (p')^2 M|W|$ . Однако поиск величины  $M|W|$  — куда более противное занятие. Нет, в принципе и тут все понятно. Действительно,

$$|W| = \sum_{r=2}^{k-1} |W_r|,$$

где

$$W_r = \{(K_i, K_j) : K_i, K_j \in \mathcal{K}, |K_i \cap K_j| = r\}.$$

За счет линейности математического ожидания (см. рис. 5) имеем

$$M|W| = \sum_{r=2}^{k-1} M|W_r| = \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{k-1} C_m^k C_{m-k}^{k-r} C_k^r 2^{-2C_k^2 + C_r^2}.$$

Вот это-то и ужасно. Пойди запиши такую сумму в сколь-нибудь удобоваримом виде! По счастью, это все-таки возможно. Мы не станем мучить читателя малоинтересными выкладками и лишь приведем ответ. Оказывается,

$$M|W| \sim \frac{(MX_k)^2 k^4}{2m^2}.$$

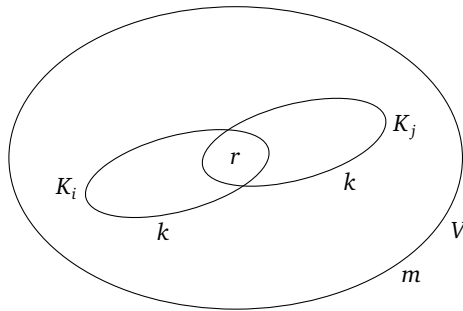


Рис. 5

Пришло время применить ловкость рук. Для данного  $G$  из отвечающей ему совокупности  $\mathcal{C}(G)$  удалим по одному элементу из каждой пары в множестве  $W'$ . Образуется совокупность  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*(G)$ , в которой нет пар множеств, пересекающихся по двум и более элементам. Значит,

$$MY_k \geq M|\mathcal{C}^*| \geq M|\mathcal{C}| - M|W'| = p' MX_k - \frac{(p')^2 (MX_k)^2 k^4 \psi_1(m)}{2m^2},$$

где  $\psi_1(m) \rightarrow 1$ . Положим

$$p' = \frac{m^2}{(MX_k) k^4 \psi_1(m)}.$$

Это, в самом деле, вероятность, так как у нас при больших  $m$

$$MX_k = C_m^k 2^{-C_k^2} > m^4 \Rightarrow 0 < p' < \frac{1}{m^2 k^4 \psi_1(m)} < 1.$$

(Вот оно, где ружье-то выстрелило!) Получаем

$$MY_k \geq \frac{m^2}{k^4 \psi_1(m)} - \frac{m^4 k^4 \psi_1(m)}{2m^2 k^8 \psi_1^2(m)} = \frac{m^2}{2k^4} \psi(m),$$

где  $\psi = \frac{1}{\psi_1}$ . Лемма доказана.

### 2.6.10. Комментарий к лемме 2

Доказательство теоремы 17 проведено практически полностью, дадим теперь различные комментарии к нему. Начнем с комментария к лемме 2.

Дело в том, что более или менее ясно, откуда появилось ее утверждение. А именно, понятно, что для любого графа  $G$  на  $m$  вершинах

$$Y_k(G) \leq c \frac{m^2}{k^2}, \quad c > 0.$$

Это связано с тем, что в каждом независимом множестве, которое фигурирует в определении величины  $Y_k$ , ровно  $C_k^2$  пар элементов (отсутствующих ребер), причем любые два таких множества имеют непесекающиеся совокупности указанных пар (иначе бы они сами пересекались хотя бы по двум элементам). Всего же пар —  $C_m^2$ . Таким образом,  $Y_k(G) \leq C_m^2 / C_k^2$ , откуда и вытекает обещанное неравенство.

Разумеется, приведенное рассуждение влечет оценку

$$MY_k \leq c \frac{m^2}{k^2}, \quad c > 0,$$

и, стало быть, лемма 2 говорит о том, что при известном соотношении между параметрами  $m$  и  $k$  эта оценка почти точна. Зазор лишь в  $k^2 \sim 4 \log_2^2 m$ . С одной стороны, зазор мизерный, но, с другой стороны, это все-таки зазор. Так вот проблема в том, что никто не умеет его устранять. Цепочка неравенств

$$\frac{m^2}{2k^4} \psi(m) \leq MY_k \leq c \frac{m^2}{k^2}, \quad c > 0,$$

стоит незыблемо, и ни нижняя, ни верхняя оценка улучшению не поддаются. Хорошая задачка? Гипотеза такова, что верхняя оценка точна.

Заметим, что лемму 2 мы использовали для получения оценки

$$P_{m,1/2}(Y_k = 0) \leq e^{-\frac{m^2 \psi^2}{4k^8}},$$

и если бы удалось доказать гипотезу, то возникла бы чуть лучшая оценка

$$P_{m,1/2}(Y_k = 0) \leq e^{-\frac{m^2}{ck^4}}.$$

Эта оценка уже установлена за счет других мощных инструментов теории вероятностей (неравенства Талагранна и Янсона, см. [3, 23, 24]); однако вопрос о математическом ожидании, как мы уже говорили, по-прежнему открыт.

### 2.6.11. Чем $Y_k$ лучше $X_k$ , или почему не работает неравенство Чебышёва?

Здесь нам хочется объяснить читателю, почему вместо простой и естественной случайной величины  $X_k$ , которую мы к тому же с успехом использовали в пункте 2.6.5, нам приходится применять несколько замудренную, на первый взгляд, величину  $Y_k$ .

Случилось это все (возникла величина  $Y_k$ ) в пункте 2.6.8. Нам нужно было доказать, что

$$C_n^m P_{m,1/2}(\alpha(G) < k) \rightarrow 0.$$

Мы переписали левую часть неравенства в виде  $C_n^m P_{m,1/2}(Y_k = 0)$ , хотя могли бы написать  $C_n^m P_{m,1/2}(X_k = 0)$ . Что ж, попробуем так и сделать. Как мы заметили еще в п. 2.6.5,  $X_k$  не является липшицевой ни в каком из смыслов. Значит, заведомо неравенство Азумы не применимо. Тогда нам ничего не остается, как прибегнуть к помощи Чебышёва (других средств мы не знаем, не знали и те, кто работал в свое время над задачей). Вот выкладка (ср. п. 2.4.3 и п. 2.6.5):

$$P_{m,1/2}(X_k = 0) = P_{m,1/2}(X_k \leq 0) = P_{m,1/2}(MX_k - X_k \geq MX_k) \leq \frac{DX_k}{(MX_k)^2}.$$

Давайте пойдем, как с ростом  $m$  ведут себя математическое ожидание и дисперсия. Для пущей наглядности продолжим работать с теми  $m$  и  $k$ , которые введены в начале пункта 2.6.8. Ну,  $MX_k > m^4$ , и это, пожалуй, все. А что с дисперсией? По сути, нас интересует второй момент  $MX_k^2$  или даже его факториальный аналог:

$$M_j^2 X_k = \sum_{i \neq j} M(X_{k,i} X_{k,j}), \quad i, j \in \{1, \dots, C_m^k\},$$

где  $X_{k,i}$  — это индикатор свойства « $i$ -е по счету  $k$ -элементное подмножество множества вершин графа независимо». Фактически мы считаем здесь среднее число (упорядоченных) пар различных независимых множеств вершин случайного графа. Ничего не напоминает? Да ведь это почти дословно  $M|W|$  из пункта 2.6.9! Получается, что отношение  $\frac{DX_k}{(MX_k)^2}$  не превосходит функции, обратной некоторому полиному от  $m$ .

В то же время

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n^m}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \geq \frac{n^m}{e(m/2)^m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^m$$



(неравенство  $m! \leq e(m/2)^m$  легко доказать по индукции). Нетрудно убедиться в том, что в последнем выражении доминирующая по скорости роста функция — это

$$\left(\frac{n}{m}\right)^m \geq (\log_2^2 n)^m,$$

и растёт она куда быстрее любого полинома. Значит, при нынешней технологии нам не удастся получить асимптотику

$$C_n^m P_{m,1/2}(\alpha(G) < k) \rightarrow 0,$$

и этим объясняется наше нежелание использовать  $X_k$ .

Конечно, наши рассуждения служат лишь намеком на суть проблемы: в конце концов мы можем менять  $m$  и  $k$ . Однако это не помогает, и только мартингальная техника спасает ситуацию.

Подытожить следует так. Оказывается, существуют  $k_1 \sim 2 \log_2 n$  и  $k_2 \sim 2 \log_2 n$ , которые, как видно, очень близки и с которыми, тем не менее, выполнены два совершенно противоположных результата:

- 1) в случайном графе в модели  $G(n, 1/2)$  почти наверное нет независимых множеств мощности  $k_1$ ;
- 2) в случайном графе в модели  $G(n, 1/2)$  почти наверное каждое множество вершин размера  $m$  содержит независимое подмножество мощности  $k_2$ .

Если бы мы хотели доказать, что почти наверное в случайном графе есть независимое подмножество мощности  $k_2$ , то нам бы хватило неравенства Чебышёва. Нам же потребовалось второе утверждение, и пришлось обратиться к неравенству Азумы и соответствующим изыскам.

### 2.6.12. О функции $u$ в теореме 18

Теорема 18 — самая загадочная в серии теорем о хроматическом числе. Комментируя ее, мы заметили, что интуиция подсказывает малость функции  $u$  из ее формулировки. Сейчас мы покажем, что во всяком случае функция  $u$  может стремиться к бесконечности.

Пусть, например,  $p = n^{-0,9}$ . Покажем, что

$$P_{n,p}(\chi(G) \geq \ln n) \rightarrow 1.$$

Этого заведомо хватит. В свою очередь, для этого достаточно проверить, что (ср. п. 2.6.5)

$$P_{n,p}\left(\alpha(G) \leq \frac{n}{\ln n}\right) \rightarrow 1$$

или что

$$MX_k \rightarrow 0, \quad k = \left[ \frac{n}{\ln n} \right].$$

Итак, при больших  $n$  имеем

$$\begin{aligned} MX_k = C_n^k (1-p)^{C_k^2} &\leq \left( \frac{ne}{k} \right)^k e^{-pC_k^2} \leq (3 \ln n)^k e^{-\frac{pk^2}{4}} \leq \\ &\leq e^{k \ln \ln n + k \ln 3 - n^{1.1}/16 \ln^2 n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

с колоссальным запасом.

## 2.7. О числе независимости и кликовом числе случайного графа

Из пункта 2.6.5 мы знаем, что

$$P_{n,1/2}(\alpha(G) \leq [2 \log_2 n] - 1) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Говоря словами, число независимости случайного графа в модели  $G(n, 1/2)$  почти наверное логарифмически мало. Практически очевидно, что в той же модели в точности такой же результат верен и относительно величины  $\omega(G)$  — кликового числа графа. Значит, для почти всякого графа неравенство  $\chi(G) \geq \omega(G)$  несопоставимо слабее неравенства  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ . Это — по поводу комментария, который мы дали перед теоремой 17 в пункте 2.6.1.

И все-таки бывают графы, у которых  $\chi(G) = \omega(G)$  (хоть их и крайне мало). Простейший пример такого графа — полный граф. Заметим, что полный граф обладает даже более сильным свойством: для любого его индуцированного подграфа  $H$  выполнено  $\chi(H) = \omega(H)$ . Конечно, для полного графа указанный факт тривиален. Гораздо менее тривиален он для произвольного графа. В самом деле, как понять, обладает данный граф описанным свойством или нет?

Графы, у которых кликовое число каждого индуцированного подграфа совпадает с его хроматическим числом, называются *совершенными*. Несмотря на свою сравнительную редкость (с известной нам вероятностной точки зрения), совершенные графы «собираются» в целые классы. Например, любой *двудольный* граф (т. е. граф с хроматическим числом 2) является совершенным. Или, скажем, всякий *интервальный* граф обладает этим свойством (интервальным называется граф, у которого вершины суть отрезки на прямой, а ребра — пары пересекающихся отрезков).

Априори кажется очень трудным придумать какой-либо критерий «совершенства» графа. Правда: походи походи, какой граф совершенный, а какой нет. К. Берж, который ввел сам термин «совершенный граф», высказал в 1963 году сильную гипотезу: граф совершенный тогда и только тогда, когда он не содержит индуцированных циклов нечетной длины  $\geq 5$  и их дополнений (до полного подграфа). На рис. 6 приведен пример графа с индуцированным циклом длины 7 и графа с индуцированным подграфом, который служит дополнением до цикла длины 7.

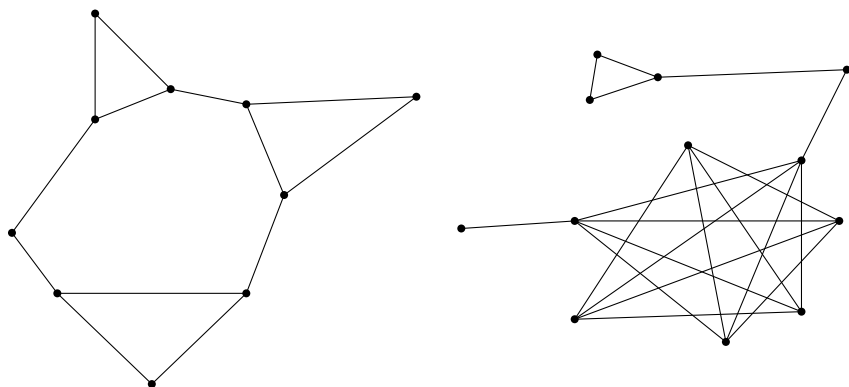


Рис. 6

По-видимому, ясно, откуда возникли циклы и «антициклы» (дополнения до циклов), причем ясно даже, зачем нужно условие «длина цикла больше либо равна пяти». Действительно, у цикла *нечетной* длины  $\geq 5$  хроматическое число равно трем, а кликовое — двум. Поэтому такой цикл заведомо совершенству вредит. То же и с антициклами. Но вот почему отсутствия указанных вредных объектов *достаточно* для совершенства, отнюдь не понятно.

Тем не менее гипотеза Бержа верна. Ее доказали только в 2002 году (а опубликовали в 2006 году). Статья (см. [25]) занимает 179 страниц! Да вот, и такое бывает.

## 2.8. Числа Рамсея

Вероятно, читатель еще не догадывается, к чему идет дело. Да и немудрено: человеку, привыкшему связывать понятие числа Рамсея с утверждением о том, что среди любых шести людей либо трое знакомы друг с другом, либо трое друг друга не знают, невдомек, что

предыдущий параграф был по сути о них — о числах Рамсея. Такие вот удивительные ходы бывают в математике.

Давайте вспомним стандартное определение числа Рамсея. Итак, пусть  $s, t \in \mathbb{N}$ . Назовем *числом Рамсея* величину  $R(s, t)$ , равную минимальному натуральному  $n$ , такому что при любой раскраске ребер графа  $K_n$  в красный и синий цвета либо найдется  $K_s \subseteq K_n$ , у которого все ребра красные, либо найдется  $K_t \subseteq K_n$ , у которого все ребра синие.

Понятно, как числа Рамсея связаны с упомянутым выше утверждением о знакомствах. Это утверждение о том, что  $R(3, 3) \leq 6$ : мы просто соединяем пару людей красным ребром, если эти люди знакомы, и синим ребром, если они друг друга не знают; какова бы ни была раскраска, либо найдется красный, либо отыщется синий треугольник. Нетрудно, кстати, показать, что  $R(3, 3) = 6$ .

Чуть менее понятно, как связаны числа Рамсея с темой предыдущего параграфа. Сейчас мы дадим эквивалентное определение величины  $R(s, t)$ , и все станет ясно. Действительно, можно сказать так:  $R(s, t)$  — это наименьшее натуральное  $n$ , при котором для любого графа  $G$  на  $n$  вершинах либо  $\omega(G) \geq s$ , либо  $\alpha(G) \geq t$ . Мы как бы красим ребра графа  $G$  в красный цвет, а ребра, которых в  $G$  нет, — в синий цвет. Тогда наличие большой красной клики ( $K_s \subseteq K_n$ ) как раз отвечает неравенству  $\omega(G) \geq s$ , а наличие большой синей клики ( $K_t \subseteq K_n$ ) в аккурат соответствует оценке  $\alpha(G) \geq t$ .

Прежде чем вывести из результатов предыдущего параграфа важное свойство чисел Рамсея, расскажем о них немного. Впервые они появились в статье [26] в 1930 году. Там они возникли в связи с одной задачей математической логики. В 1935 году вышла в свет одна из наиболее значимых статей по комбинаторике и комбинаторной геометрии XX века (см. [27]). Ее авторы, П. Эрдёш и Д. Секереш, переоткрыли числа Рамсея и доказали про них существенно более точные утверждения, нежели те, которые установил сам Ф. П. Рамсей в [26]. За прошедшие с тех пор 75 лет наука разрослась до такой степени, что теперь мы говорим о теории Рамсея, и в этой теории лишь небольшой (хотя и весьма почетный) уголок отведен задачам о величинах  $R(s, t)$  и их обобщениях.

Имеется обширная литература по числам Рамсея. Мы процитируем лишь несколько значимых источников: [1, 12, 23, 28–31]. Ниже мы еще поговорим об этих замечательных числах.

Крайне мало известно о точных значениях для  $R(s, t)$ . Легко понять, что  $R(s, t) = R(t, s)$ ,  $R(1, t) = 1$  и  $R(2, t) = t$ . И это почти все. Список остальных найденных величин можно без труда взять, например, на странице [32], и мы его здесь не приводим.

Зато известно, что всегда  $R(s, t) < \infty$ . Более того, Эрдёш и Секереш (см. [12, 27]) установили рекуррентное неравенство

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1),$$

которое мгновенно влечет оценку  $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{t-1}$ . Давайте обсудим эту оценку в случае  $s = t$  (в таком случае  $R(s, s)$  называется *диагональным числом Рамсея*).

Воспользуемся формулой Стирлинга для факториала (см., например, [33]):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Имеем

$$C_{2s-2}^{s-1} = \frac{(2s-2)!}{((s-1)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2s-2)}(2s-2)^{2s-2}e^{2-2s}}{(2\pi(s-1))(s-1)^{2s-2}e^{2-2s}} = \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi(s-1)}}.$$

Таким образом, диагональное число Рамсея растет не быстрее  $4^s$ . Фантастика, но, несмотря на колоссальные усилия, которые были брошены на уточнение указанной оценки, и на многие годы, прошедшие с момента ее появления в печати, воз и ныне практически там. Все, что удалось сделать, — увеличить «знаменатель». Сейчас наилучшая оценка для  $R(s, s)$  выглядит так (см. [34]):

$$R(s, s) \leq \frac{4^s}{e^{\gamma \ln^2 s / \ln \ln s}}.$$

Здесь  $\gamma$  — некоторая положительная константа, и смысл в том, что, какова бы она ни была,

$$e^{\gamma \ln^2 s / \ln \ln s} = o(4^s),$$

т. е. мы вольны написать

$$R(s, s) \leq (4 - \delta(s))^s, \quad \delta(s) \rightarrow 0,$$

но не умеем заменить  $\delta(s)$  какой-либо постоянной  $\delta > 0$ . Р. Грэхем предложил деньги тому, кто первым обоснует оценку  $R(s, s) \leq (4 - \delta)^s$  (пускай даже  $\delta = 10^{-6}$  или  $\delta = 10^{-1000}$ ), но и материальное стимулирование пока не помогло. Соответственно, интересны нижние оценки чисел Рамсея.

Из параграфа 2.7 мы знаем, что у почти всякого графа  $G$  на  $n$  вершинах одновременно  $\alpha(G) < [2 \log_2 n]$  и  $\omega(G) < [2 \log_2 n]$ . Введя обозначение  $s = [2 \log_2 n]$ , немедленно получаем неравенство  $R(s, s) > n$ . Остается выразить  $n$  через  $s$ . Но это совсем легко:

$$s \leq 2 \log_2 n \Rightarrow n \geq 2^{s/2}.$$

Если в пункте 2.6.5 (на который мы и ссылаемся в параграфе 2.7) чуть аккуратнее провести выкладку, то в конечном счете получится неравенство

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{e\sqrt{2}} s 2^{s/2}.$$

Этот результат также принадлежит Эрдёшу и Секерешу (см. [27] и [1, 23, 30]), и он также почти не был улучшен за прошедшие годы. Сейчас рекорд лишь вдвое (!) точнее упомянутой оценки (см. [1, 23, 30]).

В итоге

$$(1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} s 2^{s/2} \leq R(s, s) \leq \frac{4^s}{e^{\gamma \ln^2 s / \ln \ln s}},$$

или, короче,

$$(\sqrt{2} + o(1))^s \leq R(s, s) \leq (4 + o(1))^s.$$

Заметим, что графы, у которых число независимости и кликовое число одновременно не превосходят функции, асимптотически равной  $2 \log_2 n$ , называются *рамсеевскими*. Они играют огромную роль в теории алгоритмов (в вопросах теоретической сложности вычислений).

Заметим также, что отдельный интерес представляет задача о явном конструировании рамсеевских графов (мы лишь доказали их существование с помощью случайного графа). Эта задача крайне далека от своего решения (см. [31])!

## 2.9. Хроматическое число и обхват графа

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что случайные графы интересны не только как комбинаторно-вероятностные объекты, свойства которых мы изучаем, но и как инструменты для доказательства замечательных утверждений в тех областях, которые, на первый взгляд, к случайным графам вовсе отношения не имеют. Сейчас мы докажем еще один результат подобного типа.

Назовем *обхватом* графа  $G$  длину самого короткого простого цикла в нем. Обозначим обхват графа через  $g(G)$ . Обозначение происходит от английского «girth» — «обхват».

Кажется естественным предположить, что чем больше обхват графа, тем меньше его хроматическое число. В самом деле, величина обхвата говорит о разреженности графа, о наличии в множестве его ребер больших дыр. Однако у нас есть уже некоторый опыт работы с аналогичными эффектами: мы ведь знаем, что у *почти всякого* гра-

фа весьма ощутимое хроматическое число ( $\chi(G) \geq \frac{n}{2 \log_2 n}$ ) при полном отсутствии сколь-нибудь значимых клик ( $\omega(G) \leq 2 \log_2 n$ ).

Ну, клики — кликами, их, может, и нет, а вот поверить в отсутствие коротких циклов у графа с большим хроматическим числом все равно тяжело. Одно дело, когда на данных  $k$  вершинах нет каких-то из  $C_k^2 \sim \frac{k^2}{2}$  ребер, и совсем иное дело, если отсутствуют какие-либо из  $k$  ребер потенциального цикла:  $k$  куда меньше, нежели  $\frac{k^2}{2}$ .

Теория случайных графов и тут преподносит нам сюрприз. Следующая теорема принадлежит Эрдёшу.

**Теорема 19.** Для любых  $k, l \in \mathbb{N}$  существует граф  $G$ , у которого  $g(G) > l$  и  $\chi(G) > k$ .

Не правда ли, удивительно?

**Доказательство теоремы 19.** Зафиксируем произвольное вещественное  $\theta \in \left(0, \frac{1}{l}\right)$  и рассмотрим случайный граф в модели  $G(n, p)$ , где  $p = n^{\theta-1}$ . Обозначим через  $Z_l$  случайную величину, равную числу циклов длины не больше  $l$  в случайном графе. Линейность математического ожидания влечет равенство

$$MZ_l = \sum_{i=3}^l C_n^i \frac{(i-1)!}{2} p^i.$$

Здесь  $C_n^i \frac{(i-1)!}{2}$  — количество  $i$ -вершинных циклов в полном графе  $K_n$  (как известно, из  $i$  драгоценных камней можно составить  $\frac{(i-1)!}{2}$  различных ожерелий), и  $i$  меняется не от единицы, а от тройки до  $l$ , поскольку циклов длины 1 и 2 не бывает.

Осуществим оценку:

$$MZ_l \leq \sum_{i=3}^l \frac{n^i}{i!} \cdot \frac{(i-1)!}{2} \cdot p^i < \sum_{i=3}^l (np)^i.$$

Мы знаем, что  $i \leq l$ , а  $\theta < \frac{1}{l}$ . Следовательно,

$$(np)^i \leq n^{l\theta} = o(n).$$

В итоге  $MZ_l = o(n)$ , ведь  $l$  — константа.

За счет неравенства Маркова имеем

$$P_{n,p} \left( Z_l \geq \frac{n}{2} \right) \leq \frac{MZ_l}{n/2} = o(1).$$

Существует такое  $n_1$ , что для всех  $n > n_1$  выполнено

$$P_{n,p}\left(Z_l \geq \frac{n}{2}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow P_{n,p}\left(Z_l < \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Положим

$$t = \left\lceil \frac{3 \ln n}{p} \right\rceil.$$

Снова воспользуемся неравенством Маркова:

$$\begin{aligned} P_{n,p}(\alpha(G) \geq t) &= P_{n,p}(X_t \geq 1) \leq MX_t = C_n^t (1-p)^{C_t^2} \leq n^t e^{-p \frac{t(t-1)}{2}} = \\ &= (ne^{-\frac{p(t-1)}{2}})^t \leq (ne^{-\frac{p(3 \ln n/p - 1)}{2}})^t \leq (ne^{-1.5 \ln n + p/2})^t = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}(1 + o(1))\right)^t = o(1). \end{aligned}$$

Значит, снова есть такое  $n_2$ , что при всех  $n > n_2$  выполнено

$$P_{n,p}(\alpha(G) \geq t) < \frac{1}{2} \Rightarrow P_{n,p}(\alpha(G) < t) > \frac{1}{2}.$$

Выходит, что при  $n > \max\{n_1, n_2\}$

$$P_{n,p}\left(Z_l < \frac{n}{2}, \alpha(G) < t\right) > 0,$$

т. е. существует граф  $G$  на  $n$  вершинах, у которого одновременно меньше чем  $\frac{n}{2}$  циклов длины, не превосходящей  $l$ , и нет независимых множеств размера  $t$ .

Удалим из каждого  $i$ -вершинного цикла ( $i \leq l$ ) в найденном графе  $G$  одну вершину вместе со всеми смежными с ней ребрами. Получится граф  $G'$ , в котором не меньше  $\frac{n}{2}$  вершин, вовсе нет циклов длины, не превосходящей  $l$ , и по-прежнему  $\alpha(G') < t$ . Последний факт говорит о том, что

$$\chi(G') \geq \frac{n/2}{t} \sim \frac{np}{6 \ln n} = \frac{n^\theta}{6 \ln n} \rightarrow \infty.$$

При всех  $n > n_3$  имеем  $\chi(G') > k$ , т. е. при всех  $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$  имеем  $g(G') > l$  и  $\chi(G') > k$ . Теорема доказана.  $\square$

## 2.10. Законы нуля или единицы

В классической теории вероятностей есть так называемые законы нуля или единицы. О них есть изрядная литература (см., например, [6]), но то, о чем речь пойдет ниже, практически никакого отношения



к ним не имеет. Законы нуля или единицы для случайных графов — это особый раздел теории, который, на наш взгляд, едва ли не самый красивый и удивительный во всей этой науке. Для того чтобы их сформулировать, нам нужно будет понять, что такое логический язык первого порядка для описания свойств графов.

### 2.10.1. Язык первого порядка для графов

В этом пункте мы не собираемся делать экскурс в логику. Нам достаточно будет объяснить лишь тот аспект науки о «высказываниях», который касается графов и их свойств. Поэтому читателя, который пожелает глубже разобраться с логическими основами того, о чем мы будем говорить, мы отсылаем к книгам [35, 36].

Допустим, хочется нам как-нибудь формально записать свойство «граф содержит треугольник». Можно воспользоваться кванторами и символом  $\sim$ , который в данном контексте обозначает не асимптотическое равенство, но смежность двух вершин в графе (наличие ребра между ними):

$$\exists x \exists y \exists z (x \sim y) \cap (x \sim z) \cap (y \sim z).$$

Здесь символом « $\cap$ » мы обозначили логическое «и», т. е. конъюнкцию. Аналогично, через  $\cup$  можно обозначать дизъюнкцию («или»). В итоге с помощью кванторов существования и всеобщности, конъюнкций, дизъюнкций, импликаций ( $\implies$ ), отрицаний, значка « $\sim$ » и просто « $=$ », а также с помощью букв, обозначающих вершины графа, можно построить массу конечных «фраз», каждая из которых будет выражать некоторое свойство графа. Например, свойство «граф не имеет изолированных вершин» или свойство «в графе нет циклов длины не больше трех» выразимы на описанном языке. Именно этот язык и называется языком первого порядка для графов.

Разумеется, не составляет труда придумать свойства, которые на языке первого порядка не записать. Например, таково свойство связности или свойство «хроматическое число графа не превосходит половины от числа его вершин»: конечной фразой эти свойства не представить. И все-таки мир свойств, изложимых на языке первого порядка, весьма богат. Оказывается, он подчиняется исключительно красивым законам.

### 2.10.2. Формулировки результатов

**Теорема 20.** Если  $p = p(n)$  — такая функция, что  $pn^\alpha \rightarrow \infty$  и  $(1-p)n^\alpha \rightarrow \infty$  для любого  $\alpha > 0$ , а  $A$  — произвольное свойство графа, которое можно выразить на языке первого порядка, то либо почти

наверное свойство  $A$  выполнено, либо почти наверное оно не имеет места. Иными словами, либо  $P_{n,p}(A) \rightarrow 1$ , либо  $P_{n,p}(A) \rightarrow 0$ .

Это и есть закон нуля или единицы. Фактически, это закон, которому подчиняется вероятность ребра  $p$ . Оказывается, что если  $p$  — это константа или функция, которая не слишком быстро стремится к нулю (подходит  $\frac{1}{\ln n}$ , но не подходит  $\frac{1}{\frac{1}{10000}\sqrt{n}}$ ) либо к единице, то любое свойство первого порядка для случайного графа имеет асимптотическую вероятность 0 или 1. Промежуточные варианты невозможны!

Теорему 20 доказали Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиюгоньский и В. А. Таланов в 1969 году, а переоткрыл ее Р. Фагин в 1976 году. Еще более впечатляющий результат получили С. Шеллах и Дж. Спенсер в 1988 году.

**Теорема 21.** Если  $p = n^{-\alpha}$ , где  $\alpha > 0$  — иррациональное число, а  $A$  — произвольное свойство графа, которое можно выразить на языке первого порядка, то либо почти наверное свойство  $A$  выполнено, либо почти наверное оно не имеет места. Иными словами, либо  $P_{n,p}(A) \rightarrow 1$ , либо  $P_{n,p}(A) \rightarrow 0$ .

На первый взгляд, теорема 21 кажется чем-то совсем запредельным. Но, может быть, иррациональность  $\alpha$  не по делу? Тогда пафоса сразу становится куда как меньше. А вот и нет! Иррациональность нужна, и без нее теорема перестает работать. Действительно, рассмотрим свойство  $A$  — «граф содержит треугольник» и возьмем  $\alpha = 1$ . По теореме 11 с  $c = 1$  имеем

$$P_{n,p}(A) \sim 1 - e^{-1/6} \notin \{0, 1\}.$$

Ни нуля, ни единицы. Нет закона.

Теорему 21, ввиду ее сравнительной сложности, мы доказывать не будем. Что же до теоремы 20, то мы приведем схему ее доказательства. В основе этого доказательства лежит игра, предложенная А. Эренфойхтом в 1960 году. Об этой игре мы расскажем в следующем пункте.

### 2.10.3. Игра Эренфойхта

Даны два графа —  $G = (V, E)$  и  $H = (W, F)$ . И есть два игрока — Новатор и Консерватор. В игре  $k$  раундов. В каждом раунде Новатор и Консерватор делают по одному ходу. Сперва Новатор выбирает любой из двух графов и вершину в нем. Затем Консерватор обращается ко второму графу (тому, который «отверг» Новатор) и вытаскивает вершину из него. Например, пусть на шаге с номером  $i$  Новатор

предпочел граф  $G$  и взял вершину  $x_i \in V$ . Тогда Консерватору ничего не остается делать, как вытащить некоторую вершину  $y_i \in W$ . После окончания игры образуются два множества вершин —  $x_1, \dots, x_k \in V$  и  $y_1, \dots, y_k \in W$ . При этом часть вершин из первого множества и часть вершин из второго обязаны своим появлением Новатору; остальные возникли благодаря Консерватору. Консерватор выигрывает, если индуцированные подграфы

$$G|_{\{x_1, \dots, x_k\}}, \quad H|_{\{y_1, \dots, y_k\}}$$

изоморфны, т. е. для любых  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  выполнено  $(x_i, x_j) \in E$  тогда и только тогда, когда  $(y_i, y_j) \in F$ .

Смысл в том, что Новатор всякий раз смело переходит к новому графу, а Консерватор старается так скопировать его действия, чтобы на выходе получились одинаковые по сути структуры.

Для краткости обозначим описанную игру  $\text{EHR}(G, H, k)$  в честь Эренфойхта, чье имя в оригинале пишется *Ehrenfeucht* (см. [35]).

Сейчас мы без доказательства приведем теорему, которая позволяет перейти от логики и языков первого порядка к играм на случайных графах. Прежде аккуратно опишем объекты, с которыми будем иметь дело.

Скажем, что Консерватор побеждает в игре  $\text{EHR}(G, H, k)$ , если существует выигрышная стратегия, применив которую, Консерватор добьется победы. Пусть даны два пространства случайных графов —  $G(n, p(n))$  и  $G(m, p(m))$ . Здесь множества вершин случайных графов —  $V$  (мощности  $n$ ) и  $W$  (мощности  $m$ ) — не пересекаются, а функция  $p$  в обоих случаях одна и та же, только аргументы у нее  $n$  и  $m$  соответственно. Для любых двух графов  $G$  (из  $G(n, p(n))$ ) и  $H$  (из  $G(m, p(m))$ ) определим вероятность пары  $(G, H)$  как величину

$$P_{n,m,p}((G, H)) = P_{n,p(n)}(G) \cdot P_{m,p(m)}(H).$$

Вероятность произвольного события есть, как обычно, сумма вероятностей его элементов. Например, понятно, как устроена величина

$$P(n, m, k) =$$

$$= P_{n,m,p}(\{(G, H) : \text{Консерватор побеждает в игре } \text{EHR}(G, H, k)\}).$$

Нужное нам утверждение — это

**Теорема 22.** *Функция  $p$  подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда для любого  $k$*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} P(n, m, k) = 1.$$

Идею доказательства теоремы 22 можно найти в книге [23], а также в популярной статье [37].

В следующем пункте мы опишем выигрышную стратегию для Консерватора, оценим вероятность из теоремы 22 и завершим тем самым доказательство теоремы 20.

#### 2.10.4. Выигрышная стратегия для Консерватора

Скажем, что граф  $G = (V, E)$  обладает свойством полного расширения уровня  $k$ , если для любых  $a, b$ , удовлетворяющих условию  $a + b \leq k$ , и для любых различных вершин  $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b \in V$  найдется вершина  $x \in V$ , для которой  $(x, u_i) \in E$  и  $(x, v_i) \notin E$  при всех  $i$ .

Если  $G$  и  $H$  обладают свойством полного расширения уровня  $k$ , то выигрышная стратегия для Консерватора в игре  $\text{EHR}(G, H, k)$  почти тривиальна. В самом деле, пусть к моменту времени  $i \leq k$  уже выбраны вершины  $x_1, \dots, x_{i-1}$  из  $G$  и  $y_1, \dots, y_{i-1}$  из  $H$ . На  $i$ -м шаге Новатор берет (например)  $x_i$  в  $G$ . Консерватор просто смотрит на связи между вершинами  $x_1, \dots, x_i$  и выбирает такую вершину  $y_i$  из  $H$ , которая сохраняет те же связи на множестве вершин  $y_1, \dots, y_i$ . Он может это сделать по причине свойства полного расширения.

Таким образом, если окажется, что почти на верное случайный граф обладает свойством полного расширения любого наперед заданного уровня  $k$ , то и асимптотика  $P(n, m, k) \rightarrow 1$  будет у нас в кармане.

Что ж, давайте докажем нужное утверждение. Обозначим через

$$A_{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, x}$$

событие, состоящее в том, что в случайном графе вершина  $x$  смежна с каждой вершиной  $u_i$  и не смежна ни с одной из вершин  $v_i$ . Вершины  $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, x$  фиксированы. Очевидно,

$$P_{n,p}(A_{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, x}) = p^a(1-p)^b.$$

Далее,

$$P_{n,p}(\overline{\bigcap_{x \notin \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\}} A_{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, x}}) = (1 - p^a(1-p)^b)^{n-a-b}.$$

Наконец,

$$P_{n,p}(\cup_{a,b: a+b \leq k} \bigcup_{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b} \bigcap_{x \notin \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\}} \overline{A_{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, x}}) \leq k^2 n^k (1 - \varepsilon^k)^{n-k}, \quad \varepsilon = \min\{p, 1-p\}.$$

Длиннющее событие, стоящее под знаком последней вероятности, представляет собой отрицание свойства полного расширения: существуют  $a$  и  $b$ , удовлетворяющие неравенству  $a + b \leq k$ , и существуют

такие вершины  $u_1, \dots, v_b$ , что для любой другой вершины  $x$  либо нарушена хотя бы одна из связей  $x \sim u_i$ , либо присутствует хотя бы одна из связей  $x \sim v_i$ . Все, что нам нужно теперь, это убедиться в стремлении к нулю вероятности данного события. Итак,

$$k^2 n^k (1 - \varepsilon^k)^{n-k} \leq k^2 n^k e^{-\varepsilon^k(n-k)}.$$

Понятно, что сомножитель  $k^2$  и вычитаемое  $k$  в показателе экспоненты на асимптотику не влияют, поскольку  $k$  — константа (хотя и сколь угодно большая). Кроме того,

$$\varepsilon n^{1/(2k)} \rightarrow \infty,$$

каково бы ни было  $k$ , за счет условия теоремы. Значит, при больших  $n$

$$\varepsilon^k n = (\varepsilon n^{1/(2k)})^k \cdot \sqrt{n},$$

т. е.

$$e^{-\varepsilon^k n} < e^{-\sqrt{n}}.$$

Ясно, что

$$n^k e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

и теорема доказана.

## 2.11. Еще ряд сюжетов

Задач о случайных графах — великое множество. Как мы уже говорили, мы не стремимся здесь к сколь-нибудь исчерпывающему изложению теории, но лишь повествуем о наиболее ярких и любопытных, с нашей точки зрения, сюжетах. Скажем несколько слов еще о ряде исследовательских направлений. Доказательств мы приводить не будем, лишь дадим небольшие обзоры.

### 2.11.1. Деревья в случайных графах

Напомним, что *дерево* — это связный граф без циклов. По-другому, дерево — это связный граф, у которого при данном количестве вершин наименьшее число ребер:  $n - 1$  ребро на  $n$  вершинах. Изучают, например, распределение случайной величины  $T_k$ , равной количеству компонент, каждая из которых образует  $k$ -вершинное дерево в случайном графе. Сформулируем результат, который верен для любого постоянного  $k \geq 2$ .

**Теорема 23.** *Имеют место следующие ситуации:*

- 1) если  $p = o(n^{-k/(k-1)})$ , то почти наверное  $T_k = 0$ ;

- 2) если  $p \sim cn^{-k/(k-1)}$ , то  $T_k$  имеет асимптотически пуассоновское распределение с параметром  $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$ ;
- 3) если  $pn^{k/(k-1)} \rightarrow \infty$  и  $pkp - \ln n - (k-1) \ln \ln n \rightarrow -\infty$ , то почти наверное  $T_k \geq 1$ ;
- 4) если  $pkp - \ln n - (k-1) \ln \ln n \sim x$ , то  $T_k$  имеет асимптотически пуассоновское распределение с параметром  $\lambda = \frac{e^{-x}}{k \cdot k!}$ ;
- 5) если  $pkp - \ln n - (k-1) \ln \ln n \rightarrow \infty$ , то почти наверное  $T_k = 0$ .

Происхождение теоремы интуитивно ясно. Когда вероятность  $p$  совсем маленькая (первая ситуация), ребра просто «почти» не собираются в деревья: вероятность появления дерева слишком мала; когда величина  $p$  становится побольше, деревья возникают, но не сверхчасто; еще чуть больше  $p$ , и деревьев почти наверное полно... Так что же случается, когда  $p$  дальше возрастает? Почему происходит обратное затухание? А дело в том, что деревьев-то огромное количество, но начинает уменьшаться вероятность того, что они образуют компоненты: мы же знаем, что при  $p \gg \frac{\ln n}{n}$  случайный граф и во все почти наверное связан; откуда же в нём взяться компонентам-деревьям?

Формальное доказательство теоремы весьма похоже на доказательство теорем 10–12. Его можно найти в книге [1], но можно и воспроизвести его своими силами. Для ситуации 1 достаточно убедиться в стремлении к нулю величины  $MT_k$ ; для ситуации 2 потребуются отыскание асимптотик для факториальных моментов; для ситуации 3 хватит неравенства Чебышёва; для ситуации 4 снова придется использовать метод моментов; для ситуации 5 нужно сослаться на теорему 13, а для непокрытых этой теоремой случаев опять сапеллировать к тому факту, что  $MT_k \rightarrow 0$ . При этом полезно иметь в виду, что различных деревьев на  $k$  вершинах  $k^{k-2}$ . Это классическая формула Кэли (см. [16]).

Существует не только пуассоновская, но и нормальная аппроксимация для  $T_k$  (ср. § 1.10). Ее получил А. Д. Барбур в 1982 году (см. [38]).

**Теорема 24.** Пусть  $k \geq 2$  и  $c > 0$  — фиксированные числа. Пусть также  $p \sim \frac{c}{n}$ . Положим

$$\lambda_k = nk^{k-2}c^{k-1} \frac{e^{-ck}}{k!}, \quad \sigma_k^2 = \lambda_k \left( 1 + \frac{(c-1)(ck)^{k-1}e^{-ck}}{k!} \right),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Тогда

$$\sup_x \left| P_{n,p} \left( \frac{T_k - \lambda_k}{\sigma_k} \leq x \right) - \Phi(x) \right| = O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Следующий по сложности после дерева связный граф — это граф *унициклический*: у него на  $k$  вершинах  $k$  ребер (т. е. в нем ровно один цикл). Справедлива

**Теорема 25.** Пусть  $p = \frac{c}{n}$ ,  $c < 1$ . Тогда почти наверное все компоненты случайного графа суть либо деревья, либо унициклические графы.

Теорема 25 доказывается с помощью неравенства Чебышёва (см. [1]). Она любопытна еще и тем, что проливает дополнительный свет на теорему 16. Оказывается, при  $p = \frac{c}{n}$ ,  $c < 1$ , все компоненты не только «феодално-раздробленные» (логарифмически маленькие), но они к тому же крайне просто устроены — не сложнее графа с одним циклом. При фазовом переходе (т. е. при скачке функции  $p$  через границу  $\frac{1}{n}$ ) картина разительно меняется.

### 2.11.2. Еще несколько слов о хроматическом числе случайного графа

Сейчас мы готовы дать еще один симпатичный комментарий к теореме 18. Действительно, в конце предыдущего пункта мы узнали, что при  $p = \frac{c}{n}$ ,  $c < 1$ , почти наверное все компоненты случайного графа суть деревья или графы с одним циклом. Очевидно, стало быть, что при таких  $p$  почти наверное хроматическое число не превосходит тройки. Иными словами, в ситуациях, когда  $p = n^{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 1$ , теорема 18 становится тривиальной: концентрация хроматического числа в трех значениях и так есть. Более того, при  $\alpha > 1$  случайный граф — это почти наверное лес (достаточно убедиться в том, что математическое ожидание числа циклов стремится к нулю), т. е. его хроматическое число не превосходит двойки, а при  $\alpha > 2$  в случайном графе и вовсе почти наверное нет ребер, так что он красится в один цвет. В итоге получается, что лишь при  $\frac{5}{6} < \alpha < 1$  вся кухня из теоремы 18 становится существенной. Именно тогда хроматическое число может расти с ростом числа вершин графа (ср. п. 2.6.12), оставаясь при этом крайне плотно сконцентрированным. И именно тогда теорема 18 настоящему удивительна.

### 2.11.3. Планарность случайного графа

Напомним, что граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости без пересечения ребер не по вершинам. Например, граф  $K_4$  планарен (см. рис. 7), а граф  $K_5$  планарным не является. Вообще, хорошо известен критерий планарности графа, доказанный К. Куратовским в 1932 году (см. [13]): граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве подграфа гомеоморфной копии графа  $K_5$  или графа  $K_{3,3}$ . Здесь  $K_{3,3}$  — это двудольный граф с долями размера 3 (см. рис. 8), и два графа называются *гомеоморфными* друг другу, если один из другого может быть получен добавлением вершин на ребрах (см. пример на рис. 9).

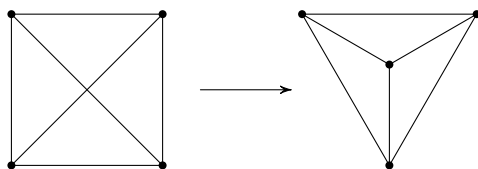


Рис. 7

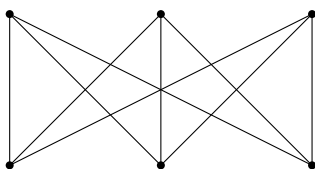


Рис. 8

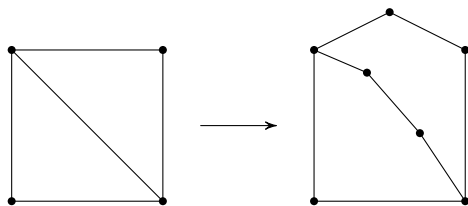


Рис. 9

Понятие планарности сыграло колоссальную роль в становлении теории графов и топологии. Фактически даже великая проблема четырех красок (см. [13]) — это утверждение о том, что хроматическое число любого планарного графа не превосходит четырех.



Если бы в критерии Куратовского не было гомеоморфизма и для планарности хватало бы просто отсутствия в графе подграфов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ , то задача о планарности случайного графа стала бы почти тривиальной. Нужное нам свойство можно было бы записать на языке первого порядка, да и без подобных изысков все было бы крайне просто. Однако гомеоморфизмы портят жизнь. Несмотря на это, имеется следующая теорема.

**Теорема 26.** Пусть  $p = \frac{c}{n}$ . Тогда при  $c < 1$  почти наверное случайный граф планарен, а при  $c > 1$  почти наверное планарности нет.

Случай  $c < 1$  мгновенно вытекает из теоремы 25, поскольку деревья и унициклические графы, конечно, планарны. Случай  $c > 1$  сложнее. Чуть более слабое утверждение нетрудно вывести из того факта, что у всякого планарного графа на  $n$  вершинах не более  $3n - 6$  ребер. Подумайте над этим!

Интересно, кстати, каким значимым оказывается порог  $\frac{1}{n}$ . Вот и для планарности именно на нем происходит фазовый переход.

#### 2.11.4. Степени вершин случайного графа

Имеется огромная и очень важная наука о распределении степеней вершин (*степень вершины* — это количество смежных с ней ребер) случайного графа. Значимость этой науки мы еще продемонстрируем как в следующем пункте, так и в четвертой главе этой книги. Сейчас скажем лишь несколько слов об известных результатах.

Прежде всего понятно, что для любой вершины  $v$  случайного графа в модели  $G(n, p)$  случайная величина  $\deg v$ , как раз обозначающая степень  $v$ , имеет биномиальное распределение  $\text{Binom}(n - 1, p)$ .

Более интересным является изучение последовательности степеней вершин случайного графа, упорядоченных по невозрастанию величины:  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ . Массу результатов о величинах  $d_i$  можно найти в книге [1]. Мы же упомянем лишь один из них, так как именно он пригодится нам в следующем пункте.

**Теорема 27.** Пусть  $p = \frac{1}{2}$ . Тогда почти наверное для всех  $i \leq \lfloor 3 \log_2 n \rfloor$  выполнено

$$d_i - d_{i+1} \geq 3.$$

Теорема говорит о том, что у почти всякого графа зазоры между соседними величинами  $d_i$  при довольно многих  $i$  достаточно велики. Эта теорема допускает разнообразные обобщения, но мы о них писать не станем.

### 2.11.5. Изоморфизм случайных графов

Одной из наиболее глубоких проблем комбинаторики и теории алгоритмов является *проблема изоморфизма* графов. Пусть даны два графа с одинаковым числом вершин  $n$ . Спрашивается: существует ли алгоритм, работающий за полиномиальное по  $n$  время и говорящий на выходе, изоморфны данные графы или нет? Эта проблема до сих пор крайне далека от своего решения. Известны лишь классы графов, внутри которых нужный алгоритм найден. Например (см. [39–43]), таковы все деревья, все планарные графы, все интервальные графы, все графы, у которых степени вершин ограничены общей константой...

В 1980 году Л. Бабаи, Эрдёш и С. Селков доказали следующую теорему.

**Теорема 28.** Пусть  $p = \frac{1}{2}$ . Тогда для каждого  $n$  существует такое множество графов  $\mathcal{X}_n$ , что  $P_{n,1/2}(\mathcal{X}_n) \rightarrow 1$ , и такой алгоритм  $A$ , что для любых двух графов  $G, H \in \mathcal{X}_n$  за  $O(n^2)$  операций  $A$  дает ответ на вопрос об изоморфизме  $G$  и  $H$ .

Более выигрышно звучит такой укороченный вариант формулировки: существует квадратичный по сложности алгоритм, который решает проблему изоморфизма для почти всякой пары графов.

Опишем этот алгоритм. Для этого сперва построим  $\mathcal{X}_n$ . Возьмем произвольный граф  $G \in \Omega_n$ . Упорядочим вершины графа  $G$  по величине их степени: вершину степени  $d_i$  (см. предыдущий пункт) обозначим  $x_i$ . Посмотрим на первые  $m = \lceil 3 \log_2 n \rceil$  вершин. Если хотя бы для одного  $i$  в указанном диапазоне  $d_i - d_{i+1} \leq 2$ , то говорим, что  $G \notin \mathcal{X}_n$  (ср. теорему 27). Иначе полагаем  $a(i, j) = 1$ , коль скоро  $x_i \sim x_j$  или  $i = j$ , и  $a(i, j) = 0$  в противном случае, после чего вычисляем

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^m a(i, j) 2^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если найдутся  $i, j$ , для которых  $f(x_i) = f(x_j)$ , то говорим, что  $G \notin \mathcal{X}_n$ . Все, с  $\mathcal{X}_n$  разобрались. Очевидно, для данных двух графов  $G, H \in \Omega_n$  проверка их принадлежности множеству  $\mathcal{X}_n$  требует  $O(n^2)$  операций.

Если же мы убедились, что  $G, H \in \mathcal{X}_n$ , то  $A$  тривиален. Переупорядочиваем вершины графов по убыванию их величины  $f$  (это возможно, поскольку графы прошли второй этап проверки); графы  $G, H$  изоморфны тогда и только тогда, когда новые графы совпадают. Опять имеем  $O(n^2)$  операций.

Единственное, в чем еще осталось удостовериться, — это то, почему  $P_{n,1/2}(\mathcal{X}_n)$  стремится к единице. Одним из оснований к этому слу-

---

жит теорема 27: ввиду нее мы отвергаем граф после первой проверки с ничтожно малой вероятностью. Гораздо труднее объяснить, почему в рамках второй проверки мы также отсеиваем пренебрежимо мало графов. Этот факт заведомо опирается на наше знание о «дырках» между соседними величинами  $d_i$  (полученное в результате первой проверки), и его обоснование можно найти в книге [1].

### 3. Обобщенная модель Эрдёша — Реньи и случайные дистанционные графы

В этой главе мы расскажем об одном важном обобщении модели Эрдёша — Реньи и его приложениях в задачах комбинаторной геометрии.

#### 3.1. Определение модели

Пусть дано число  $n \in \mathbb{N}$  и множество  $V = \{1, \dots, n\}$ . Положим, как и в параграфе 2.2,  $N = C_n^2$  и обозначим через  $e_1, \dots, e_N$  ребра полного графа на множестве вершин  $V$ . Раньше мы отбирали ребра в случайный граф в соответствии со схемой из  $N$  испытаний Бернулли, в каждом из которых вероятность успеха (взятия ребра в граф) равнялась одному и тому же  $p \in [0, 1]$ . Теперь же мы станем проводить ребро между вершинами  $i$  и  $j$  с вероятностью  $p_{ij}$ , зависящей от указанных вершин. В остальном все будет по-прежнему, т. е. испытания будут независимыми: у нас как бы  $N$  монеток с разными центрами тяжести, и в испытании с номером  $v$  мы бросаем  $v$ -ю монетку. При этом мы, опять-таки как и раньше, считаем величины  $p_{ij}$  зависящими, вообще говоря, от  $n$ . Иными словами, мы снова осуществляем серии независимых испытаний. Только на сей раз вероятности различных ребер различны.

Обозначим описанную модель через  $G(n, p_{ij})$ . По сути это вероятностное пространство

$$G(n, p_{ij}) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n, p_{ij}}),$$

в котором

$$|\Omega_n| = 2^N, \quad P_{n, p_{ij}}(G) = \prod_{(i, j) \in E} p_{ij} \cdot \prod_{(i, j) \notin E} (1 - p_{ij}).$$

В такой общности с моделью работать довольно муторно. Имеется, конечно, масса соответствующих результатов, но они чересчур громоздки (см., например, [1]). Намного естественнее и мотивированнее следующий частный случай модели.

Пусть для каждого натурального числа  $n$  (или для каждого  $n$  из произвольной бесконечной последовательности натуральных чисел) задан некоторый граф  $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$ , у которого  $\mathcal{V}_n = V$ , а  $\mathcal{E}_n \subseteq \{e_1, \dots, e_N\}$ . Рассмотрим  $p = p(n) \in [0, 1]$  и положим  $p_{ij} = p$ , коль скоро

$(i, j) \in \mathcal{E}_n$ , и  $p_{i,j} = 0$ , коль скоро  $(i, j) \notin \mathcal{E}_n$ . Иными словами, ребра графа  $\mathcal{G}_n$  появляются в случайном графе независимо друг от друга с одной и той же вероятностью, а ребра, которых в графе  $\mathcal{G}_n$  нет, не возникают в случайном графе вовсе.

Новую модель принято обозначать

$$G(\mathcal{G}_n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p}).$$

Здесь

$$|\Omega_n| = 2^{|\mathcal{E}_n|}, \quad P_{n,p}(G) = p^{|\mathcal{E}|}(1-p)^{|\mathcal{E}_n|-|\mathcal{E}|}.$$

Очевидно, при  $\mathcal{E}_n = \{e_1, \dots, e_N\}$  мы возвращаемся к классической модели Эрдёша — Реньи:  $G(K_n, p) = G(n, p)$ .

Смысл новой модели абсолютно прозрачен. Помните «стратегическую» интерпретацию задачи о связности случайного графа (см. п. 2.5.1 и п. 2.5.4)? Тогда предположение об изначальной полноте графа железных дорог казалось крайне надуманным. Зато теперь для каждого набора стратегически важных объектов мы вольны рассматривать свой граф связывающих их путей  $\mathcal{G}_n$  и именно для него вычислять вероятности связности. Снова получится задача о надежности сети, и в такой постановке эта задача охватывает все возможные ситуации (в предположении, что связи в сети возникают/уничтожаются с равными вероятностями независимо друг от друга).

В настоящей главе мы рассмотрим два типа сетей (последовательностей графов  $\mathcal{G}_n$ ) — «кубы» и «дистанционные графы».

### 3.2. Случайные подграфы куба

Обозначим через  $\mathcal{C}_n$  граф, у которого вершины — это  $n$ -мерные векторы с координатами 0 и 1 (всего  $2^n$  вершин), то есть вершины  $n$ -мерного куба  $[0, 1]^n$ , а ребрами соединены те и только те пары вершин, между которыми проходит ребро куба. Иными словами, ребра — это пары  $(0,1)$ -векторов, отстоящих друг от друга на расстояние 1 в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Например,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \\ & \{((0, 0), (0, 1)), ((0, 0), (1, 0)), ((1, 1), (0, 1)), ((1, 1), (1, 0))\}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать модель  $G(\mathcal{C}_n, p)$ . Ю. Д. Буртин в 1977 году получил относительно этой модели результаты, аналогичные тем, которым мы посвятили параграф 2.5. Здесь аналогом «пороговой» вероятности  $\frac{\ln n}{n}$  служит константа  $\frac{1}{2}$ . Иначе говоря, справедлива

**Теорема 29.** Если  $p < \frac{1}{2}$ , то почти наверное случайный граф в модели  $G(\mathcal{C}_n, p)$  не является связным. Если  $p > \frac{1}{2}$ , то почти наверное случайный граф в модели  $G(\mathcal{C}_n, p)$  связан.

Теорему 29 мы доказывать не станем, так как она стоит немного в стороне от основной линии этой главы. Тем не менее она весьма любопытна. На «пороге», т. е. при  $p = \frac{1}{2}$  вероятность связности стремится к  $e^{-1}$ . Это буквально тот же самый результат, что и при  $p = \frac{\ln n}{n}$  в модели Эрдёша — Реньи  $G(n, p)$ .

Здесь имеется и аналог теоремы 16.

**Теорема 30.** Пусть  $p = \frac{c}{n}$ . Тогда при любом  $c < 1$  почти наверное все компоненты случайного графа в модели  $G(\mathcal{C}_n, p)$  имеют размер  $o(2^n)$ . Для каждого  $c > 1$  найдется такая  $\gamma = \gamma(c) \in (0, 1)$ , что почти наверное в случайном подграфе куба есть компонента размера не меньше  $\gamma 2^n$ .

Смысл очень простой:  $o(2^n)$  — это мелочь по сравнению с числом вершин всего куба, каковое есть, разумеется,  $2^n$ . Таким образом, при  $p \leq \frac{c}{n}$ ,  $c < 1$ , мы опять имеем дело с феодализмом, при  $p \geq \frac{c}{n}$ ,  $c > 1$ , возникает империя, а при  $p > \frac{1}{2}$  — мировое господство.

Может показаться странным, что пороги для связности отличаются в двух моделях (и существенно!), тогда как пороги для перехода от феодализма к империи, на первый взгляд, совпадают. Ан нет! Дело в том, что  $n$  в модели  $G(n, p)$  (и даже  $n$  в описании модели  $G(\mathcal{C}_n, p)$ ) и  $n$  в модели  $G(\mathcal{C}_n, p)$  суть совершенно разные вещи. В первом случае  $n$  — это число вершин случайного графа, во втором же — это двоичный логарифм от числа его вершин:  $n = \log_2 2^n$ . В дальнейшем мы постараемся sobлюсти единообразие и станем все вероятности (функции типа  $p = p(n)$ ) записывать в терминах именно количества вершин нашего случайного графа. В данном случае можно ввести обозначение  $m = 2^n$  и сказать так: порогом для перехода от феодализма к империи служит функция  $p = p(m) = \frac{1}{\log_2 m}$ ; порогом для перехода от империи к мировому господству служит функция  $p = \frac{1}{2}$ . И в такой записи все становится на свои места: как  $\frac{1}{2}$  куда больше, нежели  $\frac{\ln n}{n}$ , так и  $\frac{1}{\log_2 n}$  значительно превосходит  $\frac{1}{n}$ .

Доказательства теорем 29 и 30 следует искать в [1].

### 3.3. Случайные дистанционные графы

Пусть  $k$  — натуральное число. Положим  $n = 4k$ . Обозначим через  $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  граф, у которого

$$\mathcal{V}_n = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 2k \},$$

$$\mathcal{E}_n = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2k} \},$$

где через  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , в свою очередь, обозначено обычное евклидово расстояние между векторами  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Иными словами, вершины графа  $\mathcal{G}_n$  — это снова  $(0,1)$ -векторы, у которых, правда, на сей раз ровно половина единичных и половина нулевых координат. И эти векторы соединены ребрами в графе  $\mathcal{G}_n$  тогда и только тогда, когда расстояние между ними есть  $\sqrt{2k}$ . Последнее условие равносильно тому, что множества единичных координат векторов, образующих ребро, пересекаются в аккурат по  $k$  элементам. Это условие можно записать в терминах скалярного произведения, которое для данных векторов  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  мы будем обозначать  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ :

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2k} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k.$$

Граф  $\mathcal{G}_n$  мы будем называть *полным дистанционным графом*. Смысл слова «дистанционный» понятен: ребра графа задаются парами точек, отстоящих друг от друга на данное расстояние — «дистанцию». Полнота понимается в том смысле, что мы провели в графе все ребра, какие только могли: было между двумя векторами расстояние  $\sqrt{2k}$ , мы эти векторы и связали ребром. Просто *дистанционным* мы будем называть любой подграф в полном дистанционном графе.

Разумеется, бывает и масса других графов, которые стоило бы называть дистанционными. Вообще, дистанционный граф (или еще *граф расстояний*) — это любой граф с вершинами в точках  $\mathbb{R}^n$  и ребрами, порожденными за счет данного расстояния (данных расстояний). Позже мы столкнемся с рядом соответствующих примеров. Да и подграфы куба, о которых мы говорили выше, вполне дистанционные. Однако пока мы будем работать именно с  $\mathcal{G}_n$ , и именно его мы будем называть *полным дистанционным графом* (полным графом расстояний).

Рассмотрение графа  $\mathcal{G}_n$  и его аналогов глубоко мотивировано задачами комбинаторной геометрии — задачей Нелсона — Эрдёша — Хадвигера о хроматическом числе пространства, проблемой Борсука и др. (см. [31, 44–53]). В дальнейшем мы подробнее расскажем об этих мотивировках.

Сейчас важно отметить, что мы будем работать с моделью  $G(\mathcal{G}_n, p)$ . И снова смысл индекса  $n$  здесь не вполне такой же, как в описании модели в параграфе 3.1: там через  $n$  мы обозначали число вершин в графе  $\mathcal{G}_n$ , а здесь — размерность пространства, в котором живут вершины-векторы. Дабы устранить несоответствие, положим  $m = C_n^{n/2} = |\mathcal{Y}_n|$  и станем впредь говорить исключительно о модели  $G(\mathcal{G}_m, p(m))$  (более того, даже  $\mathcal{Y}_n$  мы переобозначим через  $\mathcal{Y}_m$  и аналогично поступим с  $\mathcal{E}_n$ ). Параметр  $m$  у нас будет стремиться к бесконечности вместе с ростом параметра  $n$ , и в такой асимптотике мы будем изучать вероятности свойств случайного дистанционного графа (т. е. случайного подграфа  $G$  полного графа расстояний  $\mathcal{G}_m$ ).

Впоследствии мы изучим ряд свойств случайных дистанционных графов, подобных тем, которые мы изучили в модели Эрдёша — Реньи. Однако даже полный дистанционный граф устроен куда более нетривиально, нежели обычный полный граф  $K_n$ . И без понимания его устройства мы не сможем добиться серьезных продвижений в нашей науке. Поэтому следующий параграф (разбитый на пункты) мы посвятим обсуждению нужных нам свойств графа  $\mathcal{G}_m$ . И лишь затем перейдем, собственно, к случайным графам расстояний.

### 3.4. Вспомогательные факты и свойства полного дистанционного графа

В этом параграфе мы обсудим основные свойства полного дистанционного графа и приведем ряд смежных аналитических фактов.

#### 3.4.1. Немного простой аналитики

Нам понадобится асимптотическое выражение для  $m = m(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Воспользуемся формулой Стирлинга (см. § 2.8):

$$m = C_n^{n/2} = \frac{n!}{((n/2)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\pi n (n/2)^n e^{-n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

Можно написать так:

$$m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)),$$

где  $\delta_1$  — некоторая функция, стремящаяся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Прологарифмируем последнее равенство:

$$\ln m = \ln \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + \delta_1(n)) \right) + n \ln 2 - \ln \sqrt{n}.$$



Получается, что

$$n = \frac{\ln m}{\ln 2}(1 + \delta_2(m)), \quad \delta_2 = o(1).$$

### 3.4.2. О числе независимости полного графа расстояний

Справедливы следующие три утверждения.

**Лемма 3.** *Имеет место неравенство*

$$\alpha(\mathcal{G}_m) \geq \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{\frac{3n}{4}+5}}(1 + \delta_3(n)), \quad \delta_3(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Лемма 4.** *При  $n = 4\rho^a$ , где  $\rho$  — простое, справедлива оценка*

$$\alpha(\mathcal{G}_m) \leq \sqrt{\frac{2}{3\pi n}} \cdot \frac{4^n}{27^{n/4}} \cdot (1 + \delta_4(n)),$$

где  $\delta_4(n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 5.** *При любом  $n$  справедлива оценка*

$$\alpha(\mathcal{G}_m) \leq (1,99 + o(1))^n.$$

Вместе леммы говорят о том, что точное значение числа независимости полного дистанционного графа не найдено; однако оценки для этого числа достаточно близки друг к другу. А именно, при загадочном условии  $n = 4\rho^a$  (т. е. при условии того, что  $k$  — это степень простого числа) верхняя оценка из леммы 4 практически совпадает с универсальной нижней оценкой из леммы 3. В результате можно написать

$$\alpha(\mathcal{G}_m) = \left(\frac{4}{3^{3/4}} + o(1)\right)^n = (1,754\dots + o(1))^n.$$

Если же  $n$  произвольно, то зазор между известными оценками (леммы 3 и 5) куда больше:

$$(1,754\dots + o(1))^n \leq \alpha(\mathcal{G}_m) \leq (1,99 + o(1))^n.$$

Перейдем к доказательствам.

**Доказательство леммы 3.** Рассмотрим множество

$$F = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{Y}_m : \sum_{i=1}^{n/2} x_i = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - 1 \right\}.$$

Практически очевидно, что  $F$  — независимое множество вершин графа  $\mathcal{G}_m$ . Просто скалярное произведение любых двух векторов из  $F$  строго больше величины  $\frac{n}{4}$ , которая у нас порождает ребро (см. рис. 10).

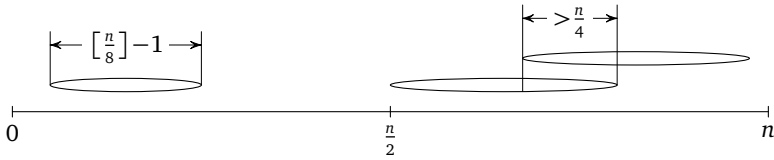


Рис. 10

Положим

$$q = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n x_i = \frac{n}{2} - \left( \left[ \frac{n}{8} \right] - 1 \right).$$

Поскольку  $\left[ \frac{n}{8} \right] = \frac{n}{8} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [0, 1)$ ,

$$q = \frac{n}{2} - \left( \left[ \frac{n}{8} \right] - 1 \right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{8} + 1 + \varepsilon = \frac{3n}{8} + 1 + \varepsilon.$$

Имеем

$$|F| = C_{n/2}^{[n/8]-1} C_{n/2}^q = (C_{n/2}^{[n/8]-1})^2.$$

Теперь, применив формулу Стирлинга и введя обозначение  $\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_m) &\geq |F| = \left( \frac{\frac{n!}{2}}{\left( \left[ \frac{n}{8} \right] - 1 \right)! q!} \right)^2 = \left( \frac{\frac{n!}{2}}{\left( \frac{n}{8} - \varepsilon_1 \right)! \left( \frac{3n}{8} + \varepsilon_1 \right)!} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\sqrt{\pi n} \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left( \frac{n}{4} - 2\varepsilon_1 \right) \pi} \left( \frac{n}{8} - \varepsilon_1 \right)^{\frac{n}{8} - \varepsilon_1} e^{-\frac{n}{8} + \varepsilon_1} \sqrt{\left( \frac{3n}{4} + 2\varepsilon_1 \right) \pi} \left( \frac{3n}{8} + \varepsilon_1 \right)^{\frac{3n}{8} + \varepsilon_1} e^{-q}} \right)^2 \times \\ &\quad \times (1 + \delta_3^1(n)) = \frac{\pi n \left( \frac{n}{2} \right)^n}{\frac{3}{16} n^2 \pi^2 \left( \frac{n}{8} - \varepsilon_1 \right)^{\frac{n}{4} - 2\varepsilon_1} \left( \frac{3n}{8} + \varepsilon_1 \right)^{\frac{3n}{4} + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta_3^2(n)) = \\ &= \frac{\left( \frac{n}{2} \right)^n}{\frac{3}{16} \pi n \left( \frac{n}{8} \right)^{\frac{n}{4} - 2\varepsilon_1} \left( 1 - \frac{8\varepsilon_1}{n} \right)^{\frac{n}{4} - 2\varepsilon_1} \left( \frac{3n}{8} \right)^{\frac{3n}{4} + 2\varepsilon_1} \left( 1 + \frac{8\varepsilon_1}{3n} \right)^{\frac{3n}{4} + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta_3^2(n)) = \\ &= \frac{\left( \frac{1}{2} \right)^n}{\frac{3}{16} \pi n \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{n}{4} - 2\varepsilon_1} \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{3n}{4} + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta_3(n)) = \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{\frac{3n}{4} + 1 + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta_3(n)) \geq \\ &\geq \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{\frac{3n}{4} + 5}} (1 + \delta_3(n)). \end{aligned}$$

Здесь все величины типа  $\delta$  стремятся к нулю с ростом  $n$ , и по ходу дела мы использовали тот факт, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$ . Лемма доказана.  $\square$

**Доказательство леммы 4.** С помощью линейно-алгебраического метода в комбинаторике удается показать, что  $\alpha(\mathcal{G}_m) \leq 2C_{n-1}^{k-1}$  (именно для корректного применения линейной алгебры требуется простота  $k$ ). Этот факт подробно изложен в книге [31], и мы его не доказываем. Мы лишь аккуратно применяем формулу Стирлинга:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_m) &\leq 2C_{n-1}^{n/4-1} = \frac{2(n-1)!}{\left(\frac{n}{4}-1\right)! \left(\frac{3n}{4}\right)!} = \\ &= \frac{2\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}}{\sqrt{\pi\frac{n-4}{2}}\left(\frac{n}{4}-1\right)^{\frac{n}{4}-1}e^{-\frac{n}{4}+1}\sqrt{\pi\frac{3n}{2}}\left(\frac{3n}{4}\right)^{\frac{3n}{4}}e^{-\frac{3n}{4}}}(1+\delta_4^1(n)) = \\ &= \frac{4\sqrt{2(n-1)}(n-1)^{n-1}}{\sqrt{3n\pi(n-4)}\left(\frac{n}{4}-1\right)^{\frac{n}{4}-1}\left(\frac{3n}{4}\right)^{\frac{3n}{4}}}(1+\delta_4^1(n)) = \sqrt{\frac{2}{3\pi n}} \cdot \frac{4^n}{27^{n/4}} \cdot (1+\delta_4(n)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

У леммы 5 весьма сложное доказательство. Мы не станем приводить его здесь, но лишь отошлем читателя к оригинальной работе [54].

### 3.4.3. О кликовом числе полного графа расстояний

Тут тоже весьма любопытная ситуация. Что такое клика в полном дистанционном графе? Да это просто правильный симплекс размерности не больше  $n$ . (Определение правильного симплекса можно найти в книге [31].) Иными словами, клик с более чем  $n+1$  вершинами в графе  $\mathcal{G}_m$  точно нет. На самом деле нет там и клик на  $n+1$  и на  $n$  вершинах. Это можно показать разными способами, например, посредством линейно-алгебраического метода (см. [31]).

Совершенно удивительно другое: до сих пор нет ответа на вопрос, всегда ли в  $\mathcal{G}_m$  присутствует  $(n-1)$ -клика! Это одна из самых старых нерешенных проблем комбинаторики. Обычно ее формулируют в терминах так называемых матриц Адамара. Матрицей Адамара называется квадратная матрица (таблица) размера  $n \times n$ , в которой все элементы суть  $\pm 1$  и любые две строки ортогональны (т. е. их скалярное произведение как векторов в  $\mathbb{R}^n$  равно нулю). Легкое упражнение состоит в том, чтобы убедиться в равносильности требования попарной ортогональности строк матрицы Адамара требованию попарной ортогональности ее столбцов.

Поскольку при домножении на  $-1$  любой строки (любого столбца) матрицы свойство ортогональности ее столбцов (ее строк) остается неизменным, можно считать, что вся первая строка матрицы Адамара состоит из одних единиц. Если  $n > 1$  (что естественно...), то всякая строка матрицы Адамара, отличная от первой, содержит половину единиц и половину минус единиц. Это во всяком случае означает четность  $n$ . Иначе матрица Адамара и не возникнет. Далее, при  $n > 3$  любые две строки матрицы Адамара, которые не совпадают с первой из ее строк, будучи ортогональными друг другу, должны быть устроены так, как показано на рис. 11, т. е. множества их единичных координат обязаны пересекаться ровно по  $\frac{n}{4}$  элементам. Таким образом,  $n$  обязано делиться на 4.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \end{array}$$

Рис. 11

Проблема в том, что по-прежнему науке не известно, существуют ли матрицы Адамара при всех  $n$ , делящихся на 4. При этом ясно, что последние  $n - 1$  строк матрицы Адамара устроены в точности так же, как и векторы из какой-либо  $(n - 1)$ -клик в графе  $\mathcal{G}_m$ . Известно, впрочем, довольно много. Например, мы знаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $n_0$ , что при всех  $n > n_0$  между  $n$  и  $(1 + \varepsilon)n$  есть число  $n'$ , для которого матрица Адамара размера  $n' \times n'$  существует.

Массу других результатов о матрицах Адамара можно найти в книгах [12] и [55]. Для наших целей они, однако, не слишком важны, и потому мы подробнее на них не останавливаемся.

Итак, мы знаем, что  $\omega(\mathcal{G}_m) \leq n - 1$  и при бесконечно многих (и довольно часто встречающихся) значениях  $n = 4k$  справедливо точное равенство  $\omega(\mathcal{G}_m) = n - 1$ .

#### 3.4.4. О хроматическом числе полного графа расстояний

Прежде всего заметим, что ввиду неравенства  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ , результатов пункта 3.4.2 и формулы Стирлинга мы при  $n = 4\rho^a$  имеем

$$\chi(\mathcal{G}_m) \geq \frac{C_n^{n/2}}{2C_{n-1}^{n/4-1}} = \left( \frac{2}{1,754\dots} + o(1) \right)^n = (1,139\dots + o(1))^n.$$

При других  $n$  мы получаем лишь оценку

$$\chi(\mathcal{G}_m) \geq (1,01\dots + o(1))^n.$$

Что касается верхних оценок, то при любых  $n$  они имеют вид

$$\chi(\mathcal{G}_m) \leq (1,139\dots + o(1))^n.$$

Доказательство приведенного неравенства можно найти в книге [56].

В итоге

$$\chi(\mathcal{G}_m) = (1,139 + o(1))^n,$$

коль скоро  $n$  имеет вид учетверенной степени простого числа.

Оценки хроматического числа полного графа расстояний играют огромную роль в комбинаторной геометрии. Первая из задач, которые напрямую используют данные оценки, — это проблема Нелсона — Эрдёша — Хадвигера о хроматическом числе евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Напомним, что *хроматическим числом пространства* называется величина  $\chi(\mathbb{R}^n)$ , равная наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки  $\mathbb{R}^n$ , чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 1\}.$$

Про хроматические числа имеется обширная литература. Приведем лишь книги [31, 44, 51] и обзоры [49, 50]. Нас сейчас интересуют только оценки  $\chi(\mathbb{R}^n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . В работе [57] было показано, что

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

А что же с нижними оценками? Так ведь ясно, что если  $G$  — граф расстояний в  $\mathbb{R}^n$ , то  $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G)$ . Значит, при  $n = 4\rho^a$  выполнено

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(\mathcal{G}_m) = (1,139\dots + o(1))^n.$$

На самом деле отсюда нетрудно вывести и точно такую же оценку для  $\chi(\mathbb{R}^n)$  при произвольном  $n$  (поменяется лишь вид  $o(1)$ , который нас пока не волнует). Для этого надо воспользоваться законами распределения простых и их степеней в натуральном ряде (см. [31]).

Таким образом,

$$(1,139\dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Это довольно сильные оценки. Из них нижняя подлежит некоторому дальнейшему уточнению за счет оптимизации по множеству дистанционных графов в  $\mathbb{R}^n$ . Сейчас наилучшая цепочка неравенств выглядит так:

$$(1,239\dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Дистанционный граф, с помощью которого удается заменить 1,139 на 1,239, устроен примерно так же, как и наш «полный дистанционный граф». Разница лишь в том, что у каждой из его вершин есть не только

нулевые и единичные, но еще и минус единичные координаты (подробности см. в [31]).

Подчеркнем, что экспоненциальные нижние оценки хроматических чисел долгое время никому не удавалось обосновать. Лишь в 1981 году П. Франкл и Р. М. Уилсон сделали это (см. [31, 58]).

Еще одна проблема комбинаторной геометрии, которая связана с изучением дистанционных графов, — это проблема Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Эта проблема состоит в отыскании величины  $f(n)$ , равной минимальному числу  $f$ , для которого существует разбиение произвольного ограниченного множества в  $\mathbb{R}^n$  на  $f$  частей меньшего диаметра. Напомним, что *диаметр* множества — это супремум расстояний между парами его точек. Мы не станем описывать результаты в проблеме Борсука, но лишь отошлем читателя к книгам [31, 45, 52, 53] и статьям [46–48].

### 3.4.5. О числе ребер в произвольном подмножестве множества вершин полного графа расстояний

Положим  $\alpha = \alpha(\mathcal{G}_m)$ . Понятно, что при любом  $\beta \leq \alpha$  бывают множества вершин  $W \subset \mathcal{V}_m$ , имеющие мощность  $\beta$  и не содержащие ребер. А что, если  $\beta > \alpha$ ? Разумеется, тут также очевидно, что в соответствующем  $W$  ребра непременно найдутся. Но может ли их быть мало?

Обозначим через  $r(W)$  количество ребер графа  $\mathcal{G}_m$  на множестве вершин  $W$ . Иными словами,  $r(W) = |F|$ , где

$$F = \{(x, y) \in \mathcal{E}_m : x \in W, y \in W\}.$$

Известная теорема Турана (см., например, [13, 59]) утверждает следующее.

**Теорема 31.** Если  $|W| = l > \alpha$ , то  $r(W) \geq \frac{l^2}{2\alpha} - \frac{l}{2}$ .

В специфическом случае полного дистанционного графа оценку из теоремы 31 можно слегка уточнить.

**Теорема 32.** Если  $|W| = l \geq (n+1)\alpha$ , то существует такая функция  $\sigma(n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , что

$$r(W) > \frac{l^2 - nl\alpha + \frac{1}{2}n^2\alpha^2}{\alpha} (1 + \sigma(n)).$$

Заметим, что при  $l \sim n\alpha$  теорема 32 дает практически тот же результат, что и теорема 31, а при  $n\alpha = o(l)$  оценка из теоремы 32 становится асимптотически вдвое точнее.

**Доказательство теоремы 32.** Начнем с того, что в  $W$  есть независимое множество  $A$  вершин графа  $G = (W, F)$ , имеющее максимальную мощность. Положим  $\beta = |A|$ . Ясно, что  $\beta \leq \alpha$ . Кроме того, ввиду

максимальности  $A$ , каждая вершина из  $W \setminus A$  соединена ребром (принадлежащим  $F$ ) хотя бы с одной вершиной из  $A$ .

Разобьем  $W \setminus A$  на две непересекающиеся части  $L$  и  $K$ . Здесь  $K$  — это такое множество вершин, что для любой вершины  $x \in K$  существует ровно одна вершина  $y \in A$  со свойством  $(x, y) \in F$  (см. рис. 12). Формально,

$$K = \{x \in W \setminus A : |\{y \in A : (x, y) \in F\}| = 1\},$$

$$L = (W \setminus A) \setminus K = \{x \in W \setminus A : |\{y \in A : (x, y) \in F\}| \geq 2\}.$$

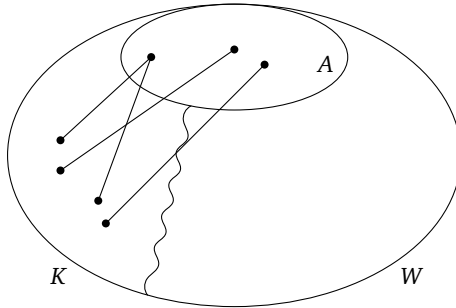


Рис. 12

Покажем, что  $|K| \leq n\beta$ . Предположим противное. Тогда по принципу Дирихле найдется такая вершина  $x \in A$ , что

$$|\{y \in K : (x, y) \in F\}| \geq n + 1.$$

Рассмотрим произвольные

$$y_1, \dots, y_{n+1} \in \{y \in K : (x, y) \in F\}.$$

Выберем из них любые две различные вершины  $y_i, y_j$ . Положим  $M = (A \setminus \{x\}) \cup \{y_i, y_j\}$ . Поскольку  $|M| > |A|$ , в  $M$  есть ребра графа  $G$ . Наша конструкция устроена так, что с необходимостью  $(y_i, y_j) \in F$ . Значит, вершины  $y_1, \dots, y_{n+1}$  дистанционного графа в  $\mathbb{R}^n$  попарно соединены ребрами, т.е. образуют правильный  $n$ -мерный симплекс. Однако  $(0,1)$ -векторы, с которыми мы имеем дело, полномерных симплексов, очевидно, образовывать не могут (ср. п. 3.4.3). Противоречие.

Итак,  $|K| \leq n\beta \leq n\alpha$ . Ясно, далее, что

$$F = \{(x, y) : x \in K, y \in A\} \cup \{(x, y) : x \in L, y \in A\} \cup \{(x, y) : x \in W \setminus A, y \in W \setminus A\}.$$

Иными словами, полагая

$$F_1 = \{(x, y) : x \in W \setminus A, y \in W \setminus A\},$$

имеем

$$\begin{aligned} |F| &= |\{(x, y) : x \in K, y \in A\}| + |\{(x, y) : x \in L, y \in A\}| + |F_1| \geq \\ &\geq 2(l - \beta) - |K| + |F_1| \geq 2(l - \beta) - n\beta + |F_1| \geq \\ &\geq 2(l - \alpha) - n\alpha + |F_1| = 2l - \alpha(n + 2) + |F_1|. \end{aligned}$$

Теперь осуществим ту же схему действий, заменяя  $W$  на  $W_1 = W \setminus A$ ,  $A$  на  $A_1$  (независимое множество вершин в  $W_1$ , имеющее максимальную мощность),  $\beta$  на  $\beta_1 = |A_1| \leq \alpha$ ,  $L$  и  $K$  на  $L_1$  и  $K_1$ , так что  $W_1 \setminus A_1 = L_1 \cup K_1$ , и т. д. Полагая  $l_1 = |W_1| \geq l - \alpha$  и

$$F_2 = \{(x, y) : x \in W_1 \setminus A_1, y \in W_1 \setminus A_1\},$$

имеем

$$\begin{aligned} |F_1| &= |\{(x, y) : x \in K_1, y \in A_1\}| + |\{(x, y) : x \in L_1, y \in A_1\}| + |F_2| \geq \\ &\geq 2(l_1 - \beta_1) - |K_1| + |F_2| \geq 2(l_1 - \beta_1) - n\beta_1 + |F_2| \geq \\ &\geq 2(l - 2\alpha) - n\alpha + |F_2| = 2l - \alpha(n + 4) + |F_2|. \end{aligned}$$

Описанную процедуру мы итерируем  $k = \left\lceil \frac{l - n\alpha}{\alpha} \right\rceil$  раз. В результате получаем оценку

$$|F| \geq \sum_{i=1}^k (2l - \alpha(n + 2i)) + |F_k|,$$

где

$$F_k = \{(x, y) : x \in W_{k-1} \setminus A_{k-1}, y \in W_{k-1} \setminus A_{k-1}\}.$$

Все шаги процедуры корректны, так как для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$  выполнено

$$|W_i| = |W_{i-1} \setminus A_{i-1}| \geq l - i\alpha \geq l - k\alpha \geq n\alpha,$$

а значит, всякий раз рассмотрение множества  $L_i$ , дающего «удвоенный вклад» в оценку числа ребер графа  $G$ , оправдано с учетом неравенства  $|K_i| \leq n\beta_i \leq n\alpha$ . При этом формально  $W_0 = W$ ,  $A_0 = A$  и т. д. Более того, за счет условия  $l \geq (n + 1)\alpha$  получаем  $k \geq 1$ , вследствие чего хотя бы один шаг процедуры мы непременно осуществим и тем подтвердим корректность суммирования по  $i$  от единицы до  $k$ .

Остается оценить величину  $|F_k|$ . Это, по сути, количество ребер графа  $G$  на множестве вершин  $W_k$ . Как и прежде, выделим в  $W_k$  подмножество  $A_k$ , имеющее максимальную мощность среди всех подмножеств в  $W_k$ , свободных от ребер  $G$ . Ясно, опять-таки, что каждая



вершина из  $W_k \setminus A_k$  соединена ребром хотя бы с одной вершиной в  $A_k$ . Таким образом, рассмотрение  $A_k$  дает вклад размера не меньше  $|W_k| - |A_k| \geq l - k\alpha - \alpha$  в величину  $|F_k|$ .

Снова итерируем описанную процедуру. Каждый раз мы удаляем не более  $\alpha$  вершин из  $W_k$ . И каждый раз мы добавляем не менее  $l - k\alpha - \alpha$  ( $i$  — номер итерации) в оценку величины  $|F_k|$ . Вспоминая о том, что  $|W_k| \geq n\alpha$ , приходим к выводу, что итераций можно провести как минимум  $n$ . В итоге

$$|F_k| \geq \sum_{i=1}^n (l - k\alpha - \alpha),$$

а стало быть,

$$\begin{aligned} |F| &\geq \sum_{i=1}^k (2l - \alpha(n + 2i)) + \sum_{i=1}^n (l - k\alpha - \alpha) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^k (2l - \alpha(n + 2i)) + \sum_{i=1}^n (n\alpha - \alpha) = \\ &= k(2l - n\alpha) - k(k+1)\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \geq \\ &\geq \left(\frac{l-n\alpha}{\alpha} - 1\right)(2l - n\alpha) - \frac{l-n\alpha}{\alpha} \left(\frac{l-n\alpha}{\alpha} + 1\right)\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha = \\ &= \frac{2l^2 - 3ln\alpha + n^2\alpha^2}{\alpha} - (2l - n\alpha) - \frac{(l-n\alpha)^2 + (l-n\alpha)\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha^2(n^2 - n)}{2\alpha} = \\ &= \frac{l^2 - nl\alpha + \frac{1}{2}n^2\alpha^2 + \frac{1}{2}n\alpha^2 - l\alpha}{\alpha} - (2l - n\alpha) = \frac{l^2 - nl\alpha + \frac{1}{2}n^2\alpha^2}{\alpha} (1 + \sigma(n)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

#### 3.4.6. «Олимпиадный» комментарий к предыдущему пункту

На Московской математической олимпиаде 2010 года в варианте 10-го класса была задача, предложенная автором этой книги. Вот она: пусть  $G = (V, E)$  — дистанционный граф на плоскости (с длиной каждого ребра 1), причем у него  $|V| = 4n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\alpha(G) \leq n$ ; докажите, что  $|E| \geq 7n$ .

Опять-таки, применение аналога теоремы 31 сразу дает нам оценку

$$|E| \geq \frac{16n^2}{2n} - \frac{4n}{2} = 6n.$$

Оценка же величиной  $7n$  — это в точности результат реализации идеи из доказательства теоремы 32. Для пушей наглядности воспроизведем все рассуждение заново (ср. также [60]). Сперва докажем неравенство  $|E| \geq 6n$ , а затем и неравенство  $|E| \geq 7n$ .

Итак, пусть  $G = (V, E)$  — наш граф. Тогда  $|V| = 4n$  и для любого  $W \subset V$ ,  $|W| \geq n + 1$ , найдутся  $x, y \in W$ , образующие ребро  $(x, y) \in E$ . Возьмем произвольное множество  $Q_1 \subset V$ , которое не содержит ребер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества  $V$ , которые не содержат ребер. Ясно, что  $|Q_1| \leq n$ . Кроме того, ввиду максимальной мощности множества  $Q_1$  каждая вершина из  $V \setminus Q_1$  имеет хотя бы одного соседа в  $Q_1$ . Значит, в  $E$  по крайней мере  $3n$  элементов.

Удалим из  $V$  множество  $Q_1$ . Останется граф  $G_1 = (V_1, E_1)$ , у которого  $|V_1| \geq 3n$  и для любого  $W \subset V_1$ ,  $|W| \geq n + 1$ , найдутся  $x, y \in W$ , образующие ребро  $(x, y) \in E_1$ . Опять возьмем произвольное множество  $Q_2 \subset V_1$ , которое не содержит ребер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества  $V_1$ , которые не содержат ребер. Ясно, что  $|Q_2| \leq n$ . Кроме того, ввиду максимальной мощности множества  $Q_2$  каждая вершина из  $V_1 \setminus Q_2$  имеет хотя бы одного соседа в  $Q_2$ . Значит, в  $E_1$  по крайней мере  $2n$  элементов. Поскольку ребра, найденные на первом шаге поиска, заведомо отличны от ребер, найденных только что, в  $E$  уже не менее  $5n$  элементов.

Делаем еще один полностью аналогичный шаг и убеждаемся, что  $|E| \geq 6n$ .

Воспользуемся теперь тем, что  $G$  — дистанционный граф. Иными словами, вершины — это точки на плоскости, а ребра — все возможные пары точек, удаленных друг от друга на расстояние 1. Будем делать в точности ту же процедуру, что и прежде. Отличие будет только на первом шаге. Мы уже знаем, что каждая вершина из  $V \setminus Q_1$  имеет *хотя бы* одного соседа в  $Q_1$ . Давайте разобьем  $V \setminus Q_1$  на две части —  $W_1$  и  $W_2$ . В  $W_1$  будут те вершины, у каждой из которых *ровно* один сосед в  $Q_1$ , в  $W_2$  — те вершины, у каждой из которых не менее двух соседей. Если мы докажем, что  $|W_1| \leq 2n$ , то мы увидим, что на первом шаге вклад в  $|E|$  не величины  $3n$ , как это было раньше, а величины  $4n$  или более. Это и даст нам в итоге оценку  $7n$ .

Предположим,  $|W_1| > 2n$ . Тогда в  $Q_1$  есть вершина  $q$ , смежная с тремя вершинами  $x_1, x_2, x_3$  из  $W_1$ . Если между какими-то  $x_i, x_j$  нет ребра, то мы можем удалить  $q$  из  $Q_1$  и добавить к этому множеству  $x_i, x_j$ . Получится множество, в котором нет ребер и у которого мощность строго больше  $|Q_1|$ . Значит,  $x_1, x_2, x_3, q$  попарно соединены ребрами. Но полный граф на четырех вершинах нельзя реализовать отрезками длины 1 на плоскости. Противоречие, и задача решена.

Здесь любопытны еще несколько моментов. Во-первых, никто не умеет пока улучшить в условиях задачи оценку  $|E| \geq 7n$ . А это было бы крайне интересно! Во-вторых, задачам о количестве ребер в дистан-

ционных графах посвящена огромная литература. Например, изучают *максимальное* число ребер  $e_n$  у дистанционного графа на  $n$  вершинах. В случае плоскости известно лишь, что  $e_n \leq cn^{4/3}$  с некоторой константой  $c > 0$  и что

$$e_n \geq ne^{\frac{c' \ln n}{\ln \ln n}}, \quad c' > 0.$$

Зазор огромен! Подробности можно прочесть в книге [51].

### 3.5. Хроматическое и кликовое числа дистанционного графа

В этом параграфе мы изучим случайные дистанционные графы с точки зрения соотношения между их хроматическими и кликовыми числами. По существу речь пойдет о задаче, которая в «дистанционном» случае крайне похожа на задачу из параграфа 2.9. Основное утверждение содержится в теореме 33, которую мы прямо сейчас сформулируем, сразу затем прокомментируем, а потом и докажем.

**Теорема 33.** *Существует такая функция  $\delta(n) = o(1)$ , что для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдется граф расстояний  $G$  в  $\mathbb{R}^n$  с хроматическим числом  $\chi(G) \geq (1,0005 + \delta(n))^n$  и кликовым числом  $\omega(G) \leq 11$ .*

В чем пафос теоремы? А в том, что, оказывается, можно найти графы в  $\mathbb{R}^n$ , у которых экспоненциально большие хроматические числа и которые не содержат клик *фиксированного* размера. Говоря геометрическим языком, нам не нужно, чтобы в графе присутствовали симплексы размерности 11 и более, дабы этот граф было *трудно* раскрасить. Ведь, по идее, именно наличие больших симплексов в графе заставляет нас использовать много цветов для правильной покраски графа, а вот поди ж ты: можно и без симплексов обойтись. Для обычных графов подобное удивительное обстоятельство мы уже наблюдали в теореме 19. Там было даже более сильное утверждение, но и сейчас у нас не обычные, а дистанционные графы. Так что сложно сказать, что здесь производит большее впечатление.

Неискушенного читателя может смутить тот факт, что, на первый взгляд, для малых  $n$  теорема несколько странная. Но дело в том, что хотя функция  $\delta(n)$  и стремится к нулю с ростом размерности, тем не менее при конкретных  $n$  ничто не мешает ей быть очень большой по модулю. Например, вполне может статься, что  $\delta(1000) = -0,0005$ , в результате чего при  $n = 1000$  утверждение теоремы тривиально: ясно же, что бывают графы с хроматическим числом 1 и даже без треугольников. Достижение носит именно асимптотический харак-

тер. По-другому можно сказать так: найдется такое  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что для каждого  $n \geq n_0$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  существует дистанционный граф  $G$ , у которого  $\chi(G) \geq (1,0004)^n$  и  $\omega(G) \leq 11$ . Вероятно, так яснее, хотя и слабее (на одну десяти тысячную в основании экспоненты).

Теорема допускает ряд улучшений, но на них мы в этой книге не останавливаемся (см. [61]).

**Доказательство теоремы 33.** Положим  $\tau = \frac{4}{3^{3/4}} = 1,754\dots$  (см. пункт 3.4.2),  $c = 1,999$  и зафиксируем произвольное число  $c' \in (c, 2)$ . Нам достаточно убедиться в существовании такой функции  $\delta(n) = o(1)$ , что при каждом  $n$  найдется граф расстояний  $G = (V, E)$  в  $\mathbb{R}^n$ , у которого одновременно  $\omega(G) \leq 11$  и

$$\chi(G) \geq \left( \frac{2}{c'} + \delta(n) \right)^n.$$

Суть в том, что при  $c' = 1,9990001$  или типа того

$$\frac{2}{c'} \geq 1,0005,$$

и все в порядке. Здесь, однако, важно, что  $c' > c$ . Пусть, для определенности,  $c' = 1,9990001$ .

Сперва докажем заявленное утверждение при всех  $n = 4\rho^a$ , где  $\rho$  простое. Для полной строгости заменим в текущем случае  $\delta(n)$  на  $\delta'(n) = o(1)$ .

Рассмотрим случайный дистанционный граф  $G(\mathcal{G}_m, p)$ , полагая  $p = \gamma^n$ , где  $\gamma = 0,88$ . Заметим, что

$$\gamma \in \left( \frac{\tau}{c'}, 1 \right).$$

Всюду далее считаем, что  $n$  достаточно велико (при малых  $n$ , как мы знаем, все тривиально).

На пространстве  $G(\mathcal{G}_m, p)$  определим случайные величины  $X_l$ , равные числу независимых множеств мощности  $l$  в случайном графе  $G$ . Аналогично зададим  $Y_m$  как число клик размера  $m$  в случайном графе. Положим  $l = \lceil (c')^n \rceil$ . Ясно, что при больших  $n$  мы имеем  $l < |\mathcal{V}_m| = (2 + o(1))^n$ , и, стало быть, величина  $X_l$  определена корректно.

Допустим, мы показали, что

$$P_{m,p}(X_l = 0) > \frac{1}{2}, \quad P_{m,p}(Y_m = 0) > \frac{1}{2}.$$

Тогда существует граф  $G$  в  $\mathbb{R}^n$  с  $\omega(G) \leq 11$  и  $\alpha(G) \leq l$ . Последняя оценка означает, что

$$\chi(G) \geq \frac{|\mathcal{Y}_m|}{l} = \left( \frac{2}{c'} + \delta'(n) \right)^n,$$

и теорема доказана. Что ж, будем оценивать вероятности.

Воспользуемся неравенством Маркова:

$$P_{m,p}(X_l = 0) \geq 1 - MX_l, \quad P_{m,p}(Y_{12} = 0) \geq 1 - MY_{12}.$$

Покажем, стало быть, что

$$MX_l < \frac{1}{2}, \quad MY_{12} < \frac{1}{2}.$$

Начнем с  $MX_l$ . За счет линейности математического ожидания, имеем (см. п. 3.4.5)

$$MX_l = \sum_{W \subset \mathcal{Y}_m, |W|=l} (1-p)^{r(W)}.$$

Ясно, что, поскольку  $c' > \tau$ , то  $l > \alpha = \alpha(\mathcal{G}_m)$  (см. п. 3.4.2) при всех достаточно больших  $n$ , и, следовательно, для каждого  $W \subset \mathcal{Y}_m, |W|=l$ , выполнено  $r(W) \geq \frac{l^2}{2\alpha} - \frac{l}{2}$  (см. теорему 31).

Заметим сперва, что

$$\frac{l^2}{2\alpha} - \frac{l}{2} \geq \frac{((c')^2 + \kappa_1(n))^n}{(\tau + \kappa_2(n))^n} = \left( \frac{(c')^2}{\tau} + \kappa_3(n) \right)^n,$$

$$\kappa_1(n) = o(1), \quad \kappa_2(n) = o(1), \quad \kappa_3(n) = o(1).$$

Таким образом, полагая

$$A_l = \frac{l^2}{2\alpha} - \frac{l}{2},$$

имеем (с некоторыми  $\kappa_i(n) = o(1)$ )

$$\begin{aligned} MX_l &\leq C_m^l \cdot (1-p)^{A_l} \leq \left( \frac{em}{l} \right)^l \cdot (1-p)^{A_l} \leq \\ &\leq \left( \frac{2}{c'} + \kappa_4(n) \right)^{(c'+\kappa_5(n))^n} \cdot e^{-p \left( \frac{(c')^2}{\tau} + \kappa_3(n) \right)^n} = e^{(c'+\kappa_6(n))^n - \left( \frac{\gamma(c')^2}{\tau} + \kappa_7(n) \right)^n}. \end{aligned}$$

У нас  $\gamma > \frac{\tau}{c'}$ . Значит,  $\frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau} > c'$ , т. е.

$$(c' + \kappa_6(n))^n - \left( \frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau} + \kappa_7(n) \right)^n \rightarrow -\infty,$$

а

$$e^{(c'+\kappa_6(n))^n - \left( \frac{\gamma(c')^2}{\tau} + \kappa_7(n) \right)^n} \rightarrow 0.$$

Следовательно, при всех достаточно больших  $n$  выполнено  $MX_1 < \frac{1}{2}$ , и нам остается обосновать оценку  $MY_{12} < \frac{1}{2}$ .

За счет линейности математического ожидания имеем

$$MY_{12} \leq C_m^{12} p^{C_{12}^2} = C_m^{12} p^{66} \leq m^{12} \cdot \gamma^{66n} = (2 + \kappa_8(n))^{12n} \gamma^{66n},$$

$$\kappa_8(n) = o(1).$$

Явный расчет показывает, что

$$2^{12} \cdot (0,88)^{66} < 0,9.$$

Значит, при больших  $n$

$$MY_{12} \leq (2 + \kappa_8(n))^{12n} \gamma^{66n} < (0,9 + \kappa_9(n))^n < \frac{1}{2}, \quad \kappa_9(n) = o(1).$$

Нужные неравенства верны при всех достаточно больших  $n$  (скажем,  $n > n_0$ ) вида  $n = 4\rho^a$ , и для завершения доказательства теоремы остается разобрать случай произвольного  $n$ .

Зафиксируем произвольное  $n$ . Выберем максимальное простое число  $\rho$ , удовлетворяющее условию  $4\rho \leq n$ . Положим  $n' = 4\rho$ . Мы знаем, что в  $\mathbb{R}^{n'}$  есть дистанционный граф  $G$  с  $\chi(G) \geq (1,0005 + \delta'(n'))^{n'}$  и  $\omega(G) \leq 11$ . Поскольку  $\mathbb{R}^{n'} \subseteq \mathbb{R}^n$ , мы можем рассматривать  $G$  как граф расстояний в  $\mathbb{R}^n$ . С кликовым числом у него автоматически все в порядке. А что с хроматическим?

А вот что. С помощью сложных методов аналитической теории чисел доказывается, что  $n - n' = o(1)$  (см. [62, 63]). Следовательно,

$$\chi(G) \geq (1,0005 + \delta'(n'))^{n'} = (1,0005 + \delta'(n - \delta''(n)))^{n - \delta''(n)},$$

$$\delta''(n) = o(1).$$

Очевидно, что

$$\delta'(n - \delta''(n)) = o(1), \quad (1,0005 + o(1))^{-\delta''(n)} = 1 + o(1),$$

т. е.

$$\chi(G) \geq (1,0005 + \delta(n))^n, \quad \delta(n) = o(1).$$

как нам и нужно. Теорема доказана.  $\square$

**Небольшое замечание по истории.** Подобно теоремам 31 и 32, которые мы прокомментировали в пункте 3.4.6, теорема 33 имеет естественные аналоги в малых размерностях. Например, что можно сказать про плоскость? Хорошо известно, что хроматическое число плоскости (см. п. 3.4.4 и [44]) заключено в пределах от четырех до семи. Иными словами, мы точно знаем, что на плоскости есть дистанционные графы с хроматическим числом 4. Простейшие из этих графов

(см. [44]) содержат треугольники, что ожидаемо. В 1976 году Эрдёш поставил вопрос: а обязаны ли подобные графы содержать треугольники? Сейчас мы знаем, что ответ на этот вопрос отрицателен: для любого  $k$  существуют графы расстояний на плоскости с обхватом  $k$  и хроматическим числом 4. Этот удивительный факт в популярной форме изложен в статье [64].

### 3.6. Хроматическое число случайного дистанционного графа

В параграфе 2.6 мы развили мощную технику, которая, в частности, позволила нам найти асимптотику для хроматического числа почти всякого графа с данным числом вершин. Для случайного дистанционного графа такой техники пока нет. Впрочем, нетрудно доказать, например, следующую теорему.

**Теорема 34.** *При любом постоянном  $p$  для модели  $G(\mathcal{G}_m, p)$  найдутся такие  $\kappa_1(n) = o(1)$  и  $\kappa_2(n) = o(1)$ , что почти наверное*

$$\chi(G) \geq (1,139\dots + \kappa_1(n))^n, \quad \chi(G) \leq (1,139\dots + \kappa_2(n))^n.$$

Разумеется, теорему можно уточнять, явно указывая функции  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Мы, однако, этого делать не станем, поскольку, с одной стороны, зазор все равно довольно велик, а с другой стороны, — это требует весьма скучной технической возни.

### 3.7. Дистанционные числа Рамсея

В этом параграфе мы поговорим об одном естественном «дистанционном» аналоге классических чисел Рамсея (см. § 2.8).

#### 3.7.1. Постановка задачи

Напомним, что в одном из определений классическое число Рамсея  $R(s, t)$  представляло собой наименьшее натуральное  $m$ , при котором для любого графа  $G$  на  $m$  вершинах либо  $\omega(G) \geq s$ , либо  $\alpha(G) \geq t$ . Сейчас мы еще немного модифицируем это определение, дабы затем было понятнее, насколько новый объект, который мы собираемся ввести, близок к старому. Опишем соответствующую терминологию.

Пусть  $G = (V, E)$  — некоторый граф. Если  $H = (W, F)$  является подграфом в  $G$ , то будем писать  $H \subseteq G$ . Если, сверх того,  $H$  — *остовный* подграф в  $G$  (т. е.  $W = V$ ), то, желая подчеркнуть этот факт, напишем  $H \preceq G$ . Если  $G = (V, F) \preceq K_m$  (т. е., попросту говоря,  $G$  — произвольный

граф на  $m$  вершинах), то его *дополнением* (до полного графа) назовем граф  $[G] = (V, F') \preceq K_m$ , у которого  $(x, y) \in F'$  тогда и только тогда, когда  $(x, y) \notin F$ .

В новых обозначениях можно определить  $R(s, t)$  следующим образом: это минимальное  $m$ , такое что для любого  $G \preceq K_m$  либо  $G$  содержит изоморфную копию  $K_s$ , либо  $[G]$  содержит изоморфную копию  $K_t$ .

Поскольку всякий индуцированный подграф  $K_m$  представляет собой изоморфную копию некоторого  $K_s$ , можно сказать еще и так:  $R(s, t)$  — это минимальное  $m \in \mathbb{N}$ , такое что для любого  $G \preceq K_m$  либо  $G$  содержит некоторый индуцированный подграф  $K_m$  на  $s$  вершинах, либо  $[G]$  содержит некоторый индуцированный подграф  $K_m$  на  $t$  вершинах.

Теперь пусть  $G \preceq \mathcal{G}_m$ . Тогда его *дополнением* (до полного дистанционного графа) назовем граф  $[G]_{\text{dist}} \preceq \mathcal{G}_m$ , у которого любые две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они не соединены ребром в  $G$ , но соединены ребром в  $\mathcal{G}_m$ . Например, для  $G = (\mathcal{V}_m, \emptyset)$  имеем  $[G]_{\text{dist}} = \mathcal{G}_m$ .

Мы видели в параграфе 3.4, что свойства полных дистанционных графов сильно зависят от того, считаем мы величину  $k$  в их определении равной степени простого числа или нет. Поэтому разумно отдельно рассматривать последовательность всех  $\mathcal{G}_m$  и подпоследовательность  $\{\mathcal{G}_m^{\text{prime}}\} \subset \{\mathcal{G}_m\}_{k=1}^{\infty}$  тех  $\mathcal{G}_m$ , у которых  $k = \rho^a$  с некоторыми  $\rho$  и  $a$ .

Для данных  $s, t \in \mathbb{N}$  положим  $R_{\text{dist}}(s, t)$  равным минимальному  $m \in \mathbb{N}$ , такому что корректно определен граф  $\mathcal{G}_m$  и для любого  $G \preceq \mathcal{G}_m$  либо  $G$  содержит некоторый индуцированный подграф  $\mathcal{G}_m$  на  $s$  вершинах, либо  $[G]_{\text{dist}}$  содержит некоторый индуцированный подграф  $\mathcal{G}_m$  на  $t$  вершинах.

Иначе говоря, величина  $R_{\text{dist}}(s, t)$  полностью аналогична величине  $R(s, t)$ , коль скоро мы  $K_m$  и дополнение в нем заменяем на  $\mathcal{G}_m$  и дополнение в нем.

Точно так же введем, наконец,  $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, t)$  как минимум из всех  $m \in \mathbb{N}$ , при которых корректно определен граф  $\mathcal{G}_m \in \{\mathcal{G}_m^{\text{prime}}\}$  и для любого  $G \preceq \mathcal{G}_m$  либо  $G$  содержит некоторый индуцированный подграф  $\mathcal{G}_m$  на  $s$  вершинах, либо  $[G]_{\text{dist}}$  содержит некоторый индуцированный подграф  $\mathcal{G}_m$  на  $t$  вершинах.

При всей близости классического и нового определений очевидны и существенные различия между ними. Главное из них состоит в том, что если раньше индуцированный подграф полного графа  $K_m$  всегда имел ту же структуру, что и сам полный граф (был изоморфен некото-



рому  $K_s$ ), то теперь индуцированные подграфы «полных» графов  $\mathcal{G}_m$  вовсе не обязаны быть изоморфными какому-либо  $\mathcal{G}_s$ . В частности, ничто не мешает таким подграфам оказаться даже «пустыми» (т. е. свободными от ребер), ведь, как мы видели в п. 3.4.2, в графах  $\mathcal{G}_m$  есть весьма большие независимые множества вершин. В случае  $K_m$  подобным свойством обладал исключительно  $K_1$ .

В следующем пункте мы сформулируем некоторые результаты относительно величин  $R_{\text{dist}}(s, t)$  и  $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, t)$ . Они будут разительно отличаться от классических.

### 3.7.2. Формулировки результатов

Желая уменьшить громоздкость изложения, обсудим лишь «диагональный случай», т. е. случай  $s = t$ .

**Теорема 35.** Пусть

$$c = \frac{4}{3^{3/4}}, \quad \xi = \frac{\ln 2}{\ln c}, \quad b = \frac{3^5 \pi}{4^2} = \frac{243}{16} \pi.$$

Тогда для любого  $\beta > 0$  при всех достаточно больших  $s \in \mathbb{N}$  выполнено

$$R_{\text{dist}}(s, s) \leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{\frac{1}{2} - \xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi - \frac{1}{2}} (1 + \beta).$$

Иными словами, если классическое число Рамсея росло экспоненциально, то «дистанционное», по сути, ограничено сверху полиномом.

С числами  $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s)$  дела обстоят несколько хуже.

**Теорема 36.** Существует такая функция  $\varphi$ , что  $\varphi(s) = o(1)$  при  $s \rightarrow \infty$  и

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \leq s^{\xi + \varphi(s)}.$$

Такое ухудшение оценки связано со спецификой распределения простых чисел в натуральном ряде (ср. § 3.5).

Теперь обсудим нижние оценки.

**Теорема 37.** Положим

$$c = \frac{4}{3^{3/4}}, \quad \xi = \frac{\ln 2}{\ln c}, \quad d = \sqrt{\frac{2}{3\pi}},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\xi}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2\xi} - \frac{1}{2}, \quad \theta_3 = \frac{d}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\theta_1/2} (\ln 2)^{\theta_2}}, \quad \theta_4 = \left(\frac{\ln 2}{2\theta_3 \xi^{\theta_2} (\xi - 1)}\right)^\xi.$$

Тогда для любого  $\beta > 0$  существует бесконечно много натуральных чисел  $s$ , таких что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \geq \theta_4 s^\xi (\ln s)^{\frac{-\xi - 1}{2}} (1 - \beta).$$

Теорема 37 представляет своего рода «омега-результат». Интересно понять, что будет, если «бесконечно много натуральных  $s$ » заметить, например, на «все достаточно большие  $s$ . К сожалению, это можно сделать лишь за счет довольно значимых потерь в качестве оценки — потерь, подобных тем, с которыми мы столкнулись при переходе от теоремы 35 к теореме 36. Это также связано с особенностями распределения простых чисел среди натуральных.

**Теорема 38.** *Существует такая функция  $\psi$ , что  $\psi(s) = o(1)$  при  $s \rightarrow \infty$  и*

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \geq s^{\xi + \psi(s)}.$$

Неожиданно слабой выходит следующая теорема.

**Теорема 39.** *Положим  $\eta = \frac{\ln 2}{\ln 1,99}$ . Существует такая функция  $\mu$ , что  $\mu(s) = o(1)$  при  $s \rightarrow \infty$  и*

$$R_{\text{dist}}(s, s) \geq s^{\eta + \mu(s)}.$$

Иными словами, зазор между оценками числа  $R_{\text{dist}}(s, s)$  сверху и снизу имеет порядок степени  $s$ . Такая неприятность обусловлена существенной разницей между утверждениями лемм 4 и 5 (см. п. 3.4.2).

Теорему 35 мы докажем в следующем пункте. Теореме 37 мы посвятим пункт 3.7.4. Другие теоремы, ввиду их меньшей показательности, мы доказывать не станем, отсылая читателя к оригинальной работе [65].

### 3.7.3. Доказательство теоремы 35

Предположим, что для данного натурального  $s$  и для некоторого  $m$  корректно определен граф  $\mathcal{G}_m$  и  $\alpha(\mathcal{G}_m) \geq s$ . Тогда для любого  $G = (\mathcal{V}_m, E) \preceq \mathcal{G}_m$  также выполнено  $\alpha(G) \geq s$ . Пусть  $W$ ,  $|W| = s$ , — любое из соответствующих независимых множеств в  $\mathcal{V}_m$ . Значит, граф  $H = (W, E|_W) = (W, \emptyset)$  является индуцированным подграфом в  $\mathcal{G}_m$  и одновременно подграфом в  $G$ . Таким образом, в описанной ситуации и  $G$ , и  $[G]_{\text{dist}}$  содержат индуцированный подграф графа  $\mathcal{G}_m$  на  $s$  вершинах, а это даже больше, чем требовалось.

Остается показать, что при всяком достаточно большом  $s$  существует  $m = C_n^{n/2}$  с  $n = 4k$  и

$$m \leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{\frac{1}{2} - \xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi - \frac{1}{2}} (1 + \beta), \quad \alpha(\mathcal{G}_m) \geq s.$$

Положим

$$h(s) = \frac{\ln \left( \frac{bs(\ln s)(1 + \beta')}{\ln c} \right)}{\ln c}, \quad 0 < \beta' < \beta.$$

Ясно, что при больших  $s$  величина  $h(s)$  неотрицательна и, следовательно, есть натуральное  $n$  вида  $n = 4k$ , не превосходящее  $h(s) + 4$  и большее либо равное  $h(s)$ . По лемме 3 для соответствующего  $m$  имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_m) &\geq \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{\frac{3n}{4}+5}} (1 + \delta_3(n)) = \frac{1}{b} \cdot \frac{c^n}{n} (1 + \delta_3(n)) = \\ &= \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{n \ln c}}{n} (1 + \delta_3(n)) \geq \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{h(s) \ln c}}{h(s) + 4} (1 + \delta_3(n)). \end{aligned}$$

С ростом  $s$  растет и  $n$ , а значит, можно написать  $\delta_3(n) = \gamma(s)$ , где  $\gamma(s) \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_m) &\geq \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{h(s) \ln c}}{h(s) + 4} (1 + \gamma(s)) = \frac{1}{b} \cdot \frac{bs(\ln s)(1 + \beta')}{(\ln c) \left( \frac{\ln \left( \frac{bs(\ln s)(1 + \beta')}{\ln c} \right)}{\ln c} + 4 \right)} (1 + \gamma(s)) = \\ &= \frac{s(\ln s)(1 + \beta')}{\ln \frac{c^{4bs(\ln s)(1 + \beta')}}{\ln c}} (1 + \gamma(s)) = \frac{s(\ln s)(1 + \beta')}{(\ln s)(1 + \gamma'(s))} (1 + \gamma(s)), \quad \gamma'(s) \rightarrow 0, s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку  $\beta' > 0$ , окончательно получаем (при достаточно больших  $s$ )  $\alpha(\mathcal{G}_m) > s$ .

Теперь, воспользовавшись результатами пункта 3.4.1, получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{h(s)+4}}{\sqrt{h(s)}} (1 + \delta_1(n)) = \\ &= 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h(s)}} \cdot 2^{\frac{\ln \left( \frac{bs(\ln s)(1 + \beta')}{\ln c} \right)}{\ln c}} (1 + \delta_1(n)) = \\ &= 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h(s)}} \cdot \left( \frac{bs(\ln s)(1 + \beta')}{\ln c} \right)^\xi (1 + \delta_1(n)). \end{aligned}$$

Заметим, что  $h(s) \geq \frac{\ln s}{\ln c}$  при больших  $s$ . Стало быть,

$$\begin{aligned} m &\leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln s}{\ln c}}} \cdot \left( \frac{bs(\ln s)(1 + \beta')}{\ln c} \right)^\xi (1 + \delta_1(n)) \leq \\ &\leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{\frac{1}{2} - \xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi - \frac{1}{2}} (1 + \beta), \end{aligned}$$

коль скоро  $\beta'$  и  $s$  таковы, что

$$(1 + \beta')^\xi (1 + \delta_1(n)) \leq 1 + \beta.$$

Теорема доказана.

### 3.7.4. Доказательство теоремы 37

Переформулируем сперва лемму 4 в обозначениях нашей теоремы. А именно, справедлива

**Лемма 4'.** Пусть  $c, \xi, d, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  — такие же, как в формулировке теоремы 37. Тогда при  $n = 4\rho^a$  справедлива оценка

$$\alpha(\mathcal{G}_m) \leq \theta_3 (\ln m)^{\theta_2} m^{\theta_1} (1 + \delta'_4(m)),$$

где  $\delta'_4(m) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ .

**Доказательство леммы 4'.** Ввиду результатов пункта 3.4.1

$$m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)).$$

Значит,  $\ln m \sim n \ln 2$ . Имеем

$$\theta_3 (\ln m)^{\theta_2} m^{\theta_1} \sim \theta_3 n^{\theta_2} (\ln 2)^{\theta_2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\theta_1/2} \frac{c^n}{n^{1/(2\xi)}} = \frac{d \cdot c^n}{\sqrt{n}}.$$

Нетрудно видеть, что, в свою очередь, по лемме 4

$$\alpha(\mathcal{G}_m) \leq \frac{d \cdot c^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_4(n)).$$

Завершение доказательства очевидно.  $\square$

Зафиксируем все параметры, фигурирующие в формулировке теоремы, и  $\beta > 0$  в том числе. Упорядочим по возрастанию величины все числа вида  $4\rho^a$ , где  $\rho$  — простое,  $a$  — натуральное. Получится множество

$$\mathcal{N} = \{8, 12, 16, 20, 28, 32, 36, 44, 52, 64, \dots\}.$$

Для каждого  $n \in \mathcal{N}$  определим  $m$  по известной формуле. Сохраняя порядок чисел, образуем множество

$$\mathcal{M} = \{70, 924, 12870, 184756, \dots\}.$$

Для каждого  $m \in \mathcal{M}$  найдем  $s'$  из соотношения

$$m = [\theta_4 (s')^\xi (\ln s')^{\frac{-\xi-1}{2}} (1 - \beta')], \quad \beta' = \frac{\beta}{2}.$$

Положим  $s = \lceil s' \rceil$ . Возникнет бесконечная последовательность  $\mathcal{S}$  натуральных чисел  $s$ , упорядоченных по возрастанию. При этом всякому  $s \in \mathcal{S}$  однозначно отвечает  $m = m(s)$ , и наоборот. Наконец,

$$m(s) \sim \theta_4 s^\xi (\ln s)^{\frac{-\xi-1}{2}} (1 - \beta'),$$

т. е. при достаточно больших  $s$  выполнено

$$m(s) > \theta_4 s^\xi (\ln s)^{\frac{-\xi-1}{2}} (1 - \beta).$$

Сейчас мы покажем, что начиная с некоторого  $s_0$  все  $s \in \mathcal{S}$  таковы, что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) > m = m(s),$$

и этого хватит для завершения доказательства теоремы 37.

Итак, пусть  $s$  достаточно велико. Для соответствующего  $m = m(s)$  рассмотрим граф  $\mathcal{G}_m$ . Нам необходимо убедиться в том, что найдется такой  $G \preceq \mathcal{G}_m$ , для которого ни в нем самом, ни в его дополнении нет индуцированных подграфов графа  $\mathcal{G}_m$ , имеющих  $s$  вершин. Рассмотрим случайный дистанционный граф  $G(\mathcal{G}_m, 1/2)$ .

Как и в пункте 3.4.5, для любого  $W \subset \mathcal{V}_m$ ,  $|W| = s$ , обозначим через  $r(W)$  количество ребер полного дистанционного графа на вершинах из  $W$ . Пусть, в то же время,  $A_W$  — событие, состоящее в том, что либо в случайном графе  $G$ , либо в его дополнении находится индуцированный подграф графа  $\mathcal{G}_m$  с множеством вершин  $W$ . Ясно, что

$$P_{m,1/2}(A_W) = 2 \left( \frac{1}{2} \right)^{r(W)},$$

причем, ввиду теоремы 31, имеем  $r(W) \geq \frac{s^2}{2\alpha} - \frac{s}{2}$ . Здесь важно, что у нас  $s > \alpha = \alpha(\mathcal{G}_m)$ : в самом деле, из леммы 4' мы знаем, что

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \theta_3 (\ln m)^{\theta_2} m^{\theta_1} (1 + \delta'_4(m)) \sim \\ &\sim \theta_3 (\xi \ln s)^{\theta_2} \theta_4^{\theta_1} s^{\xi \theta_1} (\ln s)^{\frac{-\xi-1}{2} \cdot \theta_1} (1 - \beta')^{\theta_1} = O(s (\ln s)^{-1}). \end{aligned}$$

В результате

$$P_{m,1/2} \left( \bigcup_{W \subset \mathcal{V}_m} A_W \right) \leq 2C_m^s \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{s^2}{2\alpha} - \frac{s}{2}}.$$

Если мы покажем, что

$$2C_m^s \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{s^2}{2\alpha} - \frac{s}{2}} < 1, \quad (1)$$

то это будет означать, что

$$P_{m,1/2} \left( \overline{\bigcup_{W \subset \mathcal{V}_m} A_W} \right) > 0,$$

а нам ровно то и нужно.

Поскольку  $C_m^s < \frac{m^s}{s^s e^{-s}}$ , для доказательства (1) достаточно проверить справедливость оценки

$$\frac{2m^s}{s^s e^{-s}} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{s^2}{2\alpha} - \frac{s}{2}} < 1.$$

Снова пользуемся леммой 4':

$$\frac{2m^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s^2}{2\alpha} - \frac{s}{2}} \leq \frac{2m^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s^2}{2\theta_3(\ln m)\theta_2 m^{\theta_1}}(1+\sigma_1(m))}, \quad \sigma_1(m) = o(1),$$

и наша задача сводится к установлению неравенства

$$\frac{2m^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s^2}{2\theta_3(\ln m)\theta_2 m^{\theta_1}}(1+\sigma_1(m))} < 1.$$

Прологарифмируем левую часть последнего неравенства и убедимся в том, что получится отрицательное число. Заметим еще раз, что

$$m \leq \theta_4 s^\xi (\ln s)^{\frac{-\xi-1}{2}} (1-\beta'), \quad \ln m \sim \xi \ln s.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \ln 2 + s \ln m - s \ln s + s - \frac{s^2(\ln 2)(1+\sigma_1(m))}{2\theta_3(\ln m)\theta_2 m^{\theta_1}} \leq \\ & \leq \ln 2 + s \ln(\theta_4(1-\beta')) + \xi s \ln s + \frac{-\xi-1}{2} s \ln \ln s - s \ln s + s - \\ & \quad - \frac{s^2(\ln 2)(1+\sigma_2(m))}{2\theta_3(\xi \ln s)^{\theta_2} \theta_4^{\theta_1} s^{\xi \theta_1} (\ln s)^{\theta_1} \frac{-\xi-1}{2} (1-\beta_1)^{\theta_1}} = \\ & = (\xi-1)(1+\sigma_3(m))s \ln s - \left(\frac{\ln 2}{2\theta_3 \xi^{\theta_2} \theta_4^{\theta_1}}\right) \cdot \frac{(1+\sigma_2(m))}{(1-\beta_1)^{\theta_1}} \cdot s (\ln s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\xi}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\xi}} = \\ & = (\xi-1)s \ln s \left( (1+\sigma_3(m)) - \frac{(1+\sigma_2(m))}{(1-\beta_1)^{\theta_1}} \right) < 0 \end{aligned}$$

при всех достаточно больших  $s$ .

Строго говоря, мы лишь доказали пока, что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \neq m.$$

Дело в том, что для произвольного  $m' < m$ , при котором  $\mathcal{G}_{m'} \in \{\mathcal{G}_m^{\text{prime}}\}$ , описанная вероятностная технология могла не сработать. В сущности, так было бы, окажись лемма 4' справедливой только для  $m$ , но не для других чисел аналогичного вида. По счастью, с леммой 4' никаких проблем нет, и мы действительно имеем

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) > m.$$

Теорема доказана.

### 3.8. О связности случайного дистанционного графа

С точки зрения задачи о связности, случайный дистанционный граф устроен точно так же, как и классический случайный граф. Дабы понять это, заметим, что граф  $\mathcal{G}_m$  *регулярный*, т. е. степень каждой его вершины равна одному и тому же числу. В данном случае степень каждой вершины есть величина

$$m_1 = \left(C_{n/2}^{n/4}\right)^2.$$

В терминах этой величины имеют место следующие результаты.

**Теорема 40.** Пусть  $p = \frac{c \ln m_1}{m_1}$ . Если  $c > 1$ , то почти наверное случайный дистанционный граф *связен*. Если  $c < 1$ , то почти наверное случайный дистанционный граф *связным не является*.

**Теорема 41.** Пусть  $p = \frac{c}{m_1}$ . Тогда при любом  $c < 1$  существует такая константа  $\beta = \beta(c) > 0$ , что почти наверное каждая компонента случайного графа имеет не более  $\beta \ln n$  вершин. При любом  $c > 1$  существует такая константа  $\gamma = \gamma(c) \in (0, 1)$ , что почти наверное среди компонент случайного графа есть одна, число вершин которой не меньше  $\gamma n$ .

Почему теоремы 40 и 41 служат прямыми аналогами теорем 13 и 16? Да потому, что в графе Эрдёша — Реньи роль величины  $m_1$  в аккурат выполняет величина  $n - 1 \sim n$ .

Доказательство теоремы 40 идейно практически такое же, как и доказательство теоремы 13. Однако технически оно труднее. То же самое верно и относительно доказательств теорем 16 и 41. Идейно они близки, а технически дистанционный случай, конечно, намного сложнее.

### 3.9. Законы нуля или единицы для случайного дистанционного графа

В параграфе 2.10 мы рассказали о законах нуля или единицы для случайного графа в модели  $G(n, p)$ . Естественно поставить вопрос: а в модели  $G(\mathcal{G}_m, p)$  имеют место аналогичные законы? Довольно легко понять, что ответ на вопрос отрицательный.

В самом деле, рассмотрим следующее очень простое свойство  $L$ , которое ничего не стоит записать на языке первого порядка: для любых трех вершин графа найдется четвертая, соединенная с каждой

из них. В виде формулы оно выглядит так:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 ((x_1 \sim x_4) \cap (x_2 \sim x_4) \cap (x_3 \sim x_4)).$$

Теперь пусть  $k_1$  пробегает все нечетные числа, а  $k_2$  — все четные. Положим  $n_i = 4k_i$ ,  $m_i = C_{n_i}^{n_i/2}$ .

Для последовательности  $\{k_1, n_1, m_1\}$  рассмотрим вершины графа  $\mathcal{G}_{m_1}$ , имеющие вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{x}_2 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{x}_3 &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Здесь отдельные блоки координат имеют мощность  $k_1$ , так что векторы  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$  образуют треугольник. Нетрудно понять (это легкое упражнение), что для этих векторов *не существует* четвертого, который бы с каждым из них был соединен ребром в графе  $\mathcal{G}_{m_1}$ .

В то же время для последовательности  $\{k_2, n_2, m_2\}$  имеем принципиально другую ситуацию. Можно показать (довольно муторным перебором), что, каковы бы ни были три вершины графа  $\mathcal{G}_{m_2}$ , существует экспоненциально много вершин  $\mathbf{x}_4$ , каждая из которых соединена с ними всеми. Точнее, найдется такая константа  $\gamma > 1$ , что для любых  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathcal{V}_{m_2}$  есть множество  $A_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3} \subset \mathcal{V}_{m_2}$ ,  $|A_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3}| > \gamma^{n_2}$ , в котором любая вершина смежна с  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ .

В результате

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P_{n_1, p}(G \in L) = 0.$$

Однако

$$\begin{aligned} P_{n_2, p}(G \notin L) &\leq C_{m_2}^3 P_{n_2, p}(\text{для данных } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \text{ и любой } \mathbf{x}_4 \in A_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3} \\ &((x_1 \not\sim x_4) \cup (x_2 \not\sim x_4) \cup (x_3 \not\sim x_4))) \leq C_{m_2}^3 (1 - p^3)^{\gamma^{n_2}} \leq (m_2)^3 e^{-p^3 \gamma^{n_2}}. \end{aligned}$$

Допустим, вероятность ребра  $p$  ведет себя так же, как ее аналог из теоремы 20, т. е.  $p(m_2)^\alpha \rightarrow \infty$  при любом  $\alpha > 0$ . Поскольку  $m_2 = (2 + o(1))^{n_2}$ , это значит, что  $p$  если и стремится к нулю, то с субэкспоненциальной скоростью. Таким образом, можно сказать, например, что  $p^3 \gamma^{n_2} > \gamma^{n_2/2}$ , а стало быть,

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} P_{n_2, p}(G \in L) = 1.$$

Иными словами, предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n, p}(G \in L)$  не существует, и закона нуля или единицы действительно нет.



На этом, впрочем, все не только не заканчивается, но скорее начинается. Оказывается разумным ослабить язык первого порядка. Например, рассматривают фразы, в которых участвует один и тот же квантор (в любом количестве) или фразы с не более чем  $j$  кванторами, и т. д. Это целая отдельная область исследований, которая еще ждет своего полноценного развития.

## 4. Модели случайных веб-графов

В этой главе мы поговорим о самых современных моделях случайных графов, которые призваны описывать рост различных сетей — социальных, биологических, транспортных. Но в первую очередь речь пойдет об Интернете. В 90-е годы XX века, когда Интернет только зарождался, исследователи уже задались вопросом, каким законам подчиняется рост Интернета и какова наиболее адекватная модель для описания свойств этой сети. Одними из первых здесь были А.-Л. Барабаш и Р. Альберт. Они нашли ряд важных эмпирических закономерностей в поведении Интернета и на их основе придумали модель, которую впоследствии по-разному формализовывали многие авторы. Мы построим наше изложение следующим образом. В первом параграфе мы расскажем о результатах Барабаша — Альберт. Во втором параграфе мы опишем модель Б. Боллобаша и О. Риордана, которая весьма неплохо ложится на статистики Барабаша — Альберт. В третьем параграфе мы обсудим возможные уточнения модели Боллобаша — Риордана.

### 4.1. Наблюдения Барабаша — Альберт

В своих работах [66–68] Барабаш и Альберт, а также Х. Джеонг описали те статистики Интернета, которые легли в основу науки о росте этой сети — науки, имеющей глубокие приложения как в собственно интернетовской проблематике, так и в многочисленных близких дисциплинах. В действительности, большинство реальных сетей (социальные, биологические, транспортные и пр.) имеют похожую «топологию».

Итак, сперва договоримся о том, что мы понимаем под сетью Интернет. Это так называемый *веб-граф*, вершины которого суть какие-либо конкретные структурные единицы в Интернете: речь может идти о страницах, сайтах, хостах, владельцах и пр. Для определенности будем считать, что вершинами веб-графа служат именно сайты. Ребрами же мы будем соединять те вершины, между которыми имеются ссылки. При этом разумно проводить столько ребер между двумя вершинами, сколько есть ссылок между соответствующими сайтами. Более того, ребра естественно считать направленными. Таким образом, веб-граф ориентирован и он может иметь кратные ребра, петли и даже кратные петли (ссылки вполне могут идти с одной страницы

данного сайта на другую его страницу). Это такой «псевдомультиторграф». Сразу понятно, что для подобного «зверя» модель Эрдёша — Реньи вряд ли подходит.

Теперь мы готовы перечислить самые основные моменты исследования Барабаши — Альберт. По существу, этих моментов всего три. Во-первых, веб-граф — это весьма разреженный граф. У него на  $t$  вершинах примерно  $kt$  ребер, где  $k \geq 1$  — некоторая константа. Для сравнения, у полного графа на  $t$  вершинах  $C_t^2 = \Theta(t^2)$  ребер (см. значок « $\Theta$ » в приложении). Однако — и это во-вторых, — диаметр веб-графа исключительно скромнен. (Напомним, что *расстояние* между двумя вершинами графа — это количество ребер в кратчайшем реберном пути между ними, а *диаметр* графа — это максимум попарных расстояний между его вершинами.) В 1999 году диаметр имел величину (см. [68]) 5—7. Это хорошо всем известное свойство любой социальной сети, которое принято в обыденной речи характеризовать выражением «мир тесен». Например, говорят о том, что любые два человека в мире «знакомы через 5—6 рукопожатий». Точно так же и сайты: «кликакая» по ссылкам, можно с любого сайта на любой другой перейти за 5—7 нажатий клавиши компьютерной мыши. Конечно, тут есть важная оговорка. Некоторые едва появившиеся сайты могут не быть связаны с внешним по отношению к ним миром. Несколько правильнее сказать, что в веб-графе есть гигантская компонента, и уже ее диаметр невелик. Таким образом, веб-граф очень специфичен: будучи разреженным, он, тем не менее, в известном смысле тесен.

В-третьих, у веб-графа весьма характерное распределение степеней вершин. Эмпирическая вероятность того, что вершина веб-графа имеет степень  $d$  (т. е. просто доля вершин степени  $d$ ), оценивается как  $c/d^\lambda$ , где  $\lambda \approx 2,1$ , а  $c$  — нормирующий множитель, вычисляемый из условия «сумма вероятностей равна 1». Этот любопытный факт роднит Интернет с очень многими реальными сетями — биологическими, социальными, транспортными. Все они подчиняются «степенному закону» (т. е. закону, в котором вероятности имеют вид  $c/d^\lambda$ ), только у каждой из них свой показатель  $\lambda$ .

Ввиду перечисленных наблюдений не остается никаких сомнений в том, что модель Эрдёша — Реньи не применима для описания роста Интернета и подобных сетей. Если подбором вероятности  $p$  еще можно добиться разреженности и тесноты (хотя и не с теми параметрами), то степенной закон совсем уж не имеет отношения к схеме Бернулли, в рамках которой появляются ребра обычного случайного графа. В модели  $G(n, p)$  степень каждой вершины случайного графа биномиальна с параметрами  $n - 1$  и  $p$  (см. п. 2.11.4), и при тех  $p$ , кото-

рые мало-мальски гарантируют разреженность (т. е. при  $p = \Theta(1/n)$ ), указанное биномиальное распределение аппроксимируется пуассоновским, а вовсе не степенным.

Сами Барабаши и Альберт предложили очень разумный взгляд на процесс формирования Интернета. Давайте считать, сказали они, что в каждый момент времени появляется новый сайт, и этот сайт ставит фиксированное количество ссылок на своих предшественников. На кого он предпочтет сослаться? Наверное, на тех, кто и так уже популярен. Можно допустить, что вероятность, с которой новый сайт поставит ссылку на один из прежних сайтов, пропорциональна числу уже имевшихся на тот сайт ссылок.

Модели случайных графов, основанные на описанной идее, называются моделями *предпочтительного присоединения*. В своих работах Барабаши и Альберт никак не конкретизировали, какую именно из этих моделей они предлагают рассматривать. А эти модели исключительно разнородны по своим свойствам. Ведь можно ставить ссылки независимо друг от друга, а можно еще и зависимости между разными ссылками с одного сайта учитывать. В итоге удастся доказать даже такой забавный факт.

**Теорема 42.** Пусть  $f(n)$ ,  $n \geq 2$ , — произвольная целочисленная функция, такая что  $f(2) = 0$ ,  $f(n) \leq f(n+1) \leq f(n) + 1$  для всех  $n \geq 2$  и  $f(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда существует такая модель типа Барабаши — Альберт, что в ней с вероятностью, стремящейся к единице при  $n \rightarrow \infty$ , случайный граф содержит в точности  $f(n)$  треугольников.

Одну из наиболее правильных спецификаций модели Барабаши — Альберт предложили в начале двухтысячных годов Б. Боллобаш и О. Риордан. В следующем параграфе мы ее обсудим.

## 4.2. Модель Боллобаша — Риордана

Наиболее полно эта модель описана в книге [1] и обзоре [69]. Также имеется малодоступная книга [70]. Мы представим здесь две основных и, по сути, совпадающих модификации этой модели. В одной дается динамическое, а в другой статическое описание случайности. Интуитивно более понятна динамическая модификация, с нее и начнем.

### 4.2.1. Динамическая модификация

Сперва построим последовательность (случайных) графов  $\{G_1^n\}$ , в которой у графа с номером  $n$  число вершин и ребер равно  $n$ . Затем

сделаем из нее последовательность  $\{G_k^n\}$ , в которой у графа с номером  $n$  число вершин равно  $n$ , а число ребер равно  $kn$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Итак, пусть  $G_1^1 = (\{1\}, \{(1, 1)\})$ , т. е. в начальный момент времени есть одна вершина и одна петля. Пусть теперь граф  $G_1^{n-1}$  уже построен. У него вершины образуют множество  $\{1, \dots, n-1\}$ , а ребер у него тоже  $n-1$  штука. Добавим вершину  $n$  и ребро  $(n, i)$ , у которого  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ребро  $(n, n)$  будет появляться с вероятностью  $\frac{1}{2n-1}$ ; ребро  $(n, i)$  возникнет с вероятностью  $\frac{\deg i}{2n-1}$ , где  $\deg i$  — степень вершины  $i$  в графе  $G_1^{n-1}$ . Очевидно, что распределение вероятностей задано корректно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\deg i}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = 1.$$

Случайный граф  $G_1^n$  построен, и он удовлетворяет принципу предпочтительного присоединения.

Осталось перейти к  $G_k^n$ . Берем  $G_1^{kn}$ . Это граф с  $kn$  вершинами и  $kn$  ребрами. Делим множество его вершин на последовательные куски размера  $k$ :

$$\{1, \dots, k\}, \quad \{k+1, \dots, 2k\}, \quad \dots, \quad \{k(n-1)+1, \dots, kn\}.$$

Объявляем каждый кусок «вершиной», а ребра сохраняем, т. е. если были ребра внутри куска, то будут кратные петли, а если были ребра между двумя различными кусками — будут кратные ребра. Внешне — вполне себе Интернет, как мы его и представляли. Вершин стало  $n$ , а ребер — по-прежнему  $kn$ . Цель реализована.

#### 4.2.2. Статическая модификация, или LCD-модель

Введем такой объект, который называется *линейной хордовой диаграммой*. Вообще-то, он возник в топологии и теории узлов (см., например, [71]), но его комбинаторика оказывается напрямую связана с формированием веб-графа.

Итак, зафиксируем на оси абсцисс на плоскости  $2n$  точек:  $1, 2, 3, \dots, 2n$ . Разобьем эти точки на пары, и элементы каждой пары соединим дугой, лежащей в верхней полуплоскости. Полученный объект назовем *линейной хордовой диаграммой* (*linearized chord diagram* или, короче, LCD по-английски). Дуги в нем могут пересекаться, лежать друг под дружкой, но не могут иметь общих вершин. Количество различных LCD легко считается. Оно равно

$$l_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

По каждой LCD построим граф с  $n$  вершинами и  $n$  ребрами. Действуем так. Идем слева направо по оси абсцисс, пока не встретим впервые правый конец какой-либо дуги. Пусть этот конец имеет номер  $i_1$ . Объявляем набор  $\{1, \dots, i_1\}$  первой вершиной будущего графа. Снова идем от  $i_1 + 1$  направо до первого правого конца  $i_2$  какой-либо дуги. Объявляем второй вершиной графа набор  $\{i_1 + 1, \dots, i_2\}$ . И так далее. Поскольку правых концов у дуг в данной диаграмме  $n$  штук, получаем всего  $n$  вершин. А ребра порождаем дугами. Иными словами, две вершины соединяем ребром, коль скоро между соответствующими наборами есть дуга. Ребра ориентируем справа налево. Аналогично возникают петли. Дуг  $n$ , и ребер  $n$  (см. пример на рис. 13).

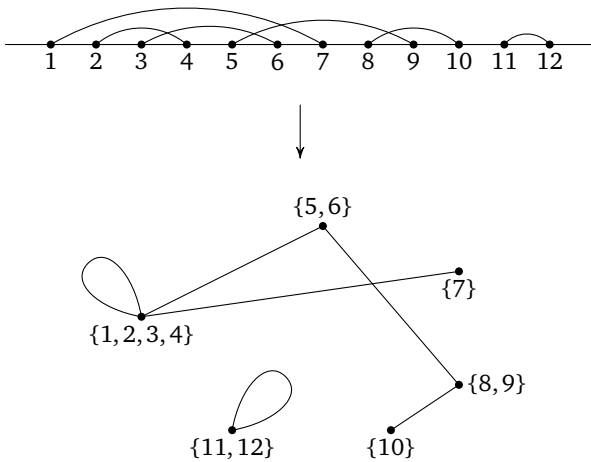


Рис. 13

Теперь считаем LCD случайной, т. е. полагаем вероятность каждой диаграммы равной  $1/l_n$ . Возникают случайные графы. Можно показать, что такие графы по своим вероятностным характеристикам практически неотличимы от графов  $G_1^n$ .

Графы с  $n$  вершинами и  $kn$  ребрами получаем тем же способом, что и в предыдущем пункте.

### 4.2.3. Некоторые результаты

Замечательна модель Боллобаша—Риордана не только тем, что с ее помощью наводится порядок в «каше», которую «заварили» Барабаш и Альберт, но еще и тем, что она полностью адекватна эмпирическим наблюдениям. Прежде всего справедлива

**Теорема 43.** Для любого  $k \geq 2$  и любого  $\varepsilon > 0$

$$P\left((1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{\ln \ln n} \leq \text{diam } G_k^n \leq (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{\ln \ln n}\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

На первый взгляд, утверждение кажется непонятным. Ну, хорошо: диаметр плотно сконцентрирован (по вероятности) около величины  $\ln n / \ln \ln n$ . А у нас ведь какие-то 5—7 были? Так ничего странного. Вершин в Интернете образца 1999 года около  $10^7$ . Значит,

$$\frac{\ln 10^7}{\ln \ln 10^7} = \frac{7 \ln 10}{\ln 7 + \ln \ln 10} \approx 6.$$

Фантастическое попадание. Отметим, что при недавней проверке с другими цифрами эмпирика снова подтвердилась.

Теорема 43 доказана в работе [72] авторами модели. А в работе [73] была внесена ясность и в вопрос о распределении степеней вершин.

**Теорема 44.** Для любого  $k \geq 1$  и любого  $d \leq n^{1/15}$

$$M\left(\frac{|\{i = 1, \dots, n : \text{indeg}_{G_k^n} i = d\}|}{n}\right) \sim \frac{2k(k+1)}{(d+k)(d+k+1)(d+k+2)}, \quad (2)$$

где  $\text{indeg}_{G_k^n} i$  — количество ребер, имеющих вершину  $i$  своим левым концом в графе  $G_k^n$ .

Поскольку  $k$  — константа, выражение в правой части (2) имеет вид  $\text{const}/d^3$ . Да это же в точности степенной закон! Правда, в формулировке теоремы написано математическое ожидание, а не вероятность, но одно из другого получается за счет мартингалных неравенств и соответствующих теорем о плотной концентрации меры около среднего (см. гл. 1 и [73]).

У теоремы 44 есть все же два неприятных момента. Первый состоит в том, что степень  $d$  в степенном законе, который в ней устанавливается, равна не 2,1, а 3. Второй — это ограничение  $d \leq n^{1/15}$ , которое ставит крест на практической применимости теоремы. Даже при  $n \approx 10^{12}$ , чего в природе (пока) не бывает, мы имеем лишь  $d \leq 10^{4/5}$ , и это нелепо.

Последний недостаток недавно устранил Е. А. Гречников — исследователь-разработчик в Яндексе, который получил более точный результат практически без ограничений на  $d$ . Грубо говоря, асимптотика (2) имеет место при всех  $d = o(n)$ . Статья Гречникова еще не опубликована.

Первым же недостатком занимались много и, в частности, предлагали различные альтернативные модели. Одну из таких моделей

мы обсудим в параграфе 4.3. Но прежде скажем еще несколько слов о свойствах LCD-модели.

Пусть  $H$  — фиксированный граф. Обозначим через  $\sharp(H, G_k^n)$  случайную величину, равную количеству подграфов графа  $G_k^n$ , изоморфных графу  $H$ . Как распределена эта величина? Изучали ее математическое ожидание в разных специальных случаях. Например, в работе [69] приводится громоздкая общая формула и пара ее симпатичных следствий, которые мы выпишем и здесь.

**Теорема 45.** Пусть  $k \geq 2$ . Пусть также  $K_3$  — полный граф на трех вершинах. Тогда

$$M(\sharp(K_3, G_k^n)) = (1 + o(1)) \cdot \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k+1)}{48} \cdot (\ln n)^3$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 46.** Пусть фиксированы  $k \geq 2$  и  $l \geq 3$ . Пусть также  $C_l$  — цикл на  $l$  вершинах. Тогда

$$M(\sharp(C_l, G_k^n)) = (1 + o(1)) \cdot c_{k,l} \cdot (\ln n)^l$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где  $c_{k,l}$  — это положительная константа. Более того, при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $c_{k,l} = \Theta(k^l)$ .

Студенты МФТИ А. Рябченко и Е. Самосват недавно (в несколько иной, но очень близкой модели) установили следующий общий факт.

**Теорема 47.** Пусть задан граф  $H$ , степени вершин которого равны  $d_1, \dots, d_s$ . Обозначим через  $\sharp(d_i = t)$  число вершин в  $H$ , степень каждой из которых равна  $t$ . Тогда

$$M(\sharp(H, G_k^n)) = \Theta(n^{\sharp(d_i=0)} \cdot (\sqrt{n})^{\sharp(d_i=1)} \cdot (\ln n)^{\sharp(d_i=2)}).$$

Зависимость от  $k$  занесена в константу  $\Theta$ .

Надо полагать, что нечто подобное было известно и авторам статьи [69], но мы ничего похожего в литературе не встречали. А такая запись результата очень удобна. Скажем, в теореме 45 речь идет про  $K_3$ . Ясно, что для  $K_3$  выполнено

$$\sharp(d_i = 0) = \sharp(d_i = 1) = 0, \quad \sharp(d_i = 2) = 3.$$

По теореме 47

$$M(\sharp(K_3, G_k^n)) = \Theta((\ln n)^3),$$

и это прекрасно согласуется с теоремой 45. Аналогично можно разобаться и с циклами (теорема 46). А если взять  $K_4$  — полный граф на четырех вершинах, — то теорема 47 скажет, что средняя его встречаемость в веб-графе постоянна. Иными словами, «тетраэдров» в веб-графах почти не бывает.



Отметим, что в реальном вебе случаются не только тетраэдры, но и клики куда большей мощности. Это связано с деятельностью спамеров, которые искусственно расставляют ссылки, желая повысить рейтинги сайтов, заплативших за раскрутку. Спам в модели Боллобаша — Риордана не учтен, и это тоже минус.

В следующем пункте мы приведем доказательство теоремы 44 в случае  $k = 1$ . Мы будем работать в терминах LCD-модели.

#### 4.2.4. Доказательство теоремы 44 при $k = 1$

Доказательство использует очень красивую «школьную» комбинаторику и идеи результатов о плотной концентрации. Договоримся сперва об обозначениях. Пусть  $d_i$  — это полная степень вершины  $i$  в графе  $G_1^n$ , т. е. в нашем случае  $d_i$  и  $\text{indeg}_{G_1^n} i$  суть величины, отличающиеся ровно на единицу. Положим  $D_m = d_1 + \dots + d_m$ .

Рассмотрим событие  $\{D_m - 2m = s\}$ , где  $0 \leq s \leq n - m$ . Очевидно, что это событие состоит в том, что последние  $n - m$  вершин графа  $G_1^n$  делают  $s$  ссылок-ребер на первые  $m$  его вершин. Действительно, сумма степеней вершин графа  $G_1^m$  равна  $2m$ , и, значит, оставшиеся  $s$  ребер в сумме степеней  $D_m$  идут извне графа  $G_1^m$ . В терминах диаграмм это, в свою очередь, эквивалентно тому, что  $m$ -й по счету правый конец дуги совпадает с точкой  $2m + s$ . Попробуем вычислить вероятность описанного события.

Искомая вероятность «классическая», т. е. нам просто нужно разделить на  $l_n$  (см. п. 4.2.2) количество тех диаграмм, которые благоприятствуют нашему событию: у каждой из этих диаграмм

- 1) точка  $2m + s$  служит правым концом некоторой дуги;
- 2) есть какие-то  $s$  точек среди  $\{1, \dots, 2m + s - 1\}$  и какие-то  $s$  точек среди  $\{2m + s + 1, \dots, 2n\}$ , которые соединены  $s$  дугами (с одним концом в множестве  $\{1, \dots, 2m + s - 1\}$  и другим — в множестве  $\{2m + s + 1, \dots, 2n\}$ ) в том или ином порядке (всего возможных порядков  $s!$ );
- 3) оставшиеся точки из множества  $\{1, \dots, 2m + s - 1\}$  (их  $2m - 2$ ) как-то разбиты на пары (дуги), и то же самое верно относительно оставшихся точек из множества  $\{2m + s + 1, \dots, 2n\}$  (их  $2n - 2m - 2s$ ).

В итоге имеем

$$P(D_m - 2m = s) = \frac{s!(2m + s - 1)C_{2m+s-2}^s l_{m-1} C_{2n-2m-s}^s l_{n-m-s}}{l_n} = \frac{2^{s+1}(2m + s - 1)!(2n - 2m - s)!n!}{s!(m - 1)!(n - m - s)!(2n)!}.$$

Сейчас мы найдем «наиболее вероятное» значение случайной величины  $D_m - 2m$ , т. е. величину  $s$ , при которой максимальна вероятность  $p_s = P(D_m - 2m = s)$ . Для этого сперва посмотрим на величину  $r_s = p_{s+1}/p_s$ :

$$r_s = \frac{p_{s+1}}{p_s} = 2 \frac{(2m+s)(n-m-s)}{(s+1)(2n-2m-s)}.$$

Допустим, мы доказали, что функция  $r_s$  убывающая. Что это значит? А это значит, что функция  $p_s$  либо возрастает, либо убывает, либо сначала возрастает, а затем убывает. В любом случае ее максимум соответствует моменту, когда  $r_s \approx 1$ . Мы не пишем  $r_s = 1$ , так как этого может вовсе не случиться при натуральных  $s$ . По сути, едва мы докажем убывание  $r_s$ , нам понадобится найти вещественный корень уравнения  $r_s = 1$  и взять от него верхнюю целую часть.

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{r_{s+1}}{r_s} &= \left(1 - \frac{2m-1}{(s+2)(2m+s)}\right) \left(1 - \frac{n-m}{(2n-2m-s-1)(n-m-s)}\right) \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{2m-1}{2n^2}\right) \left(1 - \frac{n-m}{2n^2}\right) \leq e^{-\frac{2m-1}{2n^2}} \cdot e^{-\frac{n-m}{2n^2}} \leq e^{-\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Убывание  $r_s$  доказано. Ищем, как и обещали, корень уравнения  $r_s = 1$ , благо это уравнение квадратное. Получаем точку

$$s_0 = \lceil -2m + \sqrt{4mn - 2n + 1/4 + 1/2} \rceil,$$

в которой достигается максимум вероятности  $p_s$ . В окрестности этой точки величина  $D_m - 2m$  плотно сконцентрирована. Оценим эту концентрацию.

Мы знаем, что  $r_{s_0} \leq 1$ . Следовательно, при  $x > 0$

$$r_{s_0+x} \leq r_{s_0+x-1} e^{-\frac{1}{2n}} \leq r_{s_0+x-2} e^{-\frac{2}{2n}} \leq \dots \leq r_{s_0} e^{-\frac{x}{2n}} \leq e^{-\frac{x}{2n}}.$$

Имеем в итоге

$$p_{s_0+x} \leq p_{s_0+x-1} e^{-\frac{x}{2n}} \leq p_{s_0+x-2} e^{-\frac{x}{2n}} e^{-\frac{x-1}{2n}} \leq \dots \leq p_{s_0} e^{-\frac{x(x-1)}{4n}} \leq e^{-\frac{x(x-1)}{4n}}.$$

Аналогичную оценку можно доказать и для  $p_{s_0-x}$ . Значит, при достаточно больших  $n$

$$P(|D_m - (2m + s_0)| \geq 3\sqrt{n \ln n}) \leq 2e^{-\frac{8n \ln n}{4n}} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку для каждого  $t$  выполнено неравенство

$$|s_0 - (2\sqrt{mn} - 2m)| \leq 2\sqrt{n},$$

имеем

$$P(|D_m - 2\sqrt{mn}| \geq 4\sqrt{n \ln n}) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. величина  $D_m$  при не слишком больших  $m$  плотно сконцентрирована около  $2\sqrt{mn}$ .

Теперь мы готовы найти условную вероятность

$$P(\text{indeg}_{G_1^t}(m+1) = d | D_m - 2m = s) = P(d_{m+1} = d + 1 | D_m - 2m = s).$$

Коль скоро условие  $D_m - 2m = s$  выполнено, часть LCD уже зафиксирована. А именно, среди точек  $1, \dots, 2m + s - 1$  есть множество точек  $A$  мощности  $s$ , состоящее из левых концов дуг, правые концы которых находятся где-то среди точек  $2m + s + 1, \dots, 2n$ ; в множестве  $\{1, \dots, 2m + s - 1\} \setminus A$  есть некоторая точка, служащая левым концом дуги, правый конец которой совпадает с  $2m + s$ ; остальные  $2m - 2$  точки как-то разбиты на пары-дуги. При любом описанном способе фиксации «левой» части LCD есть  $s! C_{2n-2m-s}^s l_{n-m-s}$  способов достроить ее до полноценной диаграммы. Указанное количество и будет знаменателем искомой вероятности. В числителе же будет количество  $t$  способов достроить левую часть LCD при дополнительном ограничении  $d_{m+1} = d + 1$ , которое означает следующее:

- 1) точка  $2m + s + d + 1$  служит правым концом некоторой дуги, а все точки из множества  $B = \{2m + s + 1, \dots, 2m + s + d\}$  являются левыми концами дуг;
- 2) среди точек из  $A \cup B$  (их  $s + d$ ) есть левый конец  $x$  дуги с правым концом в точке  $2m + s + d + 1$ ;
- 3) в множестве  $\{2m + s + d + 2, \dots, 2n\}$  (его мощность равна  $2n - 2m - s - d - 1$ ) есть подмножество  $C$ , состоящее из  $s + d - 1$  правых концов дуг, левые концы которых принадлежат множеству  $A \cup B \setminus \{x\}$ ;
- 4) множество  $\{2m + s + d + 2, \dots, 2n\} \setminus C$  (его мощность равна  $2n - 2m - 2s - 2d$ ) разбито на дуги.

Ясно, что

$$t = (s + d) C_{2n-2m-s-d-1}^{s+d-1} (s + d - 1)! l_{n-m-s-d}.$$

Здесь  $s + d$  — это число способов выбрать  $x$ , биномиальный коэффициент — это число способов выбрать  $C$ , величина  $(s + d - 1)!$  выражает количество способов соединить дугами точки из множеств  $A \cup B \setminus \{x\}$  и  $C$ , а множитель  $l_{n-m-s-d}$  возникает за счет свойства 4.

Итак,

$$P(d_{m+1} = d + 1 | D_m - 2m = s) = \frac{(s + d)C_{2n-2m-s-d-1}^{s+d-1} (s + d - 1)! l_{n-m-s-d}}{s! C_{2n-2m-s}^s l_{n-m-s}} =$$

$$= 2^d (s + d) \frac{(n - m - s)_d}{(2n - 2m - s)_{d+1}}, \quad (a)_b = \frac{a!}{(a - b)!}.$$

Разобьем область значений величин  $m$ ,  $d$  и  $s$  на две части. Сперва опишем первую часть  $\mathcal{L}_1$  (тогда ко второй части  $\mathcal{L}_2$  отойдет все остальное). В самом деле, пусть  $M = \lceil n^{4/5} / \ln n \rceil$ . Возьмем в качестве  $m$  любое число в пределах  $M \leq m \leq n - M$ . В качестве  $d$  возьмем любое число из промежутка  $0 \leq d \leq n^{1/15}$ . А  $s$  выберем из соотношения  $2m + s = D$ , где  $D$  — любое число, удовлетворяющее неравенству  $|D - 2\sqrt{mn}| \leq 4\sqrt{n \ln n}$ . Иными словами,  $D$  — это одно из наиболее вероятных значений величины  $D_m$ .

Понятно, что внутри  $\mathcal{L}_1$  мы имеем

$$s + d = D - 2m + d = 2\sqrt{mn} - 2m + O(\sqrt{n \ln n}) + O(n^{1/15}) =$$

$$= 2\sqrt{mn} - 2m + O(\sqrt{n \ln n}),$$

$$n - m - s = n + m - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}),$$

.....

$$n - m - s - d = n + m - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}),$$

причем константы во всех о-больших можно сделать одинаковыми. Аналогично

$$2n - 2m - s = 2n - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}),$$

.....

$$2n - 2m - s - d = 2n - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n})$$

с одними и теми же константами в о-большом. Значит,

$$P(d_{m+1} = d + 1 | D_m - 2m = s) =$$

$$= 2^d (2\sqrt{mn} - 2m + O(\sqrt{n \ln n})) \frac{(n + m - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}))^d}{(2n - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}))^{d+1}}.$$

Нетрудно видеть, далее, что

$$2\sqrt{mn} - 2m + O(\sqrt{n \ln n}) \sim 2\sqrt{mn} - 2m.$$

Более того, мы покажем, что

$$\begin{aligned}(n + m - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}))^d &\sim (n + m - 2\sqrt{mn})^d, \\ (2n - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}))^{d+1} &\sim (2n - 2\sqrt{mn})^{d+1}.\end{aligned}$$

Вернее, мы проверим только первую асимптотику, так как вторая получается совершенно аналогично. Итак,

$$\begin{aligned}(n + m - 2\sqrt{mn} + O(\sqrt{n \ln n}))^d &= \\ &= (n + m - 2\sqrt{mn})^d \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{n \ln n}}{n + m - 2\sqrt{mn}}\right)\right)^d.\end{aligned}$$

Далее,

$$\left(1 + O\left(\frac{\sqrt{n \ln n}}{n + m - 2\sqrt{mn}}\right)\right)^d \leq e^{O\left(\frac{d\sqrt{n \ln n}}{n + m - 2\sqrt{mn}}\right)},$$

и нам остается показать, что

$$\frac{d\sqrt{n \ln n}}{n + m - 2\sqrt{mn}} \rightarrow 0.$$

Поскольку  $m \leq n - M$ , можно написать

$$\begin{aligned}\frac{d\sqrt{n \ln n}}{n + m - 2\sqrt{mn}} &= \frac{d\sqrt{n \ln n}}{(\sqrt{n} - \sqrt{m})^2} = \frac{d\sqrt{n \ln n}}{n \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2} \leq \frac{d\sqrt{n \ln n}}{n \left(1 - \sqrt{\frac{n-M}{n}}\right)^2} = \\ &= \frac{d\sqrt{n \ln n}}{n \left(1 - \sqrt{1 - O\left(\frac{1}{n^{1/5} \ln^2 n}\right)}\right)^2} = \frac{d\sqrt{n \ln n}}{n O\left(\frac{1}{n^{2/5} \ln^2 n}\right)} = \\ &= O\left(\frac{n^{1/5} \sqrt{n \ln n} \ln^2 n}{n^{3/5}}\right) = O\left(\frac{(\ln n)^{5/2}}{n^{1/30}}\right) = o(1).\end{aligned}$$

Мы доказали обещанные асимптотики. Значит,

$$\begin{aligned}P(d_{m+1} = d + 1 | D_m = D) &\sim \\ &\sim \frac{2\sqrt{mn} - 2m}{2m - 2\sqrt{mn}} \left(\frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{m})^2}{2(n - \sqrt{mn})}\right)^d \sim \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d,\end{aligned}$$

причем асимптотика равномерна по всем  $D$  из нашей области  $\mathcal{L}_1$ , т. е. по всем  $D$ , таким что  $|D - 2\sqrt{mn}| \leq 4\sqrt{n \ln n}$ . Имеем, стало быть, по

формуле полной вероятности (см. § 1.5)

$$\begin{aligned}
 P(d_{m+1} = d+1) &= \sum_{D: |D-2\sqrt{mn}| \leq 4\sqrt{n \ln n}} P(d_{m+1} = d+1 | D_m = D) P(D_m = D) + \\
 &+ \sum_{D: |D-2\sqrt{mn}| > 4\sqrt{n \ln n}} P(d_{m+1} = d+1 | D_m = D) P(D_m = D) = \\
 &= (1+o(1)) \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d \sum_{D: |D-2\sqrt{mn}| \leq 4\sqrt{n \ln n}} P(D_m = D) + \\
 &+ O\left(\sum_{D: |D-2\sqrt{mn}| > 4\sqrt{n \ln n}} P(D_m = D)\right) = \\
 &= (1+o(1)) \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d + o(1/n),
 \end{aligned}$$

ведь

$$\begin{aligned}
 1 &\geq \sum_{D: |D-2\sqrt{mn}| \leq 4\sqrt{n \ln n}} P(D_m = D) = P(|D_m - 2\sqrt{mn}| \leq 4\sqrt{n \ln n}) \geq \\
 &\geq (1 - o(1/n)) \sim 1, \\
 \sum_{D: |D-2\sqrt{mn}| > 4\sqrt{n \ln n}} P(D_m = D) &= P(|D_m - 2\sqrt{mn}| > 4\sqrt{n \ln n}) = o(1/n).
 \end{aligned}$$

Итак, для всех наборов  $m, d, s$  из области  $\mathcal{L}_1$  имеем равномерную по этой области асимптотику

$$P(d_{m+1} = d+1) = (1+o(1)) \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d + o(1/n).$$

Обозначим через  $\xi$  количество вершин вида  $m+1$  с  $m \in [M, n-M]$  и со свойством  $d_{m+1} = d+1$  (мы по-прежнему живем в области  $\mathcal{L}_1$ ). Тогда ввиду линейности математического ожидания

$$M\xi = \sum_{m=M}^{n-M} P(d_{m+1} = d+1) = o(1) + \sum_{m=M}^{n-M} (1+o(1)) \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d.$$

Искомое же математическое ожидание отличается от уже найденного на величину порядка  $M$ :

$$\begin{aligned}
 M \left| \{i = 1, \dots, n : \text{indeg}_{G_1^n} i = d\} \right| &= \\
 &= O(M) + o(1) + (1+o(1)) \sum_{m=M}^{n-M} \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d.
 \end{aligned}$$

Можно показать (интуитивно это понятно), что

$$\begin{aligned} \sum_{m=M}^{n-M} \sqrt{\frac{m}{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)^d &\sim \\ &\sim n \int_{(M+1)/n}^{1-M/n} \sqrt{v}(1-\sqrt{v})^d dv \sim n \int_0^1 \sqrt{v}(1-\sqrt{v})^d dv. \end{aligned}$$

Последний интеграл явно вычисляется путем замены  $v = (1-u)^2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{v}(1-\sqrt{v})^d dv &= 2 \int_0^1 (1-u)^2 u^d du = \\ &= 2 \int_0^1 (u^d - 2u^{d+1} + u^{d+2}) du = \frac{4}{(d+1)(d+2)(d+3)}, \end{aligned}$$

и мы получаем, наконец,

$$\begin{aligned} M \left| \{i = 1, \dots, n : \text{indeg}_{G_t^n} i = d\} \right| &= \\ &= O(M) + (1 + o(1)) \frac{4n}{(d+1)(d+2)(d+3)} \sim \frac{4n}{(d+1)(d+2)(d+3)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### 4.3. Модель копирования

Здесь мы опишем еще одну очень интересную модель, которая также призвана объяснить феномен степенного закона в реальных сетях. Эта модель возникла практически в одно время с моделью Барабаши — Альберт. Она принадлежит Р. Кумару, П. Рагхавану, С. Раджагопалану, Д. Сивакумару, А. Томкинсу и Э. Упфалу (см. [74]).

Фиксируем  $\alpha \in (0, 1)$  и  $d \geq 1$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Случайный граф будет расти, и это будет похоже на процесс из пункта 4.2.1. Однако здесь процесс будет устроен совсем по-другому.

В качестве начального графа возьмем любой  $d$ -регулярный граф (граф, у которого степень каждой вершины равна  $d$ ). Пусть построен граф с номером  $t$ . Обозначим его  $G_t = (V_t, E_t)$ . Здесь  $V_t = \{u_1, \dots, u_s\}$ , где  $s$  отличается от  $t$  на число вершин начального графа, т. е. на некоторую константу, выражаемую через  $d$ . Добавим к  $G_t$  одну новую вершину  $u_{s+1}$  и  $d$  ребер, выходящих из  $u_{s+1}$ . Для этого сперва выберем случайную вершину  $p \in V_t$  (все вершины в  $V_t$  равновероятны). Одно за другим строим ребра из  $u_{s+1}$  в  $V_t$ . На шаге с номером  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,

разыгрываем случайную величину, которая с вероятностью  $\alpha$  принимает значение 1 («монетка падает решкой кверху») и с вероятностью  $1 - \alpha$  принимает значение 0 («монетка падает орлом кверху»). Если вышла единица, то выпускаем ребро из  $u_{s+1}$  в случайную вершину из  $V_t$  (все вершины в  $V_t$  равновероятны). Если вышел ноль, то берем  $i$ -го по номеру соседа вершины  $p$ . Последнее действие всегда возможно, так как по построению у каждой вершины не менее  $d$  соседей.

Объяснить это можно так. Появляется новый сайт. Проставляя очередную ссылку, его владелец с некоторой вероятностью будет ориентироваться на кого-то из своих предшественников. Скажем, сайт посвящен автомобилям. Вероятно, владелец возьмет один из уже существовавших сайтов про автомобили и *скопирует* оттуда ссылку (с точки зрения стороннего наблюдателя, вполне случайную). Это ситуация, когда монетка выпала орлом кверху ( $p$  — это сайт, с которого копируются ссылки). Однако при простановке ссылки владелец может и никого не копировать, а случайно (по нашему мнению) цитировать кого-то из предшественников. Это случай выпадения решки. Таким образом,  $1 - \alpha$  — это вероятность копирования или, если угодно, вероятность выбора, мотивированного тематикой сайта.

Основной результат из [74] — это теорема 48.

**Теорема 48.** Пусть  $N_{t,r}$  — это математическое ожидание числа вершин степени  $r$  в графе  $G_t$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{t,r}}{t} = \Theta\left(r^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}\right).$$

Пафос теоремы в том, что в ней мы снова приходим к степенному закону. Более того, если вероятность копирования близка к 1 (а величина  $\alpha$  — к нулю), то показатель степени может равняться ожидаемой величине 2,1, чего до сих пор у нас не было.

В целом распределение степеней вершин в модели копирования очень похоже на распределение степеней вершин в модели Боллобаша — Риордана. В остальной модели сильно разнятся. Например, в модели Боллобаша — Риордана практически отсутствуют плотные двудольные подграфы (см. теорему 47); в модели копирования таких подграфов полно. Это особенно важно ввиду того, что спамерские структуры, о которых мы вскользь говорили в конце пункта 4.2.3, зачастую образуют именно двудольные графы с плотной перелинковой.



## 5. Приложение

В этом разделе мы достаточно конспективно изложим ряд аналитических обозначений, которые мы используем на протяжении книги. Также мы приведем достаточно много примеров, аккуратное изучение которых поможет читателю ориентироваться в тех местах громоздких выкладках, которые мы зачастую производим.

Пусть даны две функции  $f$  и  $g$  натурального аргумента  $n$ . Мы будем писать  $f = o(g)$  или  $f(n) = o(g(n))$  (читается « $f$  равна о-малому от  $g$ »), если существует функция  $\alpha = \alpha(n)$ , которая стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и с которой  $f(n) = \alpha(n)g(n)$ . Если бы функция  $g$  была ненулевой при всех  $n$ , то можно было бы написать  $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Однако это не всегда так, и первый вариант определения предпочтителен.

### Примеры.

- 1) Если  $f(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $f = o(c)$ , где  $c$  — любая ненулевая константа. Пишут для определенности  $f = o(1)$ . Выражение  $f = o(2)$  или типа того не принято.
- 2) Очевидно,  $n = o(n^2)$ ,  $n^2 = o(n^3)$ , и т. д.
- 3) Записи  $2^{o(n)}$  и  $o(2^n)$  не равносильны. Например,  $\frac{2^n}{n} = o(2^n)$ , но в то же время  $\frac{2^n}{n} = 2^{n - \log_2 n} \neq 2^{o(n)}$ , поскольку  $n - \log_2 n \neq o(n)$ .
- 4) Широко распространена запись

$$f(n) = (2 + o(1))^n, \quad f(n) = (3 + o(1))^n \quad \text{и т. д.}$$

Подразумевается, что *существует* функция  $\alpha = o(1)$ , с которой выполнены указанные равенства. Не стоит думать, однако, что если, например,  $f(n) = (2 + o(1))^n$ , то  $f(n)$  не сильно отличается от  $2^n$ . Скажем,

$$f(n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n = 2^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

и второй сомножитель стремится к  $\sqrt{e}$  (т. е.  $f(n)$  уже в константу раз больше, чем  $2^n$ ). Если же и вовсе

$$f(n) = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = 2^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^n,$$

то отношение  $f(n)$  и степени двойки с ростом  $n$  будет вести себя как  $e^{\sqrt{n}/2}$ , т. е. как весьма быстро растущая функция.

«О-малыми» можно «жонглировать»:

$$\begin{aligned}(1 + o(1))(2 + o(1)) &= 2 + o(1), & (1 + o(1))^{17 - o(1)} &= 1 + o(1), \\ (3 + o(1))^{n - o(1)} &= (3 + o(1))^n, & n^{37} (2 + o(1))^n &= (2 + o(1))^n, \\ \frac{(4 + o(1))^n}{(2 + o(1))^n} &= (2 + o(1))^n, & \dots &\end{aligned}$$

Надо только быть в известной степени аккуратным.

Еще одно важное обозначение — это  $f = O(g)$  (читается « $f$  равна о-большому от  $g$ »). Подразумевается, что существует константа  $c > 0$ , с которой при всех  $n$  выполнено неравенство  $|f(n)| \leq c|g(n)|$ . Константа  $c$  не обязана быть больше единицы! Запись  $O(1)$  равносильна записи  $O(10000)$  и т. д., но используют обычно только первый вариант записи.

### Примеры.

- 1) Если  $f = o(g)$ , то  $f = O(g)$ . Обратное неверно:  $f(n) = n$ ,  $g(n) = n/2$ .
- 2) Очевидно,  $n = O(n)$ ,  $n^2 = O(n^2 + n)$ , и т. д.

Аналогично вводится запись  $f = \Omega(g)$ . Она равносильна утверждению о том, что  $g = O(f)$ . Наконец, запись  $f = \Theta(g)$  означает, что  $f = O(g)$  и одновременно  $f = \Omega(g)$ , т. е. если  $f$  и  $g$  различаются, то не более чем в ограниченное при всех  $n$  количество раз. Например  $n^2 = \Theta(2n^2 + \sqrt{n})$ .

Последнее важное для нас обозначение — это  $f \sim g$  (говорят « $f$  асимптотически равна  $g$ »). Имеется в виду, что  $f(n) = g(n) + o(g)$  или, что то же самое,  $f(n) = (1 + o(1))g(n)$ . Если  $g(n) \neq 0$ , то можно сказать, что  $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 1$ . Например,  $n^2 \sim n^2 + n$  или

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \sqrt{e} \cdot 2^n.$$

Также в книге мы используем стандартное неравенство  $\ln(1 - x) \leq -x$  и равенства

$$\ln(1 - x) = O(x), \quad \sqrt{1 - f(n)} = 1 + O(f) \quad \text{при } f = o(1).$$

## Литература

1. *Bollobás B.* Random Graphs. 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 2001.
2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2002.
3. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random graphs. Wiley, NY, 2000.
4. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge Univ. Press, 2006.
5. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматлит, 1961.
6. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
8. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989.
9. *Райгородский А. М.* Остроугольные треугольники Данцера—Грюнбаума. М.: МЦНМО, 2009.
10. *Райгородский А. М.* Теория вероятностей и комбинаторная геометрия // Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009. С. 381—384.
11. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
12. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
13. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
14. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
15. *Берж К.* Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962.
16. *Оре О.* Графы и их применение. М.: Наука, 1965.
17. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, 1969.
18. *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Инст. Мат., 2002.
19. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
20. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 290—297.
21. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1960. V. 5. P. 17—61.
22. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo. 1961. V. 38. P. 343—347.
23. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
24. *Ledoux M.* The concentration of measure phenomenon // Mathematical Surveys and Monographs 89. AMS, 2001.
25. *Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R.* The strong perfect graph theorem // Ann. of Math. 2006. V. 164, № 1. P. 51—229.
26. *Ramsey F. P.* On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1930. V. 30. P. 264—286.
27. *P. Erdős, Szekeres G.* A combinatorial problem in geometry // Compositio Math. 1935. V. 2. P. 463—470.

28. *Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H.* Ramsey theory. 2nd ed. NY: John Wiley and Sons, 1990.
29. *Грэхэм Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.
30. *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2008.
31. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007.
32. [http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem).
33. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.; Ижевск: Физматлит, 2003.
34. *Conlon D.* A new upper bound for diagonal Ramsey numbers // *Ann. of Math.* 2009. V. 170. P. 941–960.
35. *Верецагин Н. К., Шень А.* Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000.
36. *Успенский В. А., Верецагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 1997.
37. *Райгородский А. М.* Случайные графы // *Математика в задачах*, М.: МЦНМО, 2009. С. 312–315.
38. *Barbour A. D.* Poisson convergence and random graphs // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1982. V. 92. P. 349–359.
39. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
40. *Hopcroft J., Wong J.* Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs // *Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing.* 1974, P. 172–184.
41. *Booth K. S., Lueker G. S.* Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms // *J. Comput. System Sci.* 1976. V. 13. P. 335–379.
42. *Booth K. S., Lueker G. S.* A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism // *Journal of the ACM.* 1979. V. 26, № 2. P. 183–195.
43. *Luks E. M.* Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time // *Journal of Computer and System Sciences.* 1982. V. 25. P. 42–65.
44. *Райгородский А. М.* Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2003.
45. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2006.
46. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // *Успехи матем. наук.* 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.
47. *Raigorodskii A. M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // *Mathematical Intelligencer.* 2004. V. 26, № 4. P. 4–12.
48. *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики и ее приложения».* 2007. Т. 23. С. 147–164.
49. *Сойффер А.* Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // *Матем. просвещение.* 2004. Вып. 8.

50. Székely L. A. Erdős on unit distances and the Szemerédi—Trotter theorems // Paul Erdős and his mathematics (Budapest, 1999). Budapest: J. Bolyai Math. Soc., 2002. (Bolyai Soc. Math. Stud.; V. 11). P. 649—666.
51. Brass P., Moser W., Pach J. Research problems in discrete geometry. Springer, 2005.
52. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
53. Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S. Excursions into combinatorial geometry // Universitext. Berlin: Springer, 1997.
54. Frankl P., Rödl R. Forbidden intersections // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 300. P. 259—286.
55. Horadam K. J. Hadamard matrices and their applications. Princeton University Press, 2007.
56. Райгородский А. М. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2009.
57. Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1—24.
58. Frankl P., Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357—368.
59. Aigner M., Ziegler G. M. Proofs from THE BOOK. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
60. Аржанцев И. В., Богачев В. И., Заславский А. А., Протасов В. Ю., Райгородский А. М., Скопенков А. Б. Студенческие олимпиады в МГУ // Матем. просвещение. 2010. Т. 14. С. 225—234.
61. Райгородский А. М., Рубанов О. И. О дистанционных графах с большим хроматическим числом и без больших клик // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 417—428.
62. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
63. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: УРСС, 2004.
64. Райгородский А. М., Рубанов О. И., Кошелев В. А. Хроматические числа // Квант. 2008. № 3. С. 13—22.
65. Райгородский А. М., Михайлов К. А. О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в  $\{0, 1\}^n$  // Матем. сборник. 2009. Т. 200, № 12. С. 63—80.
66. Barabási L.-A., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V. 286. P. 509—512.
67. Barabási L.-A., Albert R., Jeong H. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web // Physica. 2000. V. A281. P. 69—77.
68. Albert R., Jeong H., Barabási L.-A. Diameter of the world-wide web // Nature. 1999. V. 401. P. 130—131.
69. Bollobás B., Riordan O. Mathematical results on scale-free random graphs // Handbook of graphs and networks. Weinheim: Wiley-VCH, 2003. P. 1—34.
70. Райгородский А. М. Экстремальные задачи теории графов и анализ данных. М.: РХД, 2009.

71. *Stoimenow A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // *J. Knot Theory Ramifications*. 1998. V. 7, № 1. P. 93–114.
72. *Bollobás B., Riordan O.* The diameter of a scale-free random graph // *Combinatorica*. 2004. V. 24, № 1. P. 5–34.
73. *Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G.* The degree sequence of a scale-free random graph process // *Random Structures Algorithms*. 2001. V. 18, № 3. P. 279–290.
74. *Kumar R., Raghavan P., Rajagopalan S., Sivakumar D., Tomkins A., Upfal E.* Stochastic models for the web graph // *Proc. 41st Symposium on Foundations of Computer Science*. 2000.

Райгородский Андрей Михайлович

Модели случайных графов

Подписано в печать 13.07.2011 г. Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 8,5. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография „САРМА“».

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru)

---