

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2008

Е. Ю. Смирнов

Группы отражений и правильные многогранники

Издание второе, исправленное и дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 514.113.5, 512.542

ББК 22.1.51, 22.14

C50

Смирнов Е. Ю.

C50 Группы отражений и правильные многогранники. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2018. — 56 с.

ISBN 978-5-4439-1268-4

Брошюра написана по материалам цикла лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 20—26 июля 2008 г. В ней излагается классификация правильных многогранников в евклидовом пространстве произвольной размерности. Попутно читатель знакомится с такими важными алгебраическими понятиями, как группы отражений и системы корней.

Материал, изложенный в брошюре, иллюстрирует связь геометрии, теории групп и комбинаторики.

Брошюра адресована студентам младших курсов.

Первое издание книги вышло 2009 году.

ББК 22.1.51, 22.14



Научно-популярное издание

Евгений Юрьевич Смирнов

ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ И ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Редактор В. А. Клепцын

Подписано в печать 27.02.2018 г. Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 3,5. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».

105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mcme.ru

ISBN 978-5-4439-1268-4



9 785443 912684 >

© Смирнов Е. Ю., 2018.

© МЦНМО, 2018.

Оглавление

Введение	5
Лекция 1	9
1.1. Правильные многогранники на плоскости и в пространстве	9
1.2. Группы отражений: основные определения и первые меры	12
Лекция 2	15
2.1. Системы корней	15
2.2. Простые и положительные корни	16
2.3. Сопряженность систем простых и положительных корней	20
2.4. Группа отражений порождается простыми отражениями	21
2.5. Многогранные конусы и двойственность	22
2.6. Камеры Вейля и фундаментальная область группы отражений	23
Интермедия: группы отражений и кватернионы	26
2 ¹ / ₂ .1. Алгебра кватернионов	26
2 ¹ / ₂ .2. Кватернионы единичного модуля и чисто мнимые кватернионы	28
2 ¹ / ₂ .3. Действие $Sp(1)$ на V	29
2 ¹ / ₂ .4. Конечные подгруппы в \mathbb{H} суть системы корней	31
2 ¹ / ₂ .5. Бинарные группы платоновых тел	31
Лекция 3	34
3.1. Графы Кокстера: определение	34
3.2. Классификация конечных групп отражений: формулировка результата	35
3.3. Доказательство теоремы о классификации: инструментарий	36
3.4. Доказательство теоремы о классификации: необходимость	38
3.5. Доказательство теоремы о классификации: достаточность	41
Лекция 4	44
4.1. Правильные многогранники и их группы симметрий	44

4.2. Образующие группы симметрий правильного многогранника и соотношения между ними	46
4.3. Система корней группы симметрий правильного многогранника	47
4.4. Построение правильного многогранника по его группе симметрий	49
4.5. Подсчет числа граней у правильных многогранников	52
Литература	56

Введение

Основной целью этой брошюры является описание всех правильных многогранников в пространстве произвольной размерности. На плоскости для всякого $m \geq 3$ существует ровно один (с точностью до подобия) правильный m -угольник. В трехмерном пространстве правильных многогранников пять: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. А что происходит в пространствах других размерностей?

* * *

Правильные многогранники известны человечеству с давних времен. Так, например, недавно в Шотландии при раскопках были обнаружены камни, которые, как считают некоторые исследователи, огранены в виде всех пяти правильных многогранников. Эти находки относят ко второму тысячелетию до нашей эры. А бронзовые и каменные додекаэдры римских времен (I—III вв. н. э.) археологи находили на территории многих европейских стран от Англии до Венгрии; назначение их остается неясным.

Первое письменное упоминание о правильных многогранниках принадлежит грекам. Пифагорейцам были известны тетраэдр, куб и октаэдр. Описание додекаэдра и икосаэдра приписывается Тезету Афинскому (начало IV в. до н. э.); по-видимому, он же доказал, что других правильных многогранников не существует.

Наиболее известное описание правильных многогранников содержится в диалоге Платона «Тимей», написанном около 360 г. до н. э. Именно поэтому они часто называются платоновыми телами. В «Тимее» приводятся конструкции четырех многогранников и говорится, что они олицетворяют четыре стихии: тетраэдр — это огонь, куб — земля, октаэдр — воздух, а икосаэдр — вода. Додекаэдр, согласно Платону, символизирует Вселенную.

Идеи о ключевой роли правильных многогранников в устройстве мироздания пытался развить Иоганн Кеплер в своей работе «Mysterium Cosmographicum» (1596 г.). Кеплер предполагал, что если расположить пять платоновых тел в определенном порядке между шестью концентрическими сферами так, чтобы каждая сфера была описана вокруг меньшего многогранника и вписана в больший, то радиусы этих сфер будут пропорциональны расстояниям от

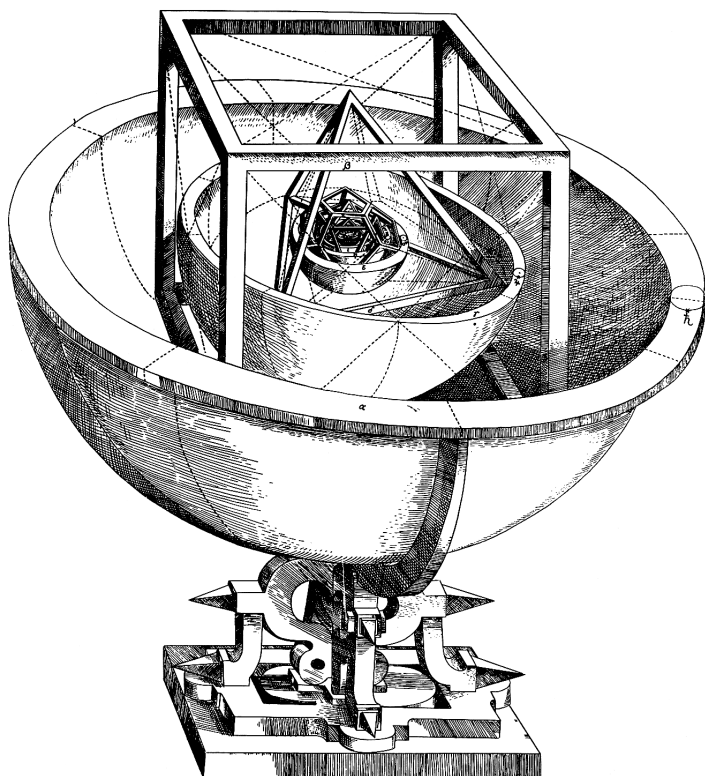


Рис. 1. Устройство Солнечной системы по Кеплеру

Солнца до всех шести известных в те времена планет: Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна. Правда, впоследствии сам Кеплер на основании более точных измерений и вычислений пришел к выводу об ошибочности такой модели.

* * *

Задача классификации правильных многогранников в пространстве произвольной размерности была решена швейцарским геометром Людвигом Шлефли в 1852 году. Его работу [11], посвященную этой задаче, из-за ее огромного объема — более 200 страниц! — долгое время не публиковали; опубликована она была существенно позже, в 1901 году, уже после смерти ее автора.

Шлефли показал, что в пространстве размерности 5 и выше существует только три правильных многогранника: правильный *симплекс* (аналог тетраэдра), *n*-*мерный куб* и многогранник, двойственный к нему (аналог трехмерного октаэдра), — *кокуб*. В четырехмерном пространстве, кроме этих трех, существует еще три исключительных правильных многогранника, число граней которых равно 24, 120 и 600 соответственно.

Конструкции

Доказательство теоремы о классификации правильных многогранников, приводимое в этой брошюре, существенно отличается от исходного доказательства Шлефли. Следуя общему принципу, восходящему к Феликсу Клейну, — «геометрия есть изучение симметрий объектов» — мы будем изучать в первую очередь не сами многогранники, а их группы симметрий. Выяснив в первой лекции, что группы симметрий правильных многогранников в размерностях 2 и 3 (а на самом деле, как будет показано в четвертой лекции, и в любой размерности) *порождены отражениями*, в следующих двух лекциях мы займемся классификацией *всех* (в том числе не связанных ни с какими многогранниками) групп, порожденных отражениями. В третьей лекции по каждой такой группе будет построен некоторый граф (называемый *графом Кокстера* этой группы), что позволит дать простое комбинаторное описание всех таких групп. Наконец, в четвертой лекции мы вернемся к правильным многогранникам и дадим при помощи полученных результатов о группах отражений описание всех таких многогранников (в любой размерности).

Об этой брошюре

Эта брошюра написана по материалам одноименного курса из четырех занятий, прочитанного мною в июле 2008 г. на VIII летней школе «Современная математика» в Дубне. По сравнению с записками, раздававшимися слушателям после занятий, текст существенно переработан и расширен.

Большинство участников этих занятий составляли студенты первого и второго курсов математических специальностей. Поэтому те конструкции и утверждения, которые обычно проходятся в стандартных университетских курсах линейной и общей алгебры, я ли-

бо предполагал известными, либо ограничивался кратким напоминанием.

Я благодарен организаторам школы за предоставленную возможность прочесть этот курс, а также всем слушателям за их активное участие, многочисленные содержательные вопросы, комментарии и обсуждения. Я признателен В. И. Арнольду, сообщившему мне конструкцию исключительных правильных многогранников, использующую кватернионы, и Г. А. Мерзону, сделавшему ряд ценных замечаний к тексту. Отдельно хочу поблагодарить В. А. Клепцына за постоянную помощь и поддержку; и курс, и эти записки появились во многом благодаря его искреннему интересу, настойчивости и доброжелательности.

* * *

Во втором издании брошюры был существенно расширен раздел «Интермедия» — туда добавлены необходимые сведения об алгебре кватернионов. Кроме того, исправлен ряд неточностей и опечаток и приведены более простые доказательства некоторых утверждений. Я благодарен всем читателям, высказавшим свои замечания к тексту, в особенности И. В. Аржанцеву и Н. Ю. Медведю.

Лекция 1

Свет мой, зеркальце, скажи...

А. С. Пушкин

1.1. Правильные многогранники на плоскости и в пространстве

Пусть E — конечномерное евклидово пространство. Обозначим через $\text{Sym } E$ группу движений пространства E .

Определение 1.1. Пусть M — какое-либо множество в E . Через $\text{Sym } M$ обозначим *группу симметрий* этого множества, т. е. множество движений пространства E , переводящих M в себя (очевидным образом, оно образует группу):

$$\text{Sym } M = \{f \in \text{Sym } E \mid f(M) = M\}.$$

Через $\text{Sym}^+ M$ будем обозначать *группу вращений множества M* , т. е. группу симметрий множества M , сохраняющих ориентацию пространства.

Определение 1.2. *Выпуклым многогранником* называется ограниченная фигура M , полученная как пересечение конечного числа полупространств в E . *Размерностью* многогранника M называется размерность наименьшего аффинного подпространства в E , содержащего M . Многогранник называется *невырожденным*, если его размерность равна $\dim E$.

Далее под многогранником мы будем без дополнительных оговорок подразумевать выпуклый многогранник.

Упражнение 1.3. Дайте определение грани многогранника и ее размерности.

Если M — многогранник, то группа $\text{Sym } M$ будет сохранять его центр масс. Поэтому мы можем рассматривать ее как подгруппу в группе ортогональных преобразований $O(V)$ векторного пространства V , ассоциированного с евклидовым пространством E (поместив начало координат пространства V в центр масс многогранника).

Пусть многогранник M невырожденный. Тогда движение пространства E полностью задается образами вершин многогранника. Кроме того, при движении многогранника вершины обязаны переходить в вершины (почему?). Следовательно, имеется вложение группы $\text{Sym } M$ в группу перестановок вершин многогранника M , т. е. в симметрическую группу

$$\text{Sym } M \hookrightarrow \text{Sym}(\text{Vert}(M)).$$

Значит, $\text{Sym } M$ — конечная группа.

Пример 1.4. Пусть \mathbb{D}_m — правильный m -угольник в \mathbb{R}^2 . Тогда группа $\text{Sym } \mathbb{D}_m$ (ее называют *группой диэдра*) состоит из $2m$ элементов, m из которых (обозначим их r_0, \dots, r_{m-1}) являются поворотами на углы $2\pi k/m$, где $0 \leq k < m$ (они же и образуют подгруппу $\text{Sym}^+ \mathbb{D}_m$; при этом $r_0 = \text{Id}$ есть тождественное преобразование), а другие m суть симметрии s_1, \dots, s_m относительно прямых, соединяющих вершины m -угольника и середины его сторон с его центром.

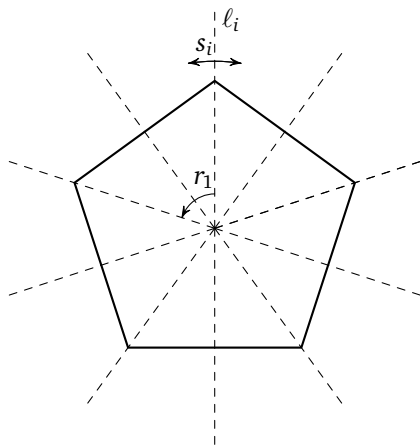


Рис. 2. Образующие группы диэдра

Упражнение 1.5. Покажите, что $\text{Sym } \mathbb{D}_m$ порождается как группа двумя преобразованиями: поворотом r_1 на угол $2\pi/m$ и любой из симметрий s_k .

Упражнение 1.6. Опишите классы сопряженности в группе диэдра (рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного m).

Нетрудно выяснить, чему равна композиция двух произвольных осевых симметрий на плоскости.

Упражнение 1.7. Пусть s и s' — осевые симметрии относительно прямых ℓ и ℓ' соответственно. Покажите, что $s's$ есть поворот на угол 2θ , где θ — угол между прямыми ℓ и ℓ' .

Замечание. Отсюда следует, что осевые симметрии s и s' порождают конечную группу тогда и только тогда, когда угол θ (в обозначениях предыдущего упражнения) соизмерим с π .

Тем самым в группе диэдра выполнено соотношение $s_{k+1}s_k = r_1$. Иными словами, композиция симметрий относительно двух осей симметрии m -угольника, угол между которыми минимален (т. е. составляет π/m), есть поворот на угол $2\pi/m$. Мы получили еще один способ породить группу диэдра двумя элементами:

$$\text{Sym } \mathbb{D}_m = \langle s_k, s_{k+1} \rangle.$$

Упражнение 1.8. Пусть g и g' — два элемента из группы диэдра \mathbb{D}_m . Выясните, при каких условиях g и g' порождают всю группу $\text{Sym } \mathbb{D}_m$.

Теперь перейдем к описанию групп симметрий правильных многогранников в \mathbb{R}^3 . Начнем с тетраэдра.

Предложение 1.9. Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — правильный тетраэдр. Тогда $\text{Sym } T$ изоморфна группе перестановок \mathfrak{S}_4 .

Доказательство. Как мы уже знаем, группа симметрий многогранника вкладывается в группу перестановок его вершин: $\text{Sym } T \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$.

Докажем, что образ этого вложения в случае тетраэдра есть вся группа перестановок \mathfrak{S}_4 . Для этого достаточно показать, что группа $\text{Sym } T$ содержит все симметрии, соответствующие транспозициям, т. е. перестановкам, меняющим местами два элемента из четырех и оставляющим на месте два других элемента.

Предъявим симметрию тетраэдра σ_{ij} , соответствующую транспозиции (ij) . Это будет симметрия относительно плоскости, проходящей через центр масс тетраэдра и перпендикулярной ребру, соединяющему i -ю и j -ю вершины. Остальные две вершины тетраэдра будут содержаться в этой плоскости, следовательно, будут неподвижны относительно σ_{ij} (см. рис. 3). \square

Отметим, что и группа симметрий диэдра, и группа симметрий тетраэдра порождаются *отражениями* — симметриями относительно подпространств коразмерности 1; в случае диэдра это были симметрии относительно прямых, а в случае тетраэдра — симметрии относительно плоскостей.

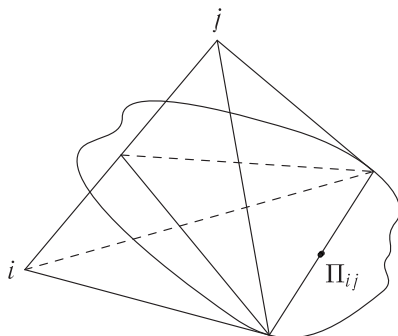


Рис. 3. Симметрия относительно плоскости Π_{ij} соответствует транспозиции (ij)

Упражнение 1.10. Покажите, что группу симметрий тетраэдра $\text{Sym } T$ можно породить тремя отображениями.

Упражнение 1.11. Покажите, что $\text{Sym}^+ T$ есть группа четных перестановок \mathfrak{A}_4 .

Описание групп симметрий остальных правильных многогранников в \mathbb{R}^3 мы оставляем читателю в качестве задачи.

Задача 1.12. а) Опишите группы вращений и симметрий куба и додекаэдра (они совпадают с соответствующими группами для октаэдра и икосаэдра — почему?). А именно, докажите, что $\text{Sym}^+ C \cong \mathfrak{S}_4$, $\text{Sym } C \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\text{Sym}^+ D \cong \mathfrak{A}_5$, $\text{Sym } D \cong \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$.

б) Докажите, что группы симметрий куба и додекаэдра тоже порождаются отражениями (т. е. симметриями относительно плоскостей). Какое наименьшее количество отражений нужно взять, чтобы породить эти группы?

Указание. Для описания группы симметрий куба рассмотрите действие этой группы на четырех главных диагоналях куба. Для описания группы додекаэдра может пригодиться следующий факт: в додекаэдр можно вписать пять кубов (они называются *кубами Кеплера*).

1.2. Группы отражений:

основные определения и первые примеры

Мы рассмотрели группы симметрий правильных многоугольников и платоновых тел и выяснили, что они все обладают замечательным свойством: они порождаются отражениями относительно

прямых и плоскостей соответственно. Поэтому естественно было бы обобщить понятие групп, порожденных отражениями, на случай пространства произвольной размерности и изучить свойства таких групп. Этим мы сейчас и займемся.

Итак, пусть V — n -мерное евклидово векторное пространство над \mathbb{R} . Возьмем какой-нибудь ненулевой вектор $\alpha \in V$. Обозначим через H_α ортогональную ему гиперплоскость:

$$H_\alpha = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) = 0\}.$$

Определение 1.13. *Отражением* относительно гиперплоскости H_α называется преобразование $s_\alpha \in O(V)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$;
- s_α поточечно оставляет на месте «зеркало» H_α : $s_\alpha(\beta) = \beta$ для всех $\beta \in H_\alpha$.

Упражнение 1.14 (очень важное!). Докажите, что преобразование s_α задается следующей формулой:

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2 \frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Определение 1.15. Конечная подгруппа $W \subset O(V)$ называется *группой отражений*, если существуют такие отражения $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r}$, что

$$W = \langle s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r} \rangle.$$

Замечание. Правильнее было бы называть W *группой, порожденной отражениями*, так как она, разумеется, состоит не только из отражений. Но выражение «группа отражений» короче, так что мы позволим себе эту вольность речи.

Замечание (для специалистов). Мы определяем группу отражений как подгруппу в $O(V)$. Таким образом, группой отражений правильно считать не абстрактную группу, а пару, состоящую из группы W и ее фиксированного представления в пространстве V .

В завершение этой лекции мы приведем три важных серии примеров групп отражений в пространствах произвольной размерности. У этих групп даже имеются собственные названия: A_n , B_n и D_n .

Пример 1.16 (A_{n-1} , $n \geq 2$). Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис пространства V . Рассмотрим *симметрическую группу* \mathfrak{S}_n , действующую на V перестановками базисных векторов. Заметим, что транспозиция (i, j) действует как отражение, переводящее вектор $e_i - e_j$ в противоположный и оставляющее на месте ортого-

нальную ему гиперплоскость (состоящую из всех векторов, у которых равны i -я и j -я координаты). Поскольку группа \mathfrak{S}_n порождена транспозициями, она является группой отражений. Заметим также, что она даже порождается $n - 1$ транспозицией вида $(i, i + 1)$; это представление пригодится нам в дальнейшем.

Упражнение 1.17. Убедитесь, что при таком действии \mathfrak{S}_n на V все отражения соответствуют транспозициям в \mathfrak{S}_n .

Действие \mathfrak{S}_n на V можно «уменьшить», рассмотрев в V гиперплоскость $\tilde{V} = (e_1 + e_2 + \dots + e_n)^\perp$. Поскольку вектор $e_1 + e_2 + \dots + e_n$ инвариантен относительно \mathfrak{S}_n , группа \mathfrak{S}_n действует и на \tilde{V} . У этого действия уже нет ненулевых векторов и даже подпространств, инвариантных относительно всей группы. В таком случае говорят, что \tilde{V} является *неприводимым представлением* группы \mathfrak{S}_n .

Пример 1.18 ($B_n, n \geq 2$). Пусть снова $V = \mathbb{R}^n$. Пусть на V , как и в предыдущем примере, действует перестановками координат группа \mathfrak{S}_n . Рассмотрим еще n отражений s_{e_i} , каждое из которых будет переводить базисный вектор e_i в $-e_i$ и оставлять все остальные базисные векторы на месте. Эти смены знаков образуют группу порядка 2^n , изоморфную $(\mathbb{Z}_2)^n$. Полученные две группы пересекаются тривиально, и $(\mathbb{Z}_2)^n$ есть нормальная подгруппа в их произведении (так как если оператор смены знака сопрягается при помощи какой-либо перестановки координат, то получается другой оператор смены знака). Итак, на V действует группа W , являющаяся произведением этих двух групп и имеющая порядок $2^n \cdot n!$.

Замечание. Полученная конструкция является *полупрямым произведением* групп \mathfrak{S}_n и $(\mathbb{Z}_2)^n$; ее принято обозначать $\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}_2)^n$.

Пример 1.19 ($D_n, n \geq 4$). Эта группа будет подгруппой индекса 2 в только что описанной группе B_n . А именно, разрешим переставлять координаты при помощи \mathfrak{S}_n и менять знак у *четного* количества координат. Получим группу, порожденную отражениями относительно $e_i - e_j$ и $e_i + e_j$, где $i \neq j$. Это действие тоже не будет иметь инвариантных векторов (проверьте это!).

Упражнение 1.20. а) Докажите, что $A_2 \cong \text{Sym } \mathbb{D}_3$, а $B_2 \cong \text{Sym } \mathbb{D}_4$.

б) Докажите, что группы A_3 и D_3 изоморфны.

Упражнение 1.21 (продолжение задачи 1.12). Какие из трех групп симметрий платоновых тел принадлежат сериям A_n, B_n или D_n ? Чему равны соответствующие значения n ?

Лекция 2

Зри в корень!

Козьма Прутков

В прошлой лекции мы начали рассматривать группы отражений — которыми, в частности, оказались группы симметрий правильных многоугольников на плоскости и правильных многогранников в трехмерном пространстве. Как мы докажем в лекции 4, группами отражений окажутся и группы симметрий правильных многогранников произвольной размерности. Поэтому естественно изучить группы отражений более подробно, чем мы сейчас и займемся. Для этого нам понадобится такой инструмент, как *системы корней*.

2.1. Системы корней

Пусть W — группа отражений, действующая на пространстве V .

Предложение 2.1. Если $t \in O(V)$ — произвольное ортогональное преобразование, а $s_\alpha \in W$ — отражение относительно вектора α , то $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$ — отражение относительно вектора $t\alpha$. В частности, если $w \in W$, то и $s_{w\alpha} \in W$.

Доказательство. Ясно, что $ts_\alpha t^{-1}$ переводит вектор $t\alpha$ в противоположный ему. Так что нужно лишь показать, что $ts_\alpha t^{-1}$ поточечно оставляет на месте гиперплоскость $H_{t\alpha}$. Заметим, что условие $\lambda \in H_\alpha$ равносильно тому, что $t\lambda \in H_{t\alpha}$, так как $(\alpha, \lambda) = (t\alpha, t\lambda)$. Значит, $(ts_\alpha t^{-1})(t\lambda) = ts_\alpha \lambda = t\lambda$, если $\lambda \in H_\alpha$. \square

Значит, группа W как-то переставляет прямые $\langle \alpha \rangle$, соответствующие всевозможным отражениям $s_\alpha \in W$. Фиксируем на каждой такой прямой пару векторов $\{\alpha, -\alpha\}$, длины которых положим равными единице. Полученный набор векторов называется *системой корней*, соответствующей группе W .

Дадим для системы корней аксиоматическое определение.

Определение 2.2. Конечный набор векторов $\Phi \subset V$ называется *системой корней*, если он удовлетворяет следующим двум аксиомам:

(R1): $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$;

(R2): $s_\alpha \Phi = \Phi$ для всякого $\alpha \in \Phi$.

Сами векторы из набора Φ называются *корнями*.

Замечание. Из аксиом (R1)—(R2) вообще говоря, не следует, что все корни имеют одинаковую длину.

По аксиоматически определенной системе корней Φ можно построить группу отражений W : это будет группа, порожденная отражениями относительно всех корней из Φ .

Упражнение 2.3. Покажите, что определенная таким образом группа будет конечна.

Упражнение 2.4. Пусть Φ — набор из $2m$ единичных векторов на плоскости, причем угол между любыми двумя соседними векторами равен π/m (на рисунке изображена ситуация $m = 4$). Докажите, что Φ является системой корней, а соответствующая группа отражений есть группа диэдра $\text{Sym } \mathbb{D}_m$.

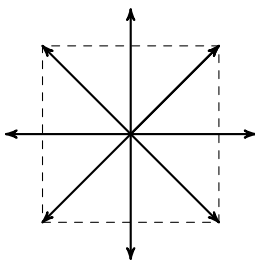


Рис. 4. Система корней группы $B_2 \cong \text{Sym } \mathbb{D}_4$

2.2. Простые и положительные корни

Определение 2.5. Транзитивное отношение $<$ на V называется *отношением (линейного) порядка*, если выполнены следующие условия:

- для любых не равных друг другу векторов $\lambda, \mu \in V$ либо $\lambda < \mu$, либо $\mu < \lambda$;
- если $\lambda < \mu$, то $\lambda + \nu < \mu + \nu$ для любого вектора $\nu \in V$;
- если $\lambda < \mu$, то $c\lambda < c\mu$ при всех действительных $c > 0$ и $c\mu < c\lambda$ при всех $c < 0$.

Вектор λ называется *положительным*, если $0 < \lambda$.

Замечание. Такие отношения порядка на V существуют. А именно, с каждым базисом $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ можно связать линейный порядок на V , задаваемый лексикографически: $\alpha = \sum a_i \lambda_i < \beta = \sum b_i \lambda_i$

тогда и только тогда, когда для некоторого j выполнено неравенство $a_j < b_j$ и при всех $i < j$ выполнено равенство $a_i = b_i$ (т. е. набор (a_1, \dots, a_n) как «слово в словаре» идет раньше, чем набор (b_1, \dots, b_n)).

Задача 2.6. Убедитесь, что данным примером исчерпываются все возможные отношения порядка на V . А именно, покажите, что для любого отношения порядка существует базис $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, относительно которого это отношение порядка является лексикографическим упорядочением.

Выберем и зафиксируем какой-нибудь линейный порядок на V . С его помощью мы проведем следующую конструкцию.

Определение 2.7. Системой положительных корней в Φ называется множество

$$\Pi = \{\alpha \in \Phi \mid 0 < \alpha\}.$$

Множество $-\Pi$ называется системой отрицательных корней. Ясно, что $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$. Заметим, что из каждой пары корней $\{\alpha, -\alpha\}$ ровно один является положительным, а другой — отрицательным.

Определение 2.8. Подмножество $\Delta \subset \Phi$ называется системой простых корней, если выполнены следующие два условия:

- Δ является базисом для линейной оболочки системы корней Φ ;
- всякий вектор $\alpha \in \Phi$ есть линейная комбинация $\sum c_\gamma \gamma$, где все γ принадлежат Δ и все c_γ имеют одинаковый знак (либо все положительны, либо все отрицательны).

Упражнение 2.9. Рассмотрим систему корней, изображенную на рис. 5. Опишите порядок, относительно которого множество корней, лежащих в заштрихованной области, образует систему положительных корней. Убедитесь, что два отмеченных корня образуют систему простых корней.

А priori неясно, что системы простых корней вообще существуют. Их существование вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.10. 1. Если Δ — система простых корней, то существует единственная система положительных (относительно некоторого упорядочения на V) корней Π , содержащая Δ .

2. Всякая система положительных корней Π содержит единственную систему простых корней Δ (в частности, таковые существуют).

Доказательство. 1. Единственность следует из того, что все неотрицательные линейные комбинации векторов из Δ , лежащие в Φ , должны принадлежать Π , т. е. множество Π определено однозначно. Чтобы показать, что Π существует, дополним Δ до базиса

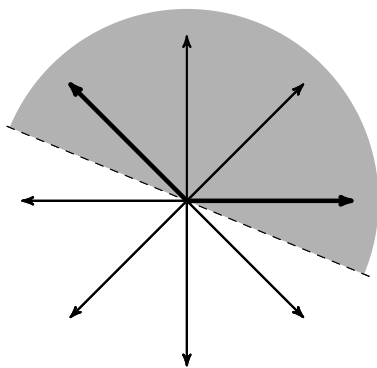


Рис. 5. Система положительных и простых корней

всего пространства V и возьмем в качестве Π множество векторов из Φ , положительных относительно соответствующего лексикографического упорядочения.

2. Единственность: пусть Π содержит систему простых корней Δ ; тогда Δ определяется однозначно как множество векторов из Π , не представимых в виде положительной линейной комбинации двух и более векторов из Π .

Существование. Выберем минимальную систему (по включению) $\tilde{\Delta} \in \Pi$, обладающую тем свойством, что всякий корень в Π есть неотрицательная линейная комбинация корней из $\tilde{\Delta}$. Такая система с очевидностью существует; надо доказать, что она линейно независима. Это будет следовать из такого предложения, которое мы докажем чуть ниже.

Предложение 2.11. Для любой пары не равных друг другу корней $\alpha, \beta \in \tilde{\Delta}$ выполняется неравенство $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Покажем, как из этого предложения следует линейная независимость системы $\tilde{\Delta}$. Пусть имеется некоторая нетривиальная линейная комбинация $\sum a_i \alpha_i = 0$. Перенесем все слагаемые, коэффициенты перед которыми отрицательны, в правую часть. Получим равенство

$$\sigma = \sum b_i \beta_i = \sum c_i \gamma_i, \quad \text{где } b_i, c_i > 0.$$

Тогда согласно вышеприведенному утверждению

$$0 \leq (\sigma, \sigma) = \left(\sum b_i \beta_i, \sum c_i \gamma_i \right) \leq 0,$$

откуда следует, что $\sigma = 0$, и мы получаем противоречие.

Осталось доказать предложение. Докажем его от противного. Пусть оно неверно для некоторых $\alpha, \beta \in \Delta$. Запишем

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha, \text{ где } c = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} > 0.$$

Поскольку $s_\alpha \beta \in \Phi$, мы заключаем, что либо $s_\alpha \beta \in \Pi$, либо $-s_\alpha \beta \in \Pi$. Рассмотрим сначала случай $s_\alpha \beta \in \Pi$. Пусть

$$s_\alpha \beta = \sum c_\gamma \gamma,$$

где все корни γ простые, а все c_γ не меньше 0. Возможны два подслучая.

а) Коэффициент $c_\beta < 1$. Тогда

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Значит,

$$(1 - c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Получается, что один простой корень выражен как положительная линейная комбинация других, что противоречит минимальности.

б) Пусть $c_\beta \geq 1$. Аналогичным образом получаем

$$0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Получается, что линейная комбинация векторов из Π с положительными коэффициентами равна нулю, что невозможно в силу аксиом линейного порядка.

Аналогично можно проверить, что $s_\alpha \beta \notin -\Pi$. □

Упражнение 2.12. Прodelайте это.

Следствие 2.13 (из доказательства). *Если Δ — система простых корней, то $(\alpha, \beta) \leq 0$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Иначе говоря, все углы между простыми корнями неострые.*

Задача 2.14. Найдите системы положительных и простых корней для систем корней, соответствующих группам отражений, которые были описаны в конце прошлой лекции (серии A, B, D).

Ответ на эту задачу приведен в следующей таблице. Здесь через e_1, \dots, e_n обозначен ортонормированный базис в пространстве $V \cong \mathbb{R}^n$. Линейный порядок, определяющий указанные в таблице си-

системы положительных корней, — это связанный с этим базисом лексикографический порядок.

Системы корней типов A , B и D

A_{n-1}	Φ	$e_i - e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$
	Π	$e_i - e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n$
	Δ	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n$
B_n	Φ	$\pm e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n; \quad \pm e_i, \quad 1 \leq i \leq n$
	Π	$e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n; \quad e_i, \quad 1 \leq i \leq n$
	Δ	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$
D_n	Φ	$\pm e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$
	Π	$e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n$
	Δ	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$

2.3. Сопряженность систем простых и положительных корней

Здесь и далее мы фиксируем систему простых и положительных корней $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$.

Из определения следует, что при любом $w \in W$ множество $w\Delta$ тоже будет системой простых корней, а $w\Pi$ — системой положительных корней. Оказывается, если $\alpha \in \Delta$, то $s_\alpha\Pi$ и Π отличаются на один корень.

Предложение 2.15. Пусть $\Delta \subset \Pi$, и $\alpha \in \Delta$. Тогда $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.

Доказательство. Пусть $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ и $\beta = \sum c_\gamma \gamma$ — представление корня β в виде линейной комбинации простых корней. При некотором векторе $\gamma \neq \alpha$ найдется строго положительный коэффициент $c_\gamma > 0$. Отразим β относительно α :

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha.$$

Коэффициент при γ в разложении $s_\alpha \beta$ не изменится (т.е. он равен c_γ). Значит, $s_\alpha \beta$ — положительный корень. При этом ясно, что он не равен α . Следовательно,

$$s_\alpha : \Pi \setminus \{\alpha\} \rightarrow \Pi \setminus \{\alpha\}.$$

□

Из этого предложения нетрудно вывести теорему, показывающую, что геометрически все системы положительных и простых корней для данной системы корней устроены одинаково.

Теорема 2.16. *Все положительные (соответственно простые) системы корней в Φ сопряжены друг другу относительно действия группы W .*

Задача 2.17. Докажите эту теорему.

Из доказанных утверждений получается полезное следствие: оказывается, для каждого корня найдется содержащая его система простых корней (т. е. каждый корень может играть роль простого корня).

Следствие 2.18. *Для данной системы простых корней Δ и данного корня β найдется такой элемент $w \in W$, что $w \cdot \beta \in \Delta$.*

Упражнение 2.19. Пусть Φ — система корней ранга n , и пусть $\Delta' \subset \Phi$ — набор n векторов из Φ , попарные углы между которыми равняются попарным углам между векторами системы простых корней $\Delta \subset \Phi$. Докажите, что тогда Δ' тоже является системой простых корней.

2.4. Группа отражений порождается простыми отражениями

У простых корней есть замечательное свойство: несмотря на то что они обычно составляют лишь незначительную часть системы корней, отражения относительно них порождают всю группу W . Мы это уже видели в случае группы диэдра, где группа порождалась двумя отражениями. Докажем это в общем случае.

Теорема 2.20. *Пусть Δ — система простых корней. Тогда $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.*

Доказательство. Пусть $W' = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ — подгруппа в W , порожденная простыми отражениями. Докажем, что она совпадает со всей группой.

Доказательство этого мы представим в виде серии упражнений.

Упражнение 2.21. Докажите, что для всякого положительного корня γ найдется корень $\alpha \in \Delta$, для которого $(\gamma, \alpha) > 0$.

Определение 2.22. Пусть $\beta \in \Phi$, $\beta = \sum c_\gamma \gamma$, где $\gamma \in \Delta$. *Высотой* корня β называется число $\text{ht}(\beta) = \sum c_\gamma$. В частности, высота всякого простого корня равна 1.

Упражнение 2.23. Пусть $\beta \in \Pi$. Возьмем множество $W'\beta \cap \Pi$ (оно непусто, так как содержит β) и выберем в нем элемент γ минимальной

высоты. Докажите, что $\gamma \in \Delta$ (т. е. всякий положительный корень может быть переведен в простой при помощи лишь простых отражений).

Упражнение 2.24. Выведите отсюда, что $W' \Delta = \Phi$.

Упражнение 2.25. Выведите из предыдущего упражнения и предложения 2.1, что $W = W'$.

Это завершает доказательство теоремы 2.20. \square

2.5. Многогранные конусы и двойственность

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$ — произвольный конечный набор ненулевых векторов. Рассмотрим *многогранный конус*, порожденный этим набором, т. е. множество линейных комбинаций этих векторов с неотрицательными коэффициентами:

$$K = \{c_1 \alpha_1 + \dots + c_k \alpha_k \mid c_i \geq 0\} \subset V.$$

Можно рассмотреть множество

$$K^\vee = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha_i) \geq 0 \quad \forall i\} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \mu) \geq 0 \quad \forall \mu \in K\}.$$

Пример 2.26. Пусть K — конус в \mathbb{R}^2 , т. е. плоский угол величины α . Тогда K^\vee будет плоским углом величины $\pi - \alpha$, биссектриса которого совпадает с биссектрисой угла K (см. рис. 6).

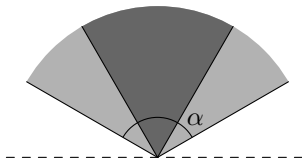


Рис. 6

Можно доказать, что в общем случае K^\vee тоже является многогранным конусом, т. е. получается как множество положительных линейных комбинаций некоторого конечного набора векторов. Доказательство этого можно прочесть, например, в главе 1 книги [7].

Будем называть его *конусом, двойственным к K* .

Упражнение 2.27. Докажите, что $(K^\vee)^\vee = K$.

Внутренностью $\text{Int} K$ конуса K будем называть его множество внутренних точек (в стандартной топологии в \mathbb{R}^n). Если конус K невырожден (т. е. векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ порождают все пространство V),

то $\text{Int } K$ есть множество *положительных* линейных комбинаций векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$:

$$\text{Int } K = \{c_1 \alpha_1 + \dots + c_k \alpha_k \mid c_i > 0\}.$$

В противном случае $\text{Int } K = \emptyset$.

Задача 2.28. Пусть K и L — два многогранных конуса. Докажите, что $L \subset K$ тогда и только тогда, когда $K^\vee \subset L^\vee$.

Обозначим через $-K$ образ конуса K при центральной симметрии относительно нуля.

Предложение 2.29. Пусть K — многогранный конус, не содержащий прямых. Тогда $\lambda \in K \cup (-K)$ тогда и только тогда, когда гиперплоскость $H_\lambda = \{\mu \in V \mid (\mu, \lambda) = 0\}$ не пересекается с конусом $\text{Int } K^\vee$.

Доказательство. Пусть L — конус, порожденный одним вектором λ . Тогда $L \subset K$, а L^\vee есть полупространство, ограниченное плоскостью H_λ и содержащее вектор λ . Предложение следует из предыдущей задачи и того факта, что если $K^\vee \subset L^\vee$, то $\text{Int } K^\vee \subset \text{Int } L^\vee$. \square

2.6. Камеры Вейля и фундаментальная область группы отражений

Теперь применим общие сведения о многогранных конусах, изложенные в предыдущем пункте, к системам корней.

Фиксируем в Φ систему простых и систему положительных корней $\Delta \subset \Pi$. Пусть K — конус, порожденный системой Δ (или, что то же самое, системой Π). Обозначим через D двойственный конус:

$$D = K^\vee = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \text{ для любого } \alpha \in \Delta\}.$$

Поскольку простые корни составляют базис пространства V , оба конуса K и D невырождены, т. е. не содержатся ни в каком подпространстве меньшей размерности, и *симплициальны*, т. е. число их ребер равно $\dim V$.

Несложно показать, что всякая орбита группы W в пространстве V пересекается с D .

Лемма 2.30. Для всякого вектора $\lambda \in V$ найдется такой элемент $w \in W$, что $\mu = w \cdot \lambda \in D$. Более того, разность $\mu - \lambda$ является линейной комбинацией векторов из Δ с неотрицательными коэффициентами.

Доказательство. Введем на V частичный порядок следующим образом: λ меньше либо равно μ , если $\mu - \lambda$ есть линейная комбинация векторов из Δ с неотрицательными коэффициентами. (Не

следует путать этот частичный порядок с введенным ранее линейным порядком, который нам более не потребуются.)

Рассмотрим орбиту $W \cdot \lambda$ вектора λ . Пусть μ — максимальный относительно данного порядка элемент в этой орбите (вообще говоря, μ может быть не единственным). Применим к нему простое отражение s_α :

$$s_\alpha \mu = \mu - 2 \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Вектор $s_\alpha \mu$ также принадлежит орбите $W \cdot \lambda$. Поскольку элемент μ максимален, мы получаем, что $2 \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0$, а значит, $(\mu, \alpha) \geq 0$. Это выполнено для любого простого корня $\alpha \in \Delta$, следовательно, $\mu \in D$. \square

Рассмотрим множество открытых конусов $w \cdot \text{Int } D$, получающихся из $\text{Int } D$ сдвигом на элемент $w \in W$. Эти конусы называются *камерами Вейля*.

Пример 2.31. Пусть $W = \text{Sym } \mathbb{D}_3$ — группа симметрий треугольника (это группа типа A_2). На рисунке изображена система корней для этой группы, отмечены два простых корня и показаны фундаментальный конус D и камеры Вейля (их число равняется 6 — порядку группы W).

Как мы видим на этом рисунке, камеры Вейля не пересекаются, а их объединение есть дополнение до множества зеркал. Как мы убедимся далее, и в общем случае ситуация аналогичная.

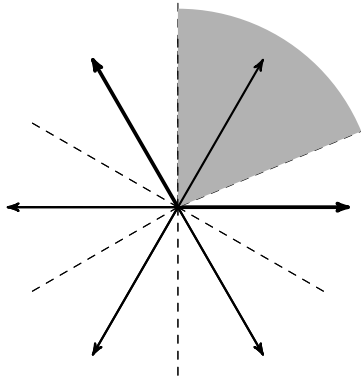


Рис. 7. Фундаментальная область группы отражений

Предложение 2.32. 1. Для любого корня $\alpha \in \Phi$ соответствующая ему гиперплоскость H_α не пересекается ни с какой камерой Вейля $w \cdot \text{Int } D$.

2. Объединение всех камер Вейля равняется всему пространству V за вычетом гиперплоскостей отражений относительно корней из Φ :

$$W \cdot \text{Int } D = V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_{\alpha}.$$

3. Пусть $\tilde{\Delta} = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subset \Phi$ — набор корней, составляющий базис пространства V , и пусть \tilde{K} — конус, порожденный этим набором. Предположим, что $\text{Int } \tilde{K}^V$ не пересекается ни с какой гиперплоскостью H_{α} при $\alpha \in \Phi$. Тогда $\tilde{\Delta} = w \cdot \Delta$ (т. е. $\tilde{\Delta}$ тоже является системой простых корней).

Доказательство. 1. Для любого корня $\alpha \in \Phi$ верно, что либо он сам, либо противоположный к нему лежит в конусе K , порожденном Δ . В силу предложения 2.29 отсюда следует, что соответствующая гиперплоскость H_{α} не пересекается с $\text{Int } D$. В силу W -инвариантности системы Φ это же верно и для любой другой камеры Вейля.

2. Возьмем какой-нибудь элемент $\lambda \in V \setminus (W \cdot \text{Int } D)$. В силу леммы 2.30 найдется такой элемент $w \in W$, что $w \cdot \lambda \in D \setminus \text{Int } D$. Тогда по определению конуса D мы получаем, что $w \cdot \lambda \in H_{\beta}$, где β — некоторый простой корень. Значит, $\lambda \in H_{w^{-1}\beta}$, что и требовалось.

3. Пусть $\alpha \in \Phi$. Из предложения 2.29 следует, что либо α , либо $-\alpha$ лежит в конусе \tilde{K} . Это значит, что α выражается через β_1, \dots, β_r с коэффициентами одного знака. Но согласно определению 2.8 это и значит, что Δ есть система простых корней. \square

Задача 2.33. Выведите из предыдущего предложения, что две несовпадающие камеры Вейля не пересекаются.

Имеет место следующее утверждение, значительно усиливающее результат леммы 2.30.

Теорема 2.34. 1. Если $\lambda, \mu \in D$ и $w\lambda = \mu$, то $\lambda = \mu$, а w есть произведение простых отражений, каждое из которых оставляет λ неподвижным. В частности, если $\lambda \in \text{Int } D$, то стабилизатор W_{λ} тривиален. Таким образом, число камер Вейля равно порядку группы W .

2. Каждая орбита группы W пересекается с D ровно по одной точке (в таком случае говорят, что D является фундаментальной областью для действия группы W на пространстве V).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки этой брошюры. Его можно найти, например, в книге [10, 1.12] или в статье [8].

Интермедия:

группы отражений и кватернионы

And how The One of Time, of Space the
Three, might in the Chain of Symbols girdled be.

*Sir William Rowan Hamilton*¹

В предыдущих двух лекциях мы достаточно основательно изучили теорию групп отражений. Мы уже знаем, что таковыми являются действующая на плоскости группа диэдра, группы симметрий правильных многогранников в трехмерном пространстве и три серии групп A_n , B_n и D_n , действующих в n -мерном пространстве при произвольном n .

В интермедии мы изучим три группы отражений в четырехмерном пространстве. Эти группы возникнут в результате одной весьма естественной конструкции. При этом две из них будут «новыми», т. е. не встречавшимися в сериях A_n , B_n и D_n . Для этой конструкции нам потребуется рассмотреть четырехмерное пространство как пространство *кватернионов*.

2¹/₂.1. Алгебра кватернионов

Рассмотрим четырехмерное вещественное векторное пространство \mathbb{R}^4 с базисом $\{1, i, j, k\}$. Введем на этом пространстве ассоциативное, но некоммутативное умножение, определив его на базисных элементах при помощи следующей таблицы:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

¹И как Одно от Времени и Три от Пространства могут быть опоясаны Цепью Символов. (Сэр Уильям Роуэн Гамильтон).

Мы утверждаем, что определенное таким образом умножение задает на \mathbb{R}^4 структуру ассоциативной алгебры с единицей, которую мы будем обозначать через \mathbb{H} . Она называется *алгеброй кватернионов*, а ее элементы — *кватернионами*. Элементы $1, i, j, k$ называются *базисными кватернионами*. Ассоциативность алгебры \mathbb{H} можно проверить непосредственно, но мы поступим иначе: реализуем ее в качестве подалгебры в алгебре матриц $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим следующее отображение $\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$:

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad k \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Легко видеть (проверьте это!), что это действительно гомоморфизм алгебр над \mathbb{R} . При нем кватернион $a + bi + cj + dk$ соответствует матрице $\begin{pmatrix} a+di & -b-ci \\ b-ci & a-di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, где $z, w \in \mathbb{C}$. Кроме того, все такие матрицы, кроме нулевой, невырождены:

$$\det \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (1)$$

Упражнение 2¹/₂.1. Проверьте, что при условии ассоциативности умножение в алгебре \mathbb{H} задается определяющими соотношениями $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Определение 2¹/₂.2. Модулем кватерниона z называется вещественное неотрицательное число $|z| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}$. Кватернион $\bar{z} = a - bi - cj - dk$ называется *сопряженным* к z .

Квадрат модуля является положительно определенной квадратичной формой на \mathbb{H} . Тем самым на \mathbb{H} определена структура евклидова пространства.

Как и для комплексных чисел, $z\bar{z} = |z|^2$.

Однако, в отличие от \mathbb{C} , сопряжение в \mathbb{H} является не автоморфизмом, а *антиавтоморфизмом*: $\overline{zw} = \bar{w} \cdot \bar{z}$.

Упражнение 2¹/₂.3. Проверьте это.

Кроме того, $|zw| = |z||w|$. Это следует, например, из равенства (1) и мультипликативности определителя, или из равенства $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{w}\bar{z} = |z|^2|w|^2$.

Понятие модуля позволяет найти для каждого ненулевого кватерниона z обратный: такой кватернион z^{-1} , что $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. Он находится по формуле $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$. Поэтому \mathbb{H} является *алгеброй с делением*, или *телом* (т. е. «некоммутативным полем»).

2¹/₂.2. Кватернионы единичного модуля и чисто мнимые кватернионы

Множество кватернионов единичного модуля образует группу по умножению, которую мы обозначим через $\text{Sp}(1)$. Геометрически $\text{Sp}(1)$ является трехмерной сферой S^3 , так как оно задается уравнением $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Отметим, что если $z \in \text{Sp}(1)$, то $z^{-1} = \bar{z}$.

Предложение 2¹/₂.4. При описанном выше гомоморфизме $\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ кватернионам из $\text{Sp}(1)$ соответствуют в точности специальные унитарные матрицы 2×2 (т. е. унитарные матрицы с определителем 1).

Доказательство. При гомоморфизме $\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ инволюция $z \mapsto \bar{z}$ на \mathbb{H} переходит в инволюцию $A \mapsto A^*$ (композицию транспонирования и сопряжения). Поэтому $\text{Sp}(1)$ переходит во множество матриц с единичным определителем, удовлетворяющих равенству $A^* = A^{-1}$, что и требовалось. □

Рассмотрим теперь множество чисто мнимых кватернионов

$$V = \{bi + cj + dk\} = \{z \in \mathbb{H} \mid z + \bar{z} = 0\}.$$

Оно является трехмерным евклидовым пространством. Кроме того, на трехмерном евклидовом пространстве есть антисимметричная операция векторного произведения $[v, w]$.

Пространство V не замкнуто относительно умножения: произведение двух чисто мнимых кватернионов не обязано быть чисто мнимым. Но оказывается, что кватернионное умножение «знает» и про скалярное, и про векторное произведение на V . А именно, справедливо следующее равенство, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Упражнение 2¹/₂.5. Если $v, w \in V$, то их произведение в \mathbb{H} равняется

$$v \cdot w = -(v, w) + [v, w],$$

где первое слагаемое — это вещественное число, а второе — вектор, т. е. элемент из V .

В частности, если $v \in V$, то $[v, v] = 0$, а значит, $v^2 = -|v|^2$. Получается, что квадрат всякого чисто мнимого кватерниона есть отрицательное число. В частности, всякий чисто мнимый кватернион единичного модуля является квадратным корнем из -1 .

2^{1/2}.3. Действие Sp(1) на V

Наша цель — сопоставить каждому кватерниону $z \in \text{Sp}(1)$ вращение евклидова трехмерного пространства $R_z: V \rightarrow V$.

Во-первых, заметим, что для фиксированного кватерниона $z \in \text{Sp}(1)$ отображения $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, заданные формулами $q \mapsto zq$ и $q \mapsto qz^{-1}$, суть ортогональные преобразования, так как они сохраняют модуль вектора. Однако ни одно из них не определяет действие на подпространстве V . Для того, чтобы V переходило бы в себя, на нем можно действовать композицией этих преобразований, т. е. сопряжениями.

Лемма 2^{1/2}.6. Пусть $z \in \text{Sp}(1)$. Отображение $q \mapsto zqz^{-1}$ переводит чисто мнимые кватернионы в чисто мнимые.

Доказательство. Пусть $q \in V$. Это значит, что $q + \bar{q} = 0$. Докажем, что $zqz^{-1} + \overline{(zqz^{-1})} = 0$. Действительно,

$$zqz^{-1} + \overline{(zqz^{-1})} = zqz^{-1} + \overline{z^{-1}\bar{q}z} = zqz^{-1} + z\bar{q}z^{-1} = z(q + \bar{q})z^{-1} = 0.$$

□

Поскольку левое и правое умножение задают на \mathbb{R}^4 ортогональные преобразования (относительно стандартного скалярного произведения), получаем, что отображение $R_z: q \mapsto zqz^{-1}$ есть ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^3 = V$.

Лемма 2^{1/2}.7. Отображение $z \mapsto R_z$ задает гомоморфизм групп $\text{Sp}(1) \rightarrow \text{O}(3)$.

Доказательство. Мы доказали, что преобразование R_z ортогонально. Необходимо лишь проверить, что это отображение — гомоморфизм. Проверим, что $R_z R_w = R_{zw}$. Это несложно:

$$R_z(R_w(q)) = R_z(wqw^{-1}) = zwqw^{-1}z^{-1} = zwq(zw)^{-1} = R_{zw}(q). \quad \square$$

Далее мы покажем, что образ этого гомоморфизма есть в точности групп специальных ортогональных матриц $\text{SO}(3)$. По теореме Эйлера, каждое специальное ортогональное преобразование \mathbb{R}^3 есть вращение. Вращение задается двумя параметрами: направлением оси и углом вращения. Мы увидим, как узнать эти параметры для преобразования R_z , зная кватернион $z \in \text{Sp}(1)$.

Пусть $z = a + bi + cj + dk = a + v' \in \text{Sp}(1)$, где a и v' — вещественная и мнимая части кватерниона z . Тогда $|z|^2 = a^2 + |v'|^2 = 1$. Поэтому существует такой угол $\varphi \in [0, \pi]$, что $a = \cos \varphi$, $|v'| = \sin \varphi$. Тогда

$$z = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot v,$$

где $v = v'/\sin \varphi$ — вектор длины 1.

Предложение 2^{1/2}.8. Пусть $z = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot v \in \text{Sp}(1)$. Преобразование $R_z : V \rightarrow V$, $q \mapsto zqz^{-1}$ есть поворот относительно оси, натянутой на вектор v , на угол 2φ .

Доказательство. Сперва докажем, что R_z оставляет вектор v на месте. Это проверяется прямым вычислением. Если $z = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot v$, то $z^{-1} = \cos \varphi - \sin \varphi \cdot v$. Тогда

$$\begin{aligned} zvz^{-1} &= (\cos \varphi + \sin \varphi \cdot v)v(\cos \varphi - \sin \varphi \cdot v) = \\ &= (\cos \varphi \cdot v - \sin \varphi \cdot (v, v))(\cos \varphi - \sin \varphi \cdot v) = \\ &= \cos^2 \varphi \cdot v + \sin^2 \varphi \cdot v = v. \end{aligned}$$

(мы пользовались тем, что, согласно упражнению 2^{1/2}.5, $(v, v) = 1$ и $[v, v] = 0$).

Значит, v остается на месте под действием R_z .

Далее, проверим, что R_z задает поворот на угол 2φ в плоскости, ортогональной вектору v . Выберем в этой плоскости ортогональный базис: пусть w — произвольный единичный вектор, ортогональный v , а $u = [v, w]$. Применим R_z к w .

Упражнение 2^{1/2}.9. Проверьте, что $R_z(w) = \cos 2\varphi \cdot w + \sin 2\varphi \cdot u$.

Таким образом, в плоскости $\langle w, u \rangle$ преобразование R_z действует поворотами на угол 2φ . Это завершает доказательство предложения. \square

Значит, R_z отвечает вращению, и всякое вращение можно получить таким образом. Мы получили следующее предложение:

Предложение 2^{1/2}.10. Имеется сюръективный гомоморфизм групп $\text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3)$.

Выясним, чему равно ядро этого гомоморфизма. Кватернион $z = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot v$ отвечает тождественному преобразованию, когда угол 2φ равен $2\pi n$, т. е. $\varphi \in \{0, \pi\}$. Значит, $\sin \varphi = 0$, а $\cos \varphi = \pm 1$. Таким образом, $z = \pm 1$.

Поэтому предыдущее предложение можно уточнить:

Теорема 2^{1/2}.11. Имеется изоморфизм групп $\text{Sp}(1)/\{\pm 1\} \rightarrow \text{SO}(3)$.

С топологической точки зрения этот изоморфизм отвечает двустороннему накрытию $S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ трехмерной проективной плоскости трехмерной сферой.

Замечание. Как мы уже говорили, для любых двух кватернионов $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ отображение $R_{z_1, z_2} : q \mapsto z_1 q z_2^{-1}$ является ортогональным преобразованием \mathbb{H} как четырехмерного евклидова пространства. Тем самым возникает гомоморфизм $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \rightarrow \text{O}(4)$. Можно

доказать, что образ этого отображения — в точности группа $SO(4)$, а ядро состоит из двух элементов, $(1, 1)$ и $(-1, -1)$. Подробности этой конструкции читатель может попробовать восстановить сам (при этом может пригодиться приведенное ниже упражнение 2¹/₂.13) или найти в брошюре [1] или книге [6].

2¹/₂.4. Конечные подгруппы в \mathbb{H} суть системы корней

Нас будут интересовать конечные подгруппы в \mathbb{H} . Ясно, что если G — такая подгруппа, то $G \subset Sp(1)$. Оказывается, имеет место следующее неожиданное утверждение.

Лемма 2¹/₂.12. Пусть $G \subset Sp(1)$ — конечная подгруппа четного порядка. Тогда G является системой корней.

Доказательство. Сначала убедимся, что если конечная подгруппа $G \subset \mathbb{H}$ имеет четный порядок, то $-1 \in G$. Легко видеть, что в алгебре кватернионов уравнение $z^2 = 1$ имеет ровно два решения: $z = 1$ и $z = -1$. Теперь рассмотрим нашу конечную группу G и рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому элементу обратный к нему. Тем самым все элементы, не равные в квадрате сами себе, окажутся разбиты на пары. Стало быть, количество элементов $g \in G$, для которых $g = g^{-1}$ (или, что то же самое, $g^2 = 1$), четно. Всего кватернионов с этим свойством только два, причем один из них всегда лежит в группе G : это единица. Значит, и -1 принадлежит G .

Пусть $\alpha \in G$. Нетрудно убедиться, что отображение $M_\alpha: \lambda \mapsto \alpha\lambda$ есть движение \mathbb{H} , переводящее 1 в α и сохраняющее G . Также группе G сохраняет симметрия $s_1(\lambda) = -\bar{\lambda}$ (заметим, что $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ для $\lambda \in Sp(1)$). Поэтому для любого α отражение $s_\alpha = M_\alpha s_1 M_\alpha^{-1}$ сохраняет группу G .

Итак, аксиома (R2) также выполнена. □

Упражнение 2¹/₂.13. Убедитесь, что для любого $\alpha \in Sp(1)$ имеет место формула $s_\alpha(\lambda) = -\alpha\bar{\lambda}\alpha$.

2¹/₂.5. Бинарные группы платоновых тел

Перейдем к обещанной конструкции групп отражений в четырехмерном пространстве.

Для начала рассмотрим группу $Sym^+(T)$ вращений правильного тетраэдра в \mathbb{R}^3 . Как мы знаем, она имеет порядок 12; она изоморфна \mathfrak{A}_4 — группе четных перестановок множества вершин тетраэдра.

Группа $\text{Sym}^+(T)$ является подгруппой в $\text{SO}(3)$. Возьмем ее полный прообраз $\mathfrak{T} = \pi^{-1}(\text{Sym}^+(T)) \subset \text{Sp}(1) \subset \mathbb{H}$. Он также является группой; ее порядок вдвое больше порядка группы $\text{Sym}^+(T)$, т. е. равен 24. Эта группа называется *бинарной группой тетраэдра*.

Упражнение 2^{1/2}.14. Покажите, что

$$\mathfrak{T} \cong \left\{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k) \right\},$$

где знаки расставляются всевозможными способами (24 кватерниона из правой части равенства называются *единицами Гурвица*).

Упражнение 2^{1/2}.15. Согласно лемме 2^{1/2}.12 множество \mathfrak{T} есть система корней. Покажите, что это система корней типа D_4 .

Ту же самую конструкцию можно осуществить и для двух других групп симметрий платоновых тел — куба и икосаэдра.

Возьмем *бинарную группу куба* \mathfrak{C} — полный прообраз группы вращений куба $\text{Sym}^+(C) \subset \text{SO}(3)$. Она состоит из 48 кватернионов, 24 из которых суть единицы Гурвица, т. е. $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{C}$. Оставшиеся 24 элемента (обозначим их множество через \mathfrak{T}') имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w),$$

где $z, w \in \{1, i, j, k\}$ — различные базисные элементы (всего имеется 6 вариантов выбора такой пары).

Согласно той же лемме 2^{1/2}.12 эти 48 элементов образуют систему корней. Рассмотрим соответствующую группу отражений $W_{\mathfrak{C}}$. Наша ближайшая задача состоит в вычислении порядка этой группы.

Упражнение 2^{1/2}.16. а) Покажите, что $s_{\alpha}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$, $s_{\alpha}(\mathfrak{T}') = \mathfrak{T}'$ для произвольного $\alpha \in \mathfrak{C}$. Иначе говоря, отражения s_{α} (а следовательно, вся группа $W_{\mathfrak{C}}$) «не перемешивают» элементы из \mathfrak{T} и \mathfrak{T}' .

б) Покажите, что \mathfrak{C} состоит из двух орбит группы $W_{\mathfrak{C}}$ по 24 элемента в каждой: \mathfrak{T} и \mathfrak{T}' .

в) Рассмотрим элемент $1 \in \mathfrak{C}$. Покажите, что его стабилизатор в $W_{\mathfrak{C}}$ порожден отражениями относительно чисто мнимых кватернионов из \mathfrak{C} .

г) Покажите, что чисто мнимые кватернионы из \mathfrak{C} образуют систему корней типа B_3 , а соответствующая ей группа отражений есть в точности стабилизатор единицы из предыдущего пункта.

Мы знаем, что порядок группы отражений типа B_3 равен $2^3 \cdot 3! = 48$. Отсюда следует, что $|W_{\mathfrak{C}}| = 24 \cdot 48 = 1152$. Мы постойли новую систему корней ранга 4. Эта система корней называется F_4 : мы увидим ее на следующей лекции.

Наконец, разберемся с бинарной группой икосаэдра. Эта 120-элементная группа есть полный прообраз группы вращений икосаэдра $\text{Sym}^+(I)$.

Обозначим через φ золотое сечение:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Упражнение 2¹/₂.17. Убедитесь, что $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2}$, а $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\varphi^{-1}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Указание. Рассмотрите «золотой треугольник» — равнобедренный треугольник с углом $\pi/5$ при вершине.

Теперь возьмем кватернион $\frac{1}{2}(\varphi + i + \varphi^{-1}j)$ и рассмотрим множество \mathcal{J}' кватернионов, которые получаются из него четными перестановками координат и всевозможными сменами знаков при координатах. Заметим, что все эти кватернионы имеют единичный модуль. Число элементов в \mathcal{J}' равно $2^3 \cdot |\mathfrak{A}_4| = 8 \cdot 12 = 96$. Теперь добавим к \mathcal{J}' множество единиц Гурвица \mathfrak{I} , которое нам уже встречалось выше, и обозначим полученное 120-элементное множество через \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cup \mathfrak{I}.$$

Задача 2¹/₂.18. а) Покажите, что \mathcal{J} образует подгруппу в $\text{Sp}(1)$ (а следовательно, по лемме 2¹/₂.12, и систему корней!). Эта система корней называется H_4 .

б) Докажите, что при отображении $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ группа \mathcal{J} переходит в группу вращений икосаэдра. Тем самым будет доказано, что \mathcal{J} есть бинарная группа икосаэдра.

в) Пусть $W_{\mathcal{J}}$ — группа отражений, соответствующая системе корней \mathcal{J} . Докажите, что она действует на \mathcal{J} транзитивно.

г) Докажите, что стабилизатор элемента $1 \in \mathcal{J}$ порожден отражениями относительно 30 чисто мнимых кватернионов из \mathcal{J} и изоморфен группе симметрий икосаэдра $\text{Sym} I$ (следовательно, он имеет порядок 120). Выведите отсюда, что порядок группы $W_{\mathcal{J}}$ равен 14400.

Задача 2¹/₂.19. Выпишите какие-нибудь системы простых корней для систем корней \mathfrak{C} и \mathcal{J} .

Ответ на эту задачу будет дан в конце следующей лекции.

Лекция 3

Возьмем это самое слово «А-пять».
Зачем мы его произносим,
Когда мы могли бы спокойно сказать:
«Е-шесть», и «Е-семь», и «Е-восемь»?

Почти что из Винни-Пуха

3.1. Графы Кокстера: определение

Как мы видели в лекции 2, группа отражений W порождается отражениями s_1, \dots, s_r относительно простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Эти отражения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$s_i^2 = \text{Id}; \quad (s_i s_j)^{n_{ij}} = \text{Id}, \quad (1)$$

где число n_{ij} определяется углом между векторами α_i и α_j :

$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}.$$

Оказывается, что все соотношения в группе отражений являются следствиями этих. Это утверждает следующая теорема, которую мы доказывать не будем; заинтересованный читатель может найти ее доказательство в книге [10] или в статье [8].

Теорема 3.1. *Группа W есть факторгруппа свободной группы, порожденной элементами s_1, \dots, s_r , по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей левые части соотношений (1).*

Как мы видели ранее (см. упражнение 2.19), вся информация о системе корней и соответствующей группе W задается набором чисел n_{ij} , т. е. углами между простыми корнями. Эти данные можно наглядно представить следующим образом.

Определение 3.2. Пусть W — группа отражений, $\Phi \supset \Delta$ — соответствующие система корней и система простых корней. *Графом Кокстера*, построенным по группе отражений W (или, что то же самое, по системе корней Φ), называется неориентированный граф с $|\Delta|$ вершинами (без кратных ребер и петель), ребра которого снабжены целочисленными отметками, не меньшими трех, определенный по следующему правилу:

- i -я и j -я вершины не соединены ребром, если $n_{ij} = 2$ (т. е. простые корни α_i и α_j ортогональны, или, что то же самое, простые отражения s_i и s_j коммутируют);

- в противном случае i -я и j -я вершины соединены ребром, снабженным отметкой n_{ij} .

Условимся, что вместо ребра с отметкой 3 мы будем рисовать простое ребро без числовой отметки. Это соглашение связано с тем, что большинство ребер в графе Кокстера снабжены отметкой 3; оно позволяет упростить обозначения.

Замечание. Иногда вместо ребер с числовыми отметками используются кратные ребра. В таком случае вершины i и j соединяются ребром кратности $n_{ij} - 2$ (что согласуется с нашими обозначениями при $n_{ij} = 2$ и 3).

Поскольку все системы простых корней в данной системе корней Φ сопряжены, граф Кокстера системы корней Φ зависит только от самой системы корней и не зависит от выбора системы простых и положительных корней в Φ .

Упражнение 3.3. Нарисуйте графы Кокстера для систем корней типа A , B и D и для групп симметрий диэдра и трехмерных правильных многогранников.

Далеко не всякий граф с числовыми отметками на ребрах является графом Кокстера какой-либо группы отражений. С другой стороны, ясно, что если по графу может быть восстановлена группа отражений, то она восстанавливается единственным образом.

Очевидно, что для того, чтобы граф с n вершинами и отметками n_{ij} был бы графом Кокстера, необходимо, чтобы существовала система из n векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в \mathbb{R}^n , попарные углы между которыми равнялись бы

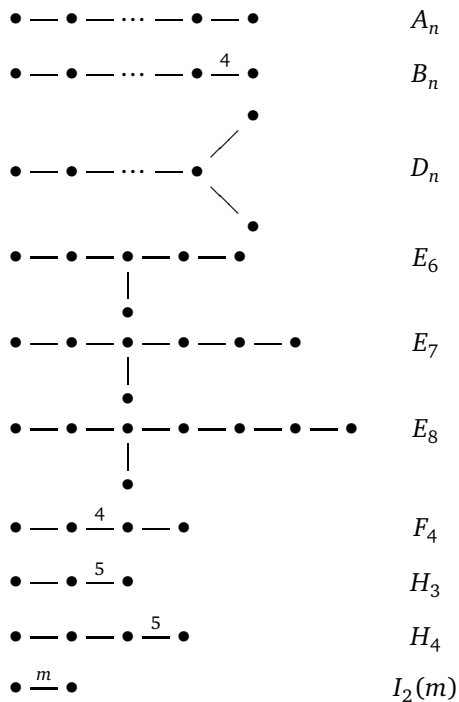
$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}.$$

Основная цель этой лекции — получить список всех графов Кокстера. Это даст нам полную классификацию конечных групп отражений.

3.2. Классификация конечных групп отражений: формулировка результата

Ответ на интересующий нас вопрос формулируется следующим образом.

Теорема 3.4 (теорема о классификации конечной группы отображений). *Граф является графом Кокстера некоторой системы корней тогда и только тогда, когда каждая из его компонент связности принадлежит следующему списку:*



Как уже известно читателю, решившему упражнение 3.3, определенные в лекции 1 группы типов A_n , B_n и D_n действительно соответствуют одноименным графам Кокстера из этой таблицы, а группа самосовмещений m -угольника на плоскости соответствует графу $I_2(m)$.

3.3. Доказательство теоремы о классификации: инструментарий

Нетрудно видеть, что можно ограничиться рассмотрением связанных графов Кокстера: если граф несвязен, то соответствующая группа отражений (если она существует) распадается в прямое произведение нескольких подгрупп отражений, каждая из которых соот-

ветствует связной компоненте графа Кокстера (соответственно, система корней распадается в несколько ортогональных подсистем). Поэтому достаточно описать все связные графы Кокстера. Группы отражений и их системы корней, соответствующие связным графам Кокстера, будем называть *неразложимыми*.

Общая стратегия нашего доказательства будет такова: мы выясним, каких подграфов не может быть в связном графе Кокстера. В итоге мы придем к тому, что все графы, не содержащие этих запрещенных подграфов, суть в точности графы из теоремы 3.4. После этого нам останется лишь предъявить примеры групп отражений, соответствующих этим графам.

Для заданного графа Γ будем искать описанную в п. 3.1 систему, состоящую из единичных векторов. Нам известна матрица Грама

$$G(\Gamma) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = ((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

этой системы: на ее диагонали стоят единицы, а вне диагонали — неположительные числа $\cos(\pi - \pi/n_{ij}) = -\cos(\pi/n_{ij})$. Если два вектора β и γ разложены по базису из $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: $\beta = \sum b_i \alpha_i$, $\gamma = \sum c_i \alpha_i$, то их скалярное произведение равно

$$(\beta, \gamma) = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)(G(\Gamma)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама системы векторов в пространстве должна быть положительно определена. Это дает нам весьма сильные ограничения на значения n_{ij} (т. е. на отметки на ребрах графа), которые позволяют исключить некоторые графы. Для их исключения мы будем пользоваться тремя основными инструментами.

Положительность определителя матрицы Грама: $\det G(\Gamma) > 0$.

Неравенство Коши—Буняковского: $(\lambda, \mu)^2 < (\lambda, \lambda)(\mu, \mu)$ для любых двух не пропорциональных друг другу векторов λ, μ .

Теорема Пифагора: пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ — ортонормированная система векторов (не обязательно базис). Тогда для произвольного век-

тора λ выполняется неравенство

$$(\lambda, \lambda) \geq \sum_{i=1}^k (\lambda, \varepsilon_i)^2,$$

причем оно является строгим тогда и только тогда, когда $\lambda \notin \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \rangle$.

3.4. Доказательство теоремы о классификации: необходимость

В этом разделе мы в десять шагов исключим некоторые, не являющиеся графами Кокстера. В результате останутся только те, которые перечислены в теореме 3.4. Тем самым в теореме будет доказана часть «только тогда».

Шаг 1. Пусть Γ — граф Кокстера и граф Γ' получается из Γ удалением некоторых вершин и всех примыкающих к ним ребер. Тогда граф Γ' — граф Кокстера.

Это очевидно.

Шаг 2. Граф Кокстера является деревом (т. е. не содержит циклов).

Доказательство. Покажем, что Γ является деревом. Рассмотрим вектор $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, где, как обычно, векторы α_i отвечают простым корням, и найдем его скалярный квадрат:

$$(\alpha, \alpha) = \left(\sum \alpha_i, \sum \alpha_i \right) = n - 2 \sum_{i < j} \cos(\pi/n_{ij}) \geq n - \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{ребрам}}} 1 > 0.$$

Следовательно, число ребер не превосходит $n - 1$, т. е. Γ — дерево. \square

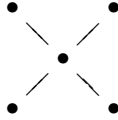
Шаг 3. Граф Кокстера не может содержать:

- а) вершину степени не меньше 4;
- б) вершину степени 3, из которой исходит ребро с отметкой не меньше 4;
- в) вершину, из которой исходят два ребра с отметками не меньше 4.

Доказательство. В силу шага 1 достаточно проверить, что ни один из трех минимальных графов, удовлетворяющих условиям а)–в), не является графом Кокстера. Действительно, пусть исходный граф Γ содержит какой-либо такой подграф. Удалим все вершины, кроме входящих в этот подграф, и все исходящие из них ребра. Полу-

ченный граф либо содержит цикл (следовательно, не является графом Кокстера в силу шага 2), либо имеет вид, описанный в условии.

Докажем, что граф



(возможно, с отметками на ребрах) не является графом Кокстера. Обозначим векторы, соответствующие центральной и крайним вершинам, через α и $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ соответственно. Последние четыре вектора образуют ортонормированную систему, а α не принадлежит их линейной оболочке. Значит, по теореме Пифагора

$$1 = (\alpha, \alpha) > \sum_{i=1}^4 (\alpha, \alpha_i)^2 \geq \sum_{i=1}^4 (1/2)^2 = 1.$$

Противоречие. □

Упражнение 3.5. Разберитесь самостоятельно с пп. б) и в).

Шаг 4. Если в графе Кокстера Γ имеется цепочка вершин, соединенных между собой простыми ребрами, причем никакие вершины, кроме первой и последней, более ни с чем не соединены, то эту цепочку можно «стянуть», заменив ее одной вершиной и оставив все остальные ребра и вершины без изменений. Полученный в результате граф $\tilde{\Gamma}$ также будет графом Кокстера:



Доказательство. Предъявим для графа $\tilde{\Gamma}$ набор векторов с заданными скалярными произведениями. Этот набор получается из набора для Γ при помощи замены векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, соответствующих вершинам, которые образуют цепочку, на их сумму $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Действительно,

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{1 \leq i \leq k} (\alpha_i, \alpha_i) - 2 \sum_{1 \leq i \leq k-1} (\alpha_i, \alpha_{i+1}) = k - (k-1) = 1,$$

а для всякого вектора β , соответствующего вершине не из цепочки,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta) \quad \text{либо} \quad (\alpha, \beta) = (\alpha_k, \beta),$$

что и требовалось. □

Определение 3.6. Особенностью графа будем называть либо вершину степени выше 2, либо кратное ребро (т. е. ребро с отметкой не меньше 4).

Шаг 5. Граф Кокстера содержит не более одной особенности.

Доказательство. Это следует из предыдущих двух шагов: если особенностей более одной, то рассмотрим цепочку, соединяющую две ближайшие особенности, и стянем ее; полученный граф не будет графом Кокстера в силу шага 3. \square

Дальнейшие четыре шага посвящены исключению некоторых подграфов с кратным ребром.

Шаг 6. Граф $\bullet - \bullet \overset{m}{\bullet} - \bullet$ не является графом Кокстера при $m \geq 5$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть вершинам, занумерованным слева направо, соответствуют векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Рассмотрим векторы $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\gamma = 2\alpha_3 + \alpha_4$. Легко убедиться, что $(\beta, \beta) = (\gamma, \gamma) = 3$, а $(\beta, \gamma) = -4 \cos \frac{\pi}{m}$. Но $\cos \frac{\pi}{m} \geq \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. Запишем неравенство Коши—Буняковского:

$$9 = 3 \cdot 3 = (\beta, \beta)(\gamma, \gamma) > (\beta, \gamma)^2 \geq (1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5} > 9.$$

Противоречие. \square

Шаг 7. Граф $\bullet - \bullet \overset{4}{\bullet} - \bullet - \bullet$ не является графом Кокстера.

Шаг 8. Граф $\bullet \overset{5}{\bullet} - \bullet - \bullet - \bullet$ не является графом Кокстера.

Шаг 9. Граф $\bullet \overset{m}{\bullet} - \bullet$ не является графом Кокстера при $m \geq 6$.

Упражнение 3.7. Пользуясь инструментарием из предыдущего пункта, докажите эти три утверждения.

Мы получили, что если граф не содержит вершину степени 3, то он является одним из следующих: $A_n, B_n, F_4, H_3, H_4, I_2(m)$.

Теперь разберем случай, когда в графе есть вершина степени 3:



Шаг 10. Граф с вершиной степени 3, состоящий из трех «щупалец», длины которых равны $p - 1$, $q - 1$ и $r - 1$ соответственно, является графом Кокстера только тогда, когда для длин «щупалец» выполнено соотношение

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \quad (2)$$

Доказательство (набросок). Пусть векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha'_1, \dots, \alpha'_q, \alpha''_1, \dots, \alpha''_r$ соответствуют вершинам, образующим «щупальца» и занумерованным от краев к центру так, что $\alpha_p = \alpha'_q = \alpha''_r$. Рассмотрим ортогональные векторы

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (p-1)\alpha_{p-1}, \\ &\alpha'_1 + 2\alpha'_2 + \dots + (q-1)\alpha'_{q-1} \quad \text{и} \\ &\alpha''_1 + 2\alpha''_2 + \dots + (r-1)\alpha''_{r-1}. \end{aligned}$$

Вектор $\alpha_p = \alpha'_q = \alpha''_r$ не лежит в их линейной оболочке. Теперь осталось воспользоваться теоремой Пифагора. \square

Несложно перечислить все решения уравнения (2) в целых числах, больших единицы: (p, q, r) может быть равно $(2, 2, r)$ при произвольном $r \geq 2$, а также $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$. Первая серия решений дает нам графы Кокстера типа D_n , а последние три — графы E_6, E_7 и E_8 .

3.5. Доказательство теоремы о классификации: достаточность

Последнее, что от нас требуется — это выписать системы корней и простых корней для всех графов, перечисленных в теореме 3.4. Этому посвящен настоящий раздел.

Системы корней, соответствующие сериям A_n, B_n, D_n и $I_2(m)$, мы уже видели в п. 2.2. Осталось разобраться с системами корней, которые соответствуют графам E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 и H_4 . Оказывается, последние три системы корней нам уже встречались в интермедии.

Предложение 3.8. 1. Бинарная группа куба $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}$ есть система корней типа F_4 .

2. Бинарная группа икосаэдра $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}$ есть система корней типа H_4 .

3. Пусть \mathcal{I}^{lm} есть множество чисто мнимых кватернионов из \mathcal{I} . Оно образует систему корней типа H_3 .

Мы не будем доказывать это предложение, а лишь выпишем явно системы простых корней для указанных систем корней. Проверка того, что эти наборы векторов действительно суть системы простых корней, а также что углы между ними такие, как предписано графом Кокстера, останется читателю в качестве несложного упражнения.

Для системы корней \mathfrak{C} имеем

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j - k), \quad \alpha_3 = k, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

А вот система простых корней для системы корней \mathfrak{J} :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varphi^{-1} - \varphi j - k), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(-\varphi i + \varphi^{-1} j + k),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(\varphi^{-1} i + j - \varphi k), \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varphi^{-1} i - j + \varphi k)$$

(здесь, как и раньше, $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$). При этом корни α_2 , α_3 и α_4 образуют систему простых корней для системы корней \mathfrak{J}^{lm} . Следовательно, последняя является системой корней типа H_3 . Можно показать, что соответствующая группа отражений есть группа симметрий икосаэдра $\text{Sym } I$.

Теперь осталось убедиться в существовании систем корней типа E_6 , E_7 и E_8 . В силу шага 1 из предыдущего пункта достаточно предъявить систему корней типа E_8 ; остальные две системы E_6 и E_7 будут в ней содержаться.

В принципе, эту систему корней и систему простых корней можно было бы выписать явно и на этом остановиться — проверка покажет, что предъявленный набор действительно является нужной нам системой корней (с данной диаграммой). Однако мы хотели бы мотивировать эту конструкцию, показав, откуда появляется эта система корней, и попутно упомянуть о еще одной задаче, где возникают группы отражений.

Как мы уже упомянули в начале этой брошюры, графы Кокстера — в той или иной своей инкарнации — возникают во многих задачах. В частности, их ближайшие родственники, *схемы Дынкина*, появляются в задаче классификации так называемых *кристаллографических групп*. Мы не будем здесь вдаваться ни в детали сходства и различия между этими родственниками (скажем лишь, например, что графу Кокстера B_n соответствуют две схемы Дынкина B_n и C_n , что объясняет, почему после буквы B у нас идет D), ни в теорию кристаллографических групп — ибо для этого объем брошюры пришлось бы существенно увеличить. Прочитать об этом можно, например, в гл. 2 книги [10]; мы же скажем лишь, что кристаллографические группы связаны с изучением некоторых решеток в \mathbb{R}^n . Соответствующие системы корней при этом оказываются подходящими из «коротких» векторов этих решеток.

Для построения системы корней типа E_8 мы как раз построим некоторую решетку в восьмимерном пространстве и рассмотрим в ней множество всех векторов минимальной положительной длины. Оно будет образовывать нужную нам систему корней.

Пусть e_1, \dots, e_8 — ортонормированный базис в \mathbb{R}^8 . Начнем с решетки L' , состоящей из всех векторов $\sum c_i e_i$, для которых $c_i \in \mathbb{Z}$ и сумма всех коэффициентов $\sum_{i=1}^8 c_i$ четна. Теперь рассмотрим минимальную решетку, содержащую L' и вектор $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i$:

$$L = L' + \mathbb{Z} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i \right).$$

Заметим, что квадрат длины любого вектора в этой решетке четен (проверьте это!). Обозначим через Φ множество векторов, квадрат длины которых минимален, т. е. равен 2. Множество Φ состоит из 240 векторов:

$$\pm e_i \pm e_j \quad (i < j) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i \quad (\text{число знаков «+» четно}).$$

Упражнение 3.9. Докажите, что Φ является системой корней.

В качестве системы простых корней в Φ возьмем следующий набор:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8), \\ \alpha_2 &= e_1 + e_2, \\ \alpha_i &= e_{i-1} - e_{i-2} \quad (3 \leq i \leq 8). \end{aligned}$$

Упражнение 3.10. Проверьте, что это действительно система простых корней в Φ , соответствующая графу Кокстера E_8 . Убедитесь также, что первые шесть и первые семь из перечисленных векторов α_i порождают системы корней типа E_6 и E_7 соответственно.

Итак, для каждого графа из списка в теореме 3.4 мы предъявили соответствующую систему корней. Это дает нам полную классификацию конечных групп отражений. Теорема о классификации конечных групп отражений доказана полностью. \square

Лекция 4

Город расположен четверугольником, и длина его такая же, как и ширина. И измерил он город тростью на двенадцать тысяч стадий; длина и ширина и высота его равны.

Откровение Иоанна Богослова, 21:16

В этой лекции мы достигнем цели, заявленной в самом начале брошюры: мы дадим определение правильного многогранника в n -мерном пространстве, после чего опишем все правильные многогранники. Это будет сделано следующим образом. Сначала мы покажем, что группа симметрий правильного многогранника есть группа отражений. Более того, эта группа обязана удовлетворять следующему дополнительному условию: ее граф Кокстера *линеен*, т. е. не содержит вершин степени 3. Далее мы выясним, что по этой группе можно восстановить сам правильный многогранник, причем не более чем двумя способами. При этом два многогранника с одной и той же группой симметрий будут двойственными друг к другу. Наконец, мы найдем количество граней каждой размерности у каждого из полученных многогранников.

4.1. Правильные многогранники и их группы симметрий

В лекции 1 мы рассмотрели группы симметрий правильных многогранников в трехмерном пространстве и убедились, что они обладают следующим свойством: группа симметрий $\text{Sym } M$ правильного многогранника M действует транзитивно на флагах — наборах из примыкающих друг к другу вершины, ребра и грани многогранника M . Понятие флага очевидным образом переносится на многогранники произвольной размерности.

Определение 4.1. Пусть M — многогранник в \mathbb{R}^n и $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n-1}$ — множества его 0-мерных граней (вершин), одномерных граней (ребер), ..., граней размерности $n - 1$ (гиперграней). После-

довательность граней (F_0, F_1, \dots, F_n) , где $F_i \in \mathcal{F}_i$, а $F_n = M$, называется *флагом*, если $F_i \subset F_{i+1}$ при всех i от 0 до $n - 1$.

После этого указанное свойство групп симметрий можно принять в качестве определения правильного многогранника.

Определение 4.2. Многогранник M называется *правильным*, если действие $\text{Sym } M$ на флагах транзитивно, т. е. любой флаг можно перевести в любой другой.

Пусть M — правильный многогранник в n -мерном пространстве. Рассмотрим какую-нибудь его грань F . По определению она тоже является правильным многогранником, и ее симметрии суть в точности симметрии многогранника M , оставляющие грань F на месте.

Замечание. Если симметрия грани F является отражением (как преобразование плоскости, содержащей F), то она продолжается до отражения всего пространства, содержащего многогранник M .

Теорема 4.3. *Группа $\text{Sym } M$ порождается n отражениями.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по размерности многогранника. База индукции очевидна: при $n = 1$ единственный правильный многогранник — это отрезок, его группа симметрий порождается одним отражением.

Пусть M — многогранник размерности n . Рассмотрим две его гиперграни F и F' , пересекающиеся по грани E размерности $n - 2$. Достаточно доказать, что $\text{Sym } M$ порождается подгруппой $\text{Sym } F$ и отражением s относительно грани E (точнее, относительно гиперплоскости, проходящей через E и через центр многогранника). Обозначим через Γ группу, порожденную отражением s и $\text{Sym } F$, и будем доказывать, что $\Gamma = \text{Sym } M$.

Сначала докажем, что Γ содержит отражение относительно любой грани E' размерности $n - 2$, принадлежащей F (обозначим это отражение через s'). Действительно, в силу транзитивности действия $\text{Sym } F$ на гранях данной размерности существует преобразование $g \in \text{Sym } F$, переводящее E в E' . Тогда отражение s' записывается как результат сопряжения отражения s при помощи элемента g :

$$s' = g \circ s \circ g^{-1},$$

следовательно, $s' \in \Gamma$.

Теперь докажем, что Γ содержит все преобразования, переводящие грань F' в себя. Действительно, они все имеют вид

$$g' = s \circ g \circ s,$$

где $g \in \text{Sym } F'$ (последний сомножитель можно не обращать, так как $s^{-1} = s$). Выбирая в качестве g всевозможные симметрии грани F ,

мы будем получать в качестве g' всевозможные симметрии грани F' . Следовательно, $\text{Sym } F' \subset \Gamma$.

Те же самые рассуждения можно провести, заменив F на F' , а F' на произвольную грань, смежную с F' , и т. д. В итоге получим, что Γ содержит все симметрии всех гиперграней нашего многогранника и все симметрии относительно его граней размерности $n - 2$.

Теперь рассмотрим произвольное преобразование $g \in \text{Sym } M$ и некоторую гипергрань F многогранника M . Мы уже знаем, что имеет ся композиция отражений относительно граней размерности $n - 2$, переводящая F в $g(F)$. Обозначим ее через w ; согласно доказанному, $w \in \Gamma$. Композиция $h = w^{-1} \circ g$ переводит гипергрань F в себя, поэтому $h \in \text{Sym } F \subset \Gamma$. Следовательно, $g = w \circ h \in \Gamma$. Значит, $\Gamma = \text{Sym } M$, что и требовалось. \square

4.2. Образующие группы симметрий правильного многогранника и соотношения между ними

Предыдущая теорема (вернее, ее доказательство) дает нам возможность предъявить образующие группы $\text{Sym } M$ в явном виде. Для этого фиксируем произвольный флаг (F_0, F_1, \dots, F_n) . Пусть c_0, c_1, \dots, c_n — центры этих граней (в частности, $c_0 = F_0$, а c_n совпадает с центром масс всего многогранника). Для каждого $i \in [1, n]$ обозначим через H_i гиперплоскость, проходящую через все эти точки, кроме c_{i-1} (такой сдвиг нумерации вызван тем, что мы хотим нумеровать гиперплоскости числами от 1 до n , а не от 0 до $n - 1$). Рассмотрим набор отражений s_i относительно этих гиперплоскостей.

Из нашего построения следует, что каждая плоскость H_i содержит все грани F_j при $j \leq i - 2$ и перпендикулярна всем граням F_l при $l \geq i$. Если ограничить отражение s_i на i -мерное подпространство, содержащее грань F_i , то в нем оно действует как отражение относительно грани F_{i-2} . Мы получили следующий результат.

Следствие 4.4 (из доказательства теоремы 4.3). *Описанные выше отражения s_1, \dots, s_n порождают группу $\text{Sym } M$.*

Теперь выясним, каким соотношениям удовлетворяют эти образующие.

Определение 4.5. Пусть (F_0, \dots, F_n) — некоторый флаг правильного многогранника M и $1 \leq k \leq n - 1$. Число k -мерных граней, содержащихся в F_{k+1} и содержащих F_{k-2} , обозначим через p_k . (При

этом мы формально полагаем $F_{-1} = \emptyset$. Число $(k - 1)$ -мерных граней, заключенных между F_{k+1} и F_{k-2} , также равно p_k (почему?). Набор (p_1, \dots, p_{n-1}) называется *символом Шлефли* многогранника M .

Очевидно, что данное определение не зависит от выбора флага.

Пример 4.6. Символ Шлефли куба равен $(4, 3)$. Действительно, $p_1 = 4$, так как каждая грань содержит четыре ребра и четыре вершины; $p_2 = 3$, поскольку каждая вершина содержится ровно в трех ребрах и трех гранях. Убедитесь сами, что символы Шлефли тетраэдра, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра равны $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ и $(5, 3)$ соответственно.

Предложение 4.7. Пусть s_1, \dots, s_n — система образующих группы $\text{Sym } M$, построенная в начале этого пункта. Тогда

1) $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i - j| > 1$;

2) порядок элемента $s_i s_{i+1}$ равен p_i , где (p_1, \dots, p_{n-1}) — символ Шлефли многогранника M .

Доказательство. 1) Докажем, что гиперплоскости отражений s_i и s_j перпендикулярны. Пусть k таково, что $i < k < j$. Тогда гиперплоскость H_i перпендикулярна грани F_{k-1} , а гиперплоскость H_j содержит грань F_{k-1} . Значит, гиперплоскости H_i и H_j перпендикулярны.

2) Композиция отражений s_i и s_{i+1} является поворотом вокруг $(i - 2)$ -мерной грани F_{i-2} на угол $2\pi/m$, где m — количество i -мерных (или $(i - 1)$ -мерных) граней, сходящихся в F_{i-2} , т. е. $m = p_i$. Значит, порядок элемента $s_i s_{i+1}$ действительно равен p_i . Заметим, в частности, что отражения с соседними номерами не коммутируют, так как $p_i \geq 3$. \square

Возникает естественная гипотеза: $\text{Sym } M$ есть группа отражений, соответствующая графу Кокстера с n вершинами, в котором между каждыми двумя последовательными вершинами с номерами i и $i + 1$ имеется ребро с отметкой p_i , а никакие другие вершины между собой не соединены. Мы докажем, что это действительно так. Для этого нам нужно показать, что построенные s_i являются простыми отражениями.

4.3. Система корней группы симметрий правильного многогранника

Возьмем произвольный флаг $(F'_0, F'_1, \dots, F'_n)$ многогранника M и фиксируем центры его граней c'_i . Для каждого $i \in [1, n]$ возьмем гиперплоскость, проходящую через все c'_j , кроме c'_{i-1} . Теперь рассмот-

рим вектор α единичной длины, перпендикулярный этой гиперплоскости и направленный в полупространство, содержащее пропущенный центр грани c'_{i-1} . Обозначим множество всех таких векторов, полученных при всевозможных выборах флагов и номеров пропущенных граней i , через Φ .

Лемма 4.8. 1. Множество Φ является системой корней, т. е. удовлетворяет обеим аксиомам из определения 2.2.

2. Группа отражений W , построенная по системе корней Φ , совпадает с группой $\text{Sym } M$.

Доказательство.

Задача 4.9. Докажите п.1 самостоятельно.

2. Группа W порождена отражениями s_α при всех $\alpha \in \Phi$. Из предыдущего пункта мы знаем, что построенная так система образующих s_1, \dots, s_n группы $\text{Sym } M$ лежит в W ; значит, $\text{Sym } M \subset W$. С другой стороны, любое из рассматриваемых отражений сохраняет многогранник M , поэтому $W \subset \text{Sym } M$. \square

Пусть, как и прежде, c_i — центры граней нашего фиксированного флага (F_0, \dots, F_n) . Обозначим через β_i единичный вектор, перпендикулярный гиперплоскости, проходящей через все c_j при $j \neq i-1$ и лежащий в том же полупространстве, что и c_{i-1} .

Лемма 4.10. $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ есть система простых корней для системы корней Φ .

Доказательство. Пусть H_i^+ — полупространство, ограниченное гиперплоскостью H_i и содержащее вектор β_i (или, что то же самое, точку c_{i-1}). Рассмотрим фундаментальный конус

$$D = \bigcap_{i=1}^n H_i^+.$$

По определению D есть конус, двойственный к конусу, порожденному векторами β_1, \dots, β_n . Можно убедиться (проверьте это!), что $\text{Int } D$ не пересекается ни с какой из гиперплоскостей H_α при произвольном $\alpha \in \Phi$. Тогда утверждение леммы следует из п.1 предложения 2.32. \square

Упражнение 4.11. Докажите, что D является фундаментальной областью для группы $\text{Sym } M$.

Итак, мы доказали теорему о классификации групп симметрий правильных многогранников, заявленную в начале этого пункта.

Теорема 4.12. Группа симметрий $\text{Sym } M$ правильного многогранника M является группой отражений. Ее граф Кокстера линеен (т. е.

не содержит вершин степени 3) и связан. Числовая отметка на ребре графа Кокстера, соединяющем вершины i и $i + 1$, равна p_i , где (p_1, \dots, p_{n-1}) — символ Шлефли многогранника M .

Все возможные группы симметрий правильных многогранников представлены в следующей таблице. Там, где это возможно, мы также приводим описание этих групп.

Тип	Граф Кокстера	$ \text{Sym } M $	$\text{Sym } M$
A_n	$\bullet - \bullet - \bullet \dots - \bullet - \bullet$	$(n + 1)!$	симметрическая группа \mathfrak{S}_{n+1}
B_n	$\bullet - \bullet - \bullet \dots - \bullet - \frac{4}{\bullet}$	$2^n \cdot n!$	$\mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n$
F_4	$\bullet - \bullet - \frac{4}{\bullet} - \bullet$	$1152 = 2^7 \cdot 3^2$	
H_3	$\bullet - \bullet - \frac{5}{\bullet}$	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{A}_5$
H_4	$\bullet - \bullet - \bullet - \frac{5}{\bullet}$	$14400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	
$I_2(m)$	$\bullet - \frac{m}{\bullet}$	$2m$	группа симметрий m -угольника

4.4. Построение правильного многогранника по его группе симметрий

В предыдущей части этой лекции мы решали следующую задачу: как описать группу симметрий $\text{Sym } M$ для заданного правильного многогранника M ? Сейчас мы займемся обратной задачей, а именно, будем восстанавливать правильный многогранник по его группе симметрий.

Пусть M — правильный многогранник, (F_0, \dots, F_n) — некоторый его флаг. По этим данным мы построили фундаментальный конус D многогранника M и доказали, что он является замыканием некоторой камеры Вейля группы $\text{Sym } M$. При этом M однозначно определяется точками c_0, \dots, c_{n-1} , лежащими на ребрах конуса D , — эти точки являются центрами граней F_i выбранного флага. Тем самым ребра фундаментального конуса оказываются пронумерованными. Далее, гипергрань F_{n-1} проходит через все точки c_0, \dots, c_{n-1} и перпендикулярна прямой $c_{n-1}c_n$. Таким образом, по фундаментальному конусу D с пронумерованными ребрами многогранник M вос-

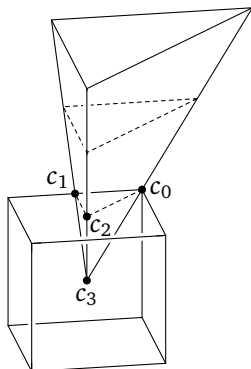


Рис. 8. Восстановление куба по его фундаментальному конусу

становливается однозначно с точностью до подобия (отвечающего выбору точки c_{n-1} на соответствующем ребре).

Точка c_{n-1} выбирается на ребре фундаментального конуса, отвечающем *висячей* вершине графа Кокстера. Таких вершин две. Поэтому при задании правильного многогранника графом Кокстера существенную роль играет его ориентация — указание того, какая висячая вершина отвечает первому отражению s_1 , а какая — последнему s_n .

Определение 4.13. Линейный связный граф Кокстера, в котором одна из висячих вершин объявлена началом, а другая — концом, называется *ориентированным*.

Теорема 4.14. *Каждый ориентированный линейный связный граф Кокстера соответствует ровно одному правильному многограннику (с точностью до подобия). Символ Шлефли этого многогранника равен последовательности отметок на ребрах данного графа Кокстера, прочитанной начиная с начальной вершины.*

Доказательство. Сначала докажем существование такого многогранника. Рассмотрим систему корней Φ , соответствующую заданному графу Кокстера. Пусть W — соответствующая группа отражений, β_1, \dots, β_n — система простых корней в Φ , а D — конус, двойственный к конусу, порожденному простыми корнями. Рассмотрим ребро r конуса D , полученное как пересечение всех гиперплоскостей H_i отражений относительно β_i при $1 \leq i \leq n-1$ (т.е. гиперплоскостей всех простых отражений, кроме последнего). Пусть Π — аффинная гиперплоскость корней, перпендикулярная этому ребру,

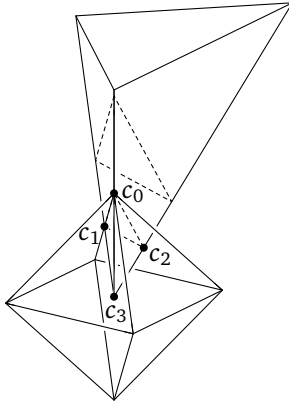


Рис. 9. Восстановление октаэдра по его фундаментальному конусу

а Π^- — полупространство с границей Π , содержащее вершину конуса D . Возьмем все полупространства, получаемые из Π^- действием элементов из W , и рассмотрим множество

$$M = \bigcap_{w \in W} w \cdot \Pi^-.$$

Это многогранник, группой симметрий которого является W . Теперь осталось убедиться, что W транзитивно действует на флагах многогранника M . Это напрямую следует из равенства

$$M = W \cdot (\Pi^- \cap D).$$

Упражнение 4.15. Докажите это равенство.

Указание. Воспользуйтесь леммой 2.30.

Утверждение о символе Шлефли следует из конструкции системы образующих группы W , описанной в п. 4.2.

Теперь докажем единственность такого многогранника. Как мы видели выше, $M = W \cdot C$, где C — симплекс, полученный в результате пересечения фундаментального конуса D с полупространством Π^- , перпендикулярным его заданному ребру. Ясно, что все такие симплексы подобны, следовательно, подобны и получаемые из них многогранники. \square

При изменении ориентации графа Кокстера многогранник переходит в двойственный. Таким образом, несимметричные линейные

связные графы Кокстера (B_n , H_3 , H_4) соответствуют парам двойственных многогранников, а симметричные (A_n , F_4 , $I_2(m)$) — самодвойственным многогранникам.

Итак, мы получили полную классификацию правильных многогранников. Ее можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4.16. *В пространстве произвольной размерности существуют три правильных многогранника, символы Шлефли которых равны $(3, \dots, 3)$, $(4, 3, \dots, 3)$ и $(3, \dots, 3, 4)$ соответственно (их мы будем называть регулярными). Кроме того, в малых размерностях имеются следующие исключительные многогранники.*

Случай $n = 2$: правильный m -угольник, соответствующий символу Шлефли (m) , с группой симметрий типа $I_2(m)$.

Случай $n = 3$: правильные додекаэдр и икосаэдр, соответствующие символам Шлефли $(5, 3)$ и $(3, 5)$; их группа симметрий имеет тип H_3 .

Случай $n = 4$: один самодвойственный многогранник с символом Шлефли $(3, 4, 3)$ и группой симметрий типа F_4 и два двойственных друг другу многогранника с символами Шлефли $(5, 3, 3)$ и $(3, 3, 5)$ и группой симметрий типа H_4 .

Построим явно три регулярных правильных многогранника в \mathbb{R}^n .

Определение 4.17. 1. Рассмотрим в \mathbb{R}^{n+1} набор из $n + 1$ точки с координатами $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (одна координата равна единице, остальные — нули). Выпуклая оболочка этих точек есть n -мерный многогранник, лежащий в плоскости $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$. Этот многогранник называется n -мерным симплексом.

2. Рассмотрим в \mathbb{R}^n набор из 2^n точек с координатами $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ при всевозможных выборах знаков. Выпуклая оболочка этих точек называется n -мерным кубом.

3. Рассмотрим в \mathbb{R}^n набор из $2n$ точек вида $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$. Их выпуклая оболочка называется n -мерным кокубом.

Задача 4.18. Докажите, что симплекс, куб и кокуб — регулярные правильные многогранники, перечисленные в теореме 4.16.

4.5. Подсчет числа граней у правильных многогранников

Итак, мы перечислили все правильные многогранники. В этом пункте мы вычислим количество граней каждой размерности у каждого из них. Для удобства введем следующее обозначение.

Определение 4.19. Назовем f -вектором n -мерного многогранника M вектор

$$f(M) = (f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где значение $f_i = f_i(M)$ равно количеству i -мерных граней данного многогранника.

Если M — правильный многогранник, то группа $\text{Sym } M$ транзитивно действует на гранях: любую грань можно перевести в любую другую грань той же размерности. Поэтому количество i -мерных граней равняется порядку группы $\text{Sym } M$, деленному на порядок стабилизатора $(\text{Sym } M)_{F_i}$ данной i -мерной грани F_i .

Следующее предложение позволяет нам описать стабилизаторы i -мерных граней.

Предложение 4.20. Пусть (F_0, \dots, F_n) — флаг в M , а s_1, \dots, s_n — связанная с ним система образующих группы $\text{Sym } M$, описанная в п. 4.2. Стабилизатор $(\text{Sym } M)_{F_i}$ грани F_i есть подгруппа в $\text{Sym } M$, порожденная $n - 1$ отражением $s_1, \dots, \widehat{s_{i+1}}, \dots, s_n$. Таким образом, $(\text{Sym } M)_{F_i}$ также является группой отражений; ее граф Кокстера получается из графа Кокстера группы $\text{Sym } M$ удалением $(i + 1)$ -й вершины.

Доказательство. В п. 4.2 мы видели, что плоскость H_{i+1} отражения s_{i+1} содержит грани с номерами, не превосходящими $i - 1$, и перпендикулярна всем граням с номерами $i + 1$ и выше. Таким образом,

$$s_{i+1}(F_j) = F_j \quad \text{при } j \neq i.$$

Напротив, грань F_i переводится отражением s_{i+1} в другую грань, а именно, в смежную с F_i по ребру F_{i-1} . Следовательно,

$$(\text{Sym } M)_{F_i} = \langle s_1, \dots, \widehat{s_{i+1}}, \dots, s_n \rangle.$$

Оставшиеся утверждения получаются отсюда автоматически. \square

Это предложение позволяет нам вычислить количество граней каждой размерности у всех правильных многогранников.

Пример 4.21. Вычислим количество i -мерных граней у правильного n -мерного симплекса. Его группа симметрий $\text{Sym } M$ есть группа отражений типа A_n . Согласно предложению, $(\text{Sym } M)_{F_i}$ есть группа отражений, граф Кокстера которой получается удалением $(i + 1)$ -й вершины из графа Кокстера $\text{Sym } M$, т. е. A_n .



Этот граф состоит из двух связанных компонент: A_i и A_{n-i-1} . Значит,

$$|(\text{Sym } M)_{F_i}| = (i+1)!(n-i)!$$

(чтобы учесть случаи $i=0$ и $i=n-1$, будем считать, что A_0 есть пустой граф; напомним, что $0! = 1$, так что эти случаи не требуют дополнительного рассмотрения).

Следовательно, количество i -мерных ребер у правильного симплекса равно

$$f_i = \frac{|\text{Sym } M|}{|(\text{Sym } M)_{F_i}|} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} = C_{n+1}^{i+1}.$$

Пример 4.22. Теперь рассмотрим n -мерный куб. Ему соответствует ориентированный граф Кокстера B_n , в котором в качестве начальной вершины отмечена вершина при ребре с отметкой 4. Стабилизатор i -мерной грани есть группа отражений, соответствующая графу B_n , из которого удалена вершина с номером $i+1$. Следовательно, граф Кокстера группы $(\text{Sym } M)_{F_i}$ равен

$$\begin{aligned} &A_{n-1} \quad \text{при } i = 0; \\ &A_1 \sqcup A_{n-2} \quad \text{при } i = 1; \\ &B_i \sqcup A_{n-i-1} \quad \text{при } i \geq 2. \end{aligned}$$

Зная, что порядки групп отражений типа A_k и B_k равны $(k+1)!$ и $2^k \cdot k!$ соответственно, находим, что

$$|(\text{Sym } M)_{F_i}| = 2^i \cdot i! \cdot (n-i)!,$$

откуда получаем количество i -мерных граней n -мерного куба:

$$f_i(M) = 2^{n-i} C_n^i.$$

Количество i -мерных граней n -мерного кокуба — многогранника, двойственного к кубу, — равно количеству $(n-i-1)$ -мерных граней куба, т. е. $2^{i+1} C_n^{i+1}$.

Аналогичным образом можно найти f -векторы исключительных правильных многогранников, соответствующих графам Кокстера F_4 , H_3 и H_4 (в последних двух случаях — с обеими возможными ориентациями). Полученные результаты можно представить в виде таблицы на следующей странице.

Упражнение 4.23. а) Прделайте самостоятельно вычисления f -векторов для исключительных многогранников в размерностях 3 и 4.

n	Граф Кокстера	Символ Шлефли	f -вектор	Многогранник
1	•	\emptyset	(2)	отрезок
2	• $\frac{m}{m}$ •	(m)	(m, m)	m -угольник
3	• — • — •	(3, 3)	(4, 6, 4)	тетраэдр
	• $\frac{4}{4}$ • — •	(4, 3)	(8, 12, 6)	куб
	• — • $\frac{4}{4}$ •	(3, 4)	(6, 12, 8)	октаэдр
	• $\frac{5}{5}$ • — •	(5, 3)	(20, 30, 12)	додекаэдр
	• — • $\frac{5}{5}$ •	(3, 5)	(12, 30, 20)	икосаэдр
4	• — • — • — •	(3, 3, 3)	(5, 10, 10, 5)	симплекс
	• $\frac{4}{4}$ • — • — •	(4, 3, 3)	(16, 32, 24, 8)	гиперкуб
	• — • — • $\frac{4}{4}$ •	(3, 3, 4)	(8, 24, 32, 16)	гипероктаэдр
	• — • $\frac{4}{4}$ • — •	(3, 4, 3)	(24, 96, 96, 24)	24-гранник
	• $\frac{5}{5}$ • — • — •	(5, 3, 3)	(600, 1200, 720, 120)	120-гранник
	• — • — • $\frac{5}{5}$ •	(3, 5, 3)	(120, 720, 1200, 600)	600-гранник
$n \geq 5$	• — • — • — •	(3, ..., 3)	$(\dots, C_{n+1}^{i+1}, \dots)_{0 \leq i < n}$	симплекс
	• $\frac{4}{4}$ • — • — •	(4, 3, ..., 3)	$(\dots, 2^{n-i} C_n^i, \dots)_{0 \leq i < n}$	куб
	• — • — • $\frac{4}{4}$ •	(3, ..., 3, 4)	$(\dots, 2^{i+1} C_n^{i+1}, \dots)_{0 \leq i < n}$	кокуб

б) Гиперграни исключительных правильных многогранников размерности 4 являются правильными многогранниками размерности 3. Докажите, что гиперграни 24-, 120- и 600-гранника суть соответственно октаэдры, додекаэдры и тетраэдры.

В завершение предьявим без доказательства конструкции двух из трех исключительных четырехмерных многогранников — 24-гранника и 600-гранника (120-гранник будет получаться как двойственный к последнему). Оказывается, мы их уже встречали ранее, правда, под другими именами.

Теорема 4.24. 1. Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ — бинарная группа тетраэдра. Ее 24 элемента образуют множество вершин правильного 24-гранника в \mathbb{R}^4 .

2. Все 120 элементов бинарной группы икосаэдра $\mathfrak{I} \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ лежат в вершинах правильного 600-гранника.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2014.
2. *Бугаенко В. О.* Правильные многогранники // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 107—115.
3. *Бугаенко В. О.* Классификация многогранников Кокстера // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 82—106.
4. *Винберг Э. Б.* Калейдоскопы и группы отражений // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 45—63.
5. *Жис Э. и др.* Размерности: математическая прогулка. (Мультфильм). Русская версия доступна на официальном сайте фильма, http://dimensions-math.org/Dim_RU.htm
6. *Конвей Дж., Смит Д.* О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. М.: МЦНМО, 2009. 184 с.
7. *Циглер Г. М.* Теория многогранников / Пер. с англ. под ред. Н. П. Долбина. М.: МЦНМО, 2014. 568 с.
8. *Шварцман О. В.* Группы отражений и группы Кокстера // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 64—81.
9. *Coxeter H. S. M.* Regular polytopes. N. Y.: Dover Publications, 1973.
10. *Humphreys J. E.* Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge University Press, 1991.
11. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Continuität // Gesammelte mathematische Abhandlungen. Basel: Verlag Birkhäuser, 1950. Bd. 1. P. 167—387.