А. В. ГЛАДКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ ЛОГИКУ

МЦНМО, 2001

ББК 87.4
Г52

Гладкий А. В.

Г52 Введение в современную логику. — М.: МЦНМО, 2001. — 200 с.

ISBN 5-900916-98-7

Книга представляет собой учебное пособие, в котором начала логики впервые в отечественной учебной литературе излагаются на современном научном уровне и при этом в форме, доступной студентам гуманитарных факультетов высших учебных заведений. Наряду с формальной логикой излагаются элементы логики научного познания. Отдельно рассмотрены особенности рассуждений, используемых в гуманитарных областях знания.

Книга может служить также пособием для гимназий и лицеев.

ББК 87.4

ISBN 5-900916-98-7

Предисловие

Эта книга возникла из лекций, которые я читал в Российском государственном гуманитарном университете будущим историкам, филологам и психологам.

До сих пор, за редкими исключениями, логику у нас все еще излагают в «традиционном» стиле, то есть так, как будто ее развитие остановилось в середине XIX столетия — как раз тогда, когда ее лицо начало быстро изменяться. (Небольшой довесок об истинностных таблицах и кванторах, выглядящий в таком курсе чужеродным, не в счет.) Когда я в первый раз взялся прочесть курс логики на историко-филологическом факультете, мне было очевидно, что в конце XX столетия так читать его нет смысла. Поэтому я, рассказав в начале курса об основных логических законах и о том, что такое понятие и что такое предложение, перешел к символическому языку современной логики и элементам логики предложений и логики предикатов, затем изложил (на языке логики предикатов) основы аристотелевской силлогистики и закончил элементами логики научного познания (включая представление о гипотетико-дедуктивном методе и особый раздел о рассуждениях, используемых в гуманитарных областях знания).

Но к концу первого учебного года я почувствовал, что курсу не хватает главного стержня: определив логику как науку о строении рассуждений, я не дал на самом деле никакой теории их строения (не считая аристотелевской силлогистики, представляющей в наше время пусть и немалый, но все же лишь исторический интерес). И в следующем учебном году я рискнул включить в курс современную теорию доказательства в форме генценовского исчисления естественного вывода, наиболее адекватно описывающего реальный процесс дедуктивного рассуждения.

Эксперимент оказался удачным: студенты (точнее, те из них, кто готов был работать всерьез — но таких нашлось не так уж мало) хорошо усваивали смысл правил исчисления и справлялись с заданиями на построение выводов. Кроме того, опыт первого учебного года побудил меня предпослать изучению символического языка вспомогательную главу, посвященную множествам и отношениям. Так возник курс, который я решаюсь теперь предложить читателю, обработав его и присоединив два небольших добавления — о логических ошибках и о логических парадоксах.

При изложении теории доказательства я обращал особое внимание на различие между конструктивными и неконструктивными выводами. Этому вопросу посвящена отдельная глава.

Категорические суждения четырех традиционных типов я перевожу на символический язык иначе, чем это делалось до сих пор.[1] Такой перевод (опирающийся на широко употребительное в современной лингвистической семантике понятие пресуппозиции) более естествен и позволяет описать на символическом языке все 19 классических модусов силлогизма (а не 15, как при прежнем переводе).

Работая над книгой, я стремился сделать изложение возможно более доступным и с этой целью старался разъяснять ключевые моменты и иллюстрировать их примерами. Тем не менее, предлагаемый курс труднее традиционного; иначе и не может быть, потому что в нем излагается более трудный материал. Эта книга предназначена для тех, кто не боится труда и хочет изучить логику всерьез.

Я благодарен всем коллегам, многолетнее общение с которыми подготовило меня к написанию учебника логики. Особой благодарностью я обязан троим из них: Ф. А. Кабакову, обратившему мое внимание на важное различие между приведением к нелепости и доказательством от противного (и, по-видимому, вообще впервые отметившему необходимость различать эти два способа доказательства), Б. А. Трахтенброту, убедившему меня в свое время, что изучение символического языка логики проще и естественнее начинать не с пропозициональных связок, как чаще всего делают, а с предикатов и кванторов, и А. И. Фету, чьи идеи существенным образом использованы в 14-й главе.

А. Гладкий
Август 2000 г.

[1] Этот способ перевода был впервые использован в моем учебнике математической логики (см. список литературы в конце книги).

Введение

Как мы приобретаем знания о мире, в котором живем? Для этого есть два способа: непосредственное наблюдение и получение новых знаний из уже имеющихся. Первый способ практически никогда не используется «в чистом виде»: чтобы стать знанием, результат наблюдения должен быть как-то соотнесен со «старыми» знаниями, должен войти в их систему. (И даже у маленького ребенка, не успевшего еще накопить «своих собственных» знаний, наблюдения вкладываются в систему «врожденных знаний», добытых в ходе эволюции и передающихся от поколения к поколению генетическим путем. Представление о первоначальном состоянии человеческой души как «чистой доске» — tabula rasa — опровергнуто современной биологией.) Да и при выборе объектов наблюдения мы, как правило, исходим из каких-то гипотез, строящихся на основе того, что мы уже знаем. (Подробнее об этом пойдет речь в четвертой части книги.)

Зато второй способ — получение новых знаний из других, уже имеющихся, без обращения к непосредственному наблюдению действительности — применяется «в чистом виде» очень часто. Иногда при этом человек не может отдать себе отчета, как у него возникло новое знание; тогда говорят, что он «догадался». Та человеческая способность, благодаря которой мы в состоянии догадываться, называется *интуицией*. (Этот термин, происходящий от латинского intueor — «внимательно смотрю», отражает типичную картину «догадки»: человек пристально всматривается во что-то — возможно, «умственным взором», — и вдруг его «осеняет».)

В других случаях мы сознательно «выводим» из имеющихся у нас знаний новые. Например, если мы знаем про кого-то, что близкие друзья называют его Колей, а отца его зовут Иваном Петровичем, мы делаем отсюда вывод, что по имени и отчеству его следует называть Николаем Ивановичем. Такой способ получения знаний называется *рассуждением*.

И при интуитивной догадке, и при рассуждении мы никогда не застрахованы от ошибок. Поэтому всякое вновь полученное знание желательно проверить. Подробнее мы будем говорить о проверке в главе 13, а сейчас достаточно заметить, что для подтверждения догадки часто прибегают к рассуждениям. Решая, например, математическую задачу, мы, как правило, сначала догадываемся, как получить ее решение (или даже угадываем окончательный результат), а потом проводим строгое рассуждение, и только тогда задача считается решенной.

Причина, по которой рассуждению обычно доверяют больше, чем интуитивной догадке, очевидна: механизм интуиции недоступен прямому наблюдению, а рассуждение происходит «на свету» и выражается словами; поэтому мы можем составить себе определенное представление о том, как должно быть построено правильное рассуждение, и это позволит нам отличать правильные рассуждения от неправильных. Преимущество рассуждения перед догадкой состоит, таким образом, в его лучшей проверяемости.[1]

Некоторые представления о том, как можно рассуждать и как нельзя, имеются у каждого; все мы, начиная с какого-то возраста, что-то знаем о строении правильных рассуждений — точно так же, как все мы что-то знаем об устройстве окружающих нас «вещей». Однако человечество не удовольствовалось теми знаниями о «вещах», которые есть у каждого: оно создало естественные науки — физику, химию и другие, — позволившие узнать об этих «вещах» несравненно больше и изучить их несравненно глубже. Подобно этому и строение рассуждений стало предметом особой науки, которая называется *логикой*.

Поскольку рассуждение есть один из видов умственной деятельности человека, логика относится к гуманитарным наукам. Она имеет некоторые точки соприкосновения с психологией — наукой, изучающей психическую деятельность человека, в том числе и умственную. Однако логика не является частью психологии, т. к. ее подход к изучению рассуждений коренным образом отличается от психологического: психолог, изучая рассуждение, стремится понять внутренние психические механизмы, благодаря которым оно происходит, в то время как логик интересуется строением уже готового рассуждения, его формой.[2]

Много точек соприкосновения имеется между логикой и лингвистикой (языковедением) — наукой о строении и функционировании языка.

[1]Говоря здесь о догадке и рассуждении, мы сознательно упрощаем картину: в действительности, как мы увидим в главе 13, рассуждение может включать в себя догадки.

[2]Стоит заметить, что слово *рассуждение* имеет два разных смысла: оно может означать как процесс рассуждения, так и результат этого процесса. (Тем же свойством обладает ряд других русских слов — например, *решение, работа, постройка.*) Можно сказать, что рассуждение в первом смысле есть предмет изучения психологии, во втором — логики.

Это понятно: ведь рассуждения, как уже говорилось, выражаются словами. Многие фундаментальные лингвистические понятия родственны логическим или имеют логическую основу. Логика возникла одновременно с наукой о языке и влияла на нее в течение всей ее истории. И в современной лингвистике заметную роль играет логический анализ языка. В свою очередь, в логике могут находить применение лингвистические идеи. (С одним таким применением мы встретимся в этой книге.)

Логика возникла в первом тысячелетии до н. э. независимо на Востоке и на Западе — в трудах индийских и греческих мыслителей. Но в отличие, например, от математики, на развитие которой в Европе существенно повлияли проникшие туда достижения восточной мысли, западному и восточному путям развития логики не суждено было пересечься. В нашей книге (как и во всех или почти во всех современных учебных пособиях) логика излагается в том виде, который она приобрела в результате развития по западному пути. Этот путь берет начало от Аристотеля (Ἀριστοτέλης, 384—322 до н. э.) который не только заложил основы логики, но и разработал ряд ее разделов настолько глубоко и с такой полнотой, что потом она в течение двух тысяч лет практически не выходила в своем развитии за рамки очерченного Аристотелем круга идей и понятий.[3]

Впервые логика вышла за эти рамки в XVII столетии (см. ниже главу 12), но по-настоящему новая эпоха в ее развитии началась в середине XIX столетия, когда некоторые логики и математики стали пользоваться символическими обозначениями для простых логических операций, соответствующих союзам «и», «или», «если» и отрицанию, аналогично используемым в математике символическим обозначениям арифметических действий. Это дало возможность представлять некоторые логические закономерности в виде математических соотношений. Так возникла «алгебра логики», из которой развилась *математическая логика*, позволяющая изучать строение рассуждений значительно полнее и глубже, чем традиционная «аристотелевская».[4]

---

[3]Одним из немногих исключений были труды философов стоической школы, в особенности Хрисиппа (Χρύσιππος, 280—207 до н. э.). Их логические идеи во многом сходны с теми, которые много веков спустя легли в основу логики предложений (см. главу 5). Однако эти идеи стоиков не были поняты в то время (и вызывали недоумение историков логики еще в середине XIX в.). Кстати, самый термин «логика» (по-древнегречески λογική, от λόγος — слово, речь, суждение, разумение) введен стоиками. (Слово λογική представляет собой субстантивированное прилагательное; подразумевается существительное τέχνη — «искусство».)

[4]Следует сказать, что возникновение математической логики и ее быстрое развитие в течение второй половины девятнадцатого века и всего двадцатого ни в коей

Современную логику невозможно представить себе без математических методов; более того, они играют в ней ведущую роль. Этот факт — лучшее доказательство неправомерности отталкивания так называемых «гуманитариев» от математики, с которым все еще приходится сталкиваться на каждом шагу, хотя еще в IV в. до н. э. величайший «гуманитарий» Платон начертал над входом в свою Академию: «Да не войдет сюда не знающий геометрии». (Достоверность этого предания оспаривается, но оно верно отражает отношение Платона к математике.) Отстаивание многими нынешними «гуманитариями» своего права не иметь никакого представления о математике и естественных науках есть не что иное, как воинствующий обскурантизм. Человек — не только «царь природы», но и часть ее; поэтому, хотя науки о человеке и человеческом обществе не могут быть сведены к наукам о природе, они не могут не взаимодействовать с ними и не зависеть от них (подобно тому, как биология не сводится к физике и химии, но при этом тесно взаимодействует с ними).

В главе 14 мы увидим, что науки о природе, в том числе и в особенности те из них, которые широко используют математические методы, фактически оказывают очень сильное влияние на развитие гуманитарного знания. Влияние это не всегда благотворно, в ряде случаев оно ведет к ошибкам; но эти ошибки в весьма значительной степени обусловлены именно тем, что философы, историки, социологи, экономисты имеют лишь поверхностное представление о методах математики и естественных наук, а нередко даже не подозревают, что находятся под их влиянием. Поэтому всем, кто занимается науками об обществе, необходимы хотя бы элементарные познания в области математики и наук о природе. Немаловажное значение имеет и изучение логики, поскольку оно способствует выработке культуры рассуждения, без которой невозможны вообще никакие научные занятия, ни в области естественных, ни в области гуманитарных наук. Для последних логическая культура нужна во всяком случае не меньше, поскольку все «объекты», с которыми они работают, представляют собой на самом деле абстрактные конструкции. И каждый, кто намерен посвятить себя исследованиям в области гуманитарных наук, или их преподаванию, или их приложению в какой-либо практической деятельности, должен быть готов к труду изучения логики.

мере не умаляет заслуг Аристотеля, а также тех ученых древности, Средних веков и Нового времени, которые передавали из поколения в поколение его наследие и развивали традиционную логику. Многое из созданного ими сохраняет свое значение до сих пор. Кроме того, без их трудов не появилась бы и математическая логика.

Часть I

Простейшие законы и понятия логики

Глава 1. Основные логические законы

Исследуя строение рассуждений, логика выявила некоторые простые законы, которым подчиняется всякое правильное рассуждение: закон тождества, закон противоречия, закон исключенного третьего и закон достаточного основания.

Прежде чем приступать к их рассмотрению, полезно уяснить себе, в каком смысле употребляется здесь слово «закон».

Это слово (соответствующее греческому νόμος и латинскому *lex*) имеет два значения: оно означает либо некоторую писаную или неписаную норму, регулирующую поведение людей, либо некоторый «закон природы» — иначе «естественный закон», — т. е. утверждение о каких-то общих свойствах «вещей» или явлений природы. Общим для законов в том и другом смысле является то, что те и другие что-то запрещают. (Например, закон всемирного тяготения запрещает яблокам, падающим с яблони, лететь вверх и в стороны; закон сохранения энергии запрещает вечный двигатель.) Различие же состоит в том, что «естественные» законы в принципе не могут быть нарушены, а нарушение законов, регулирующих поведение, возможно, но влечет за собой наказание. К какому из этих двух типов относятся законы правильности рассуждения? Несомненно, к первому: ведь рассуждение есть один из видов человеческого поведения. Нарушения этих законов происходят довольно часто; что же касается наказания за нарушение, то оно состоит в ошибочности рассуждения.[1]

[1] Ошибочность рассуждения не следует смешивать с ошибочностью доказываемого утверждения. Случайно может оказаться, что рассуждение неверно, а доказываемое утверждение верно; но тогда справедливость этого утверждения нуждается в другом обосновании.

Перечисленные выше четыре закона (их часто называют «основными логическими законами»), конечно, далеко не исчерпывают всех условий, которым должно удовлетворять любое правильное рассуждение; это только самые простые и очевидные (но важные!) закономерности. Их соблюдение не достаточно для правильности рассуждения, но необходимо: никакое рассуждение, в котором хотя бы один из этих законов нарушен, не может считаться правильным.

Перейдем теперь к их рассмотрению.

1. *Закон тождества* состоит в том, что когда в одном рассуждении несколько раз появляется мысль об одном и том же предмете, мы должны каждый раз иметь в виду тот же самый предмет, строго следя за тем, чтобы он не был вольно или невольно подменен другим, в чем-то с ним сходным. (Слово «предмет» мы оставляем здесь без уточнения; в начале следующей главы нам еще придется говорить о его смысле.)

Смысл всякой нормы лучше всего уясняется, когда мы сталкиваемся с ее нарушениями. Поэтому полезно привести примеры случаев нарушения закона тождества.

Очень яркий пример сознательного (и злонамеренного) нарушения этого закона имеется в романе Э. Хемингуэя «По ком звонит колокол». Герой романа, американец Джордан, участвующий в гражданской войне в Испании, разговаривает с испанской девушкой. Она рассказывает ему, что ее отец был республиканец, и его за это убили. Выслушав ее, он говорит: «Мой отец тоже был республиканец». Он, конечно, хорошо знает, что быть республиканцем в Испании в то время означало совсем не то, что в Соединенных Штатах; знает он и то, что девушка этого не знает, и, пользуясь этим, навязывает ей приблизительно такое рассуждение: «Наши отцы были оба республиканцами и, значит, близкими по духу людьми, поэтому и мы — близкие люди». Попросту говоря, он обманывает девушку, хотя формально не лжет.

Примером ненамеренного нарушения закона тождества может служить то место известной статьи А. И. Солженицына «Как нам обустроить Россию», где он пишет, что классик исторической мысли А. де Токвиль «считал понятия демократии и свободы — противоположными» и «пришел к выводу, что демократия — это господство посредственности». Этот довод, который должен, по мысли автора, лишний раз свидетельствовать, что авторитарный способ правления лучше демократического, основан на недоразумении. Токвиль употреблял слова «демократия», «демократический» не в общепринятом смысле. «Демократическим народом» он называл такой народ, в котором господствует равенство общественных состояний, нет высших и низших сословий. А это вовсе не обязательно ведет к народовластию — демократии в обычном смысле слова: если «демократический народ» никогда не знал свободы, то «государство ... достигает крайних пределов своей силы, тогда как частные лица ...доходят до последней степени бессилия».[2] В качестве примера Токвиль приводит современный ему Египет, которым правил паша, превративший «страну в свою фабрику, а ее жителей — в своих рабочих».[3]

В обоих примерах поводом для подмены было обозначение разных предметов одним и тем же словом. Так же обстоит дело в большинстве случаев нарушения закона тождества. Неумение или нежелание уточнять смысл слов — постоянный источник ошибок в рассуждениях.

2. *Закон противоречия* состоит в том, что два противоположных утверждения не могут одновременно быть истинными. (Противоположными называются два утверждения, одно из которых есть отрицание другого.) Иначе говоря: никакое утверждение не может быть одновременно истинным и ложным.

Отсюда следует, что никакое рассуждение не может считаться правильным, если в нем содержатся два противоположных утверждения (явное нарушение закона противоречия) или такие утверждения, которые хотя и не являются сами противоположными, но из них можно вывести два противоположных утверждения, причем вывод может быть не вполне очевидным и даже трудным (скрытое нарушение).

Явные нарушения закона противоречия встречаются редко: ведь если кто-нибудь скажет, например, «Иван Иванович уже уехал» и вслед за этим «Иван Иванович еще не уехал», то его собеседники, скорее всего, подумают, что либо он говорит не всерьез, либо ум у него не в порядке. Но со скрытыми нарушениями приходится иметь дело очень часто. Такие нарушения обычны в судебной практике, их разоблачением постоянно приходится заниматься следователям, адвокатам и судьям. Но они встречаются, к сожалению, и в официальных документах, в том числе в законодательных актах. Тогда законы становятся неисполнимыми, и открывается широкая дорога для беззакония и произвола. Поэтому без устранения противоречий в законодательстве настоящее правовое государство невозможно.

3. *Закон исключенного третьего* состоит в том, что из двух противоположных утверждений одно непременно истинно. Иначе говоря: всякое утверждение либо истинно, либо ложно.

Старые логики, формулируя этот закон, к словам «либо истинно, либо ложно» часто добавляли: «третьего не дано» — по-латыни tertium non datur. Отсюда и происходит название «закон исключенного третьего» (иногда его называют также *законом tertium non datur*).

---

[2] *Де Токвиль А.* О демократии в Америке. М.: Издание магазина «Книжное дело», 1897, с. 547.

[3] Там же, с. 550.

В сущности, мы не можем даже вообразить ничего «третьего», отличного от истины и от лжи и стоящего в одном ряду с ними. Поэтому трудно представить себе и нарушение этого закона.[4]

С отмеченной только что особенностью закона исключенного третьего связано то обстоятельство, что пользуются им не так, как другими законами, обсуждаемыми в этой главе — не для проверки правильности рассуждений, а в качестве одного из средств их построения: если мы доказали, что какое-то утверждение ложно, то противоположное ему утверждение мы в силу закона исключенного третьего имеем право и обязаны считать истинным.[5] Подробнее об этом пойдет речь в главе 9.

Заметим еще, что в формулировке закона исключенного третьего нельзя заменить слово «противоположные» словом «противоречащие» (хотя такую формулировку, к сожалению, можно иногда встретить в литературе). Например, утверждения «А. С. Пушкин родился в Киеве» и «А. С. Пушкин родился в Казани» противоречат друг другу, но оба они ложны.[6]

4. *Закон достаточного основания* состоит в том, что нельзя быть уверенным в истинности утверждения, если для этого нет достаточного основания.

Достаточное основание не следует смешивать с причиной. Например, для утверждения, что за ночь температура воздуха понизилась на 10 градусов, достаточным основанием могут служить показания термометра, хотя они, конечно, не могут быть причиной похолодания.

С примерами нарушения закона достаточного основания в гуманитарных науках (не говоря уже о литературной критике, публицистике, политических дебатах, судебных делах и т. п.) приходится встречаться очень часто.

---

[4] Когда царь в известной сказке велел «мудрой деве» явиться к нему «ни с гостинцем, ни без подарочка», он поставил перед ней заведомо неразрешимую задачу: нарушить закон исключенного третьего. Девочка все же справилась с задачей: явилась с живой перепелкой в руках, подала ее царю, а «перепелка порх — и улетела!». Но нетрудно понять, что на самом деле она нарушила не закон исключенного третьего, а закон тождества.

[5] Может возникнуть вопрос: что же в таком случае этот закон запрещает? Ответ на него таков: он запрещает отказываться признать утверждение истинным, если противоположное утверждение ложно.

[6] Подобную замену нельзя произвести и в формулировке закона противоречия: тогда получится тавтология, поскольку слово «противоречащие» в применении к утверждениям как раз и значит «такие, которые не могут одновременно быть истинными».

Приведем один такой пример. В книге Б. А. Рыбакова «Русские летописцы и автор «Слова о полку Игореве» (М.: Наука, 1972) говорится (со ссылкой на книгу Д. С. Лихачева «Русские летописи и их культурно-историческое значение»), что, когда в 1136 г. (6644 г. «от сотворения мира») новгородским князем стал Святослав Ольгович, первый князь, которого новгородцы сами себе «введоша», новгородский летописец Кирик отметил это событие «как наступление новой эры в политической жизни Новгорода». При этом единственным основанием для такого утверждения служит «небывало торжественное обозначение даты»: «В лето 6644 индикта 14 ... В то же лето приде Новугороду князь Святослав Ольговиць ис Цернигова ... месяца июля в 19 преже каланда августа, в неделю, на сбор святые Еуфимие в 3 час дне, а луне небесней в 19 день.»

Но достаточное ли это основание? Для торжественного обозначения даты могла найтись и другая причина. И она, несомненно, была. Известно, что Кирик в том же 6644 году написал трактат по хронологии «Учение им же ведати человеку числа всех лет». Как же было ему отказать себе в удовольствии применить свои редкие по тем временам познания к такому событию, как въезд нового князя![7]

Заканчивая рассмотрение основных логических законов, следует обратить внимание на то, что второй и третий законы формулируются гораздо более четко, чем первый и четвертый. Причину понять нетрудно: в законах противоречия и исключенного третьего фигурирует только понятие истинности, интуитивно достаточно ясное, а в двух других законах мы имеем дело с несравненно менее ясными понятиями «один и тот же предмет» и «достаточное основание». («Предмет» не обязательно должен быть конкретной материальной вещью; подробнее об этом см. в следующей главе.) Во второй части книги мы выразим законы противоречия и исключенного третьего на символическом языке, и они займут свое место в системе формальной логики, в то время как законы тождества и достаточного основания останутся за ее пределами.[8]

---

[7] Об этом писал в 1909 г. Н. В. Степанов в статье, посвященной древнерусской хронологии. Пространная выдержка из этой статьи и ее выходные данные имеются в книге Р. А. Симонова «Математическая мысль Древней Руси» (М.: Наука, 1977, с. 93—94).

[8] Иногда говорят, что закон тождества «символически выражается в виде $A = A$.» Но запись $A = A$ при таком ее употреблении не является элементом какой-либо формализованной знаковой системы и фактически представляет собой метафору, в которой в качестве выразительного средства использована математическая формула.

Глава 2. Понятие

1. Наряду с изучением рассуждений к логике по давней традиции относят изучение *понятий*. Эта традиция вполне оправдана, поскольку именно понятия представляют собой тот материал, которым мы оперируем во всякой мыслительной деятельности, в том числе в рассуждениях.

Понятие — это мысль, выделяющая некоторый класс «предметов» по некоторым признакам.

Например: понятие «прозрачный» выделяет класс предметов, не препятствующих видеть то, что находится за ними; понятие «часы» выделяет класс предметов, представляющих собой приборы для измерения времени; понятие «студент» выделяет класс людей, обучающихся в высших учебных заведениях; понятие «треугольник» выделяет класс геометрических фигур, состоящих из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки; понятие «кентавр» выделяет класс мифических существ с конским туловищем и человеческой головой; понятие «бежать» выделяет класс способов передвижения человека и животных с резким отталкиванием от земли или быстрым перебиранием лапами; понятие «удивление» выделяет класс чувств, вызываемых чем-либо странным или неожиданным.

Из приведенных примеров видно, что слово «предметы» мы не случайно взяли в кавычки. Это были у нас то настоящие материальные предметы, то сказочные существа, то геометрические фигуры, являющиеся идеальными образами реальных предметов, то чувства, то способы передвижения. В общем случае «предмет» может означать здесь, в сущности, все, о чем только мы можем помыслить.[1]

Не менее условно здесь и употребление слова «класс». Обычно этим словом обозначают совокупность, элементы которой четко отделены друг от друга. Но, например, в случае «удивления» такой совокупности нет: чувства, подпадающие под это понятие, образуют непрерывный спектр, который вряд ли можно естественным образом разделить на отдельные элементы. (Если же мы попытаемся выйти из затруднения, заявив, что удивление есть некое единое чувство, так что класс, выделяемый соответствующим понятием, состоит из одного

[1] Именно таково первоначальное значение этого слова: в словаре Даля оно объясняется как «все, что представляется чувствам или уму и воображенью». По происхождению оно является калькой (т. е. буквальным переводом) латинского objectum, от которого другим способом — прямым заимствованием — произведено еще одно русское слово с близким значением — объект.

«предмета», то это не спасет положения: ведь тот, кто не владеет этим понятием, не может представить себе удивление как нечто единое.) Примерно так же обстоит дело с понятием «бежать». А с понятием «кентавр» возникает затруднение иного рода, еще более серьезное: здесь «предметам», которые должны были бы войти в «класс», в реальности вообще ничто не отвечает. И даже с понятием «студент» не все так просто, как может показаться. Ведь оно, несомненно, относится не только к нынешним студентам, но также и к прежним и к будущим. Следует ли отсюда, что в «класс студентов» входит не только первокурсник Ваня Иванов, но и его отец, окончивший университет двадцать лет назад? А как быть с его младшим братом, который, может быть, станет со временем студентом, а может быть, не станет? И с вымышленными студентами — персонажами литературных произведений, — например, тургеневским Беляевым или чеховским Петей Трофимовым? Ответить на эти вопросы совсем не просто.

Естественнее всего, видимо, считать, что класс, выделяемый понятием, состоит не из предметов как таковых, а из представлений о них — имея в виду, что каждый элемент этого класса есть представление об одном предмете, рассматриваемом «в целом» (а не о каких-то его отдельных сторонах или свойствах). Тогда в числе элементов класса, отвечающего понятию «студент», будут и представление о Ване Иванове, и представление о его отце в молодости, и представление о его младшем брате в будущем, если он станет студентом, и представления о Беляеве и Трофимове. Элементами класса, отвечающего понятию «кентавр», будут, например, представления о коварном Нессе и мудром Хироне. Впрочем, всех трудностей такое уточнение не устранит (останется, например, отмеченная выше трудность, связанная с понятиями «удивление» и «бежать»).

Таким образом, приведенное выше «определение» понятия содержит слова, смысл которых довольно расплывчат и с трудом поддается уточнению. (Это относится, конечно, и к слову «признак», и к слову «представление».) Отсюда следует, что на самом деле это не определение, а всего лишь приблизительное разъяснение смысла термина «понятие». Таковы же и все другие «определения» этого термина, которые можно встретить в учебниках логики. Настоящее определение здесь невозможно — по причинам, которые будут выяснены ниже.

2. Совокупность признаков, по которым выделяется понятие, называется его *содержанием*, а тот класс «предметов», который оно выделяет (или, точнее, выделяемая им совокупность представлений о «предметах») — его *объемом*.

Например, содержание понятия «часы» состоит из признаков «быть прибором» и «служить для измерения времени», содержание понятия «студент» — из признаков «быть человеком» и «обучаться в высшем учебном заведении», содержание понятия «кентавр» — из признаков «быть мифическим существом», «иметь конское туловище» и «иметь человеческую голову». Объем понятия «часы» состоит из представлений о всевозможных часах — старинных, современных и таких, которые мы только воображаем, объем понятия «студент» — из представлений о нынешних, прежних, будущих и вымышленных студентах, объем понятия «кентавр» — из представлений о нескольких кентаврах, которым мифология дала имена и индивидуальные характеры, и неиндивидуализированных представлений о «кентаврах вообще».

Два понятия, различающиеся по содержанию, могут иметь один и тот же объем. Например, «равнобедренный треугольник» и «треугольник, имеющий два равных угла» — разные понятия, хотя их объемы совпадают: они выделяют один и тот же класс, но по разным признакам. (Противоположный случай — чтобы два понятия имели одно и то же содержание, но разные объемы, — очевидно, невозможен.) Понятия, объемы которых совпадают, называются *равнообъемными* или *равнозначными*. Таковы, например, понятия «число, делящееся на 6» и «число, делящееся на 2 и на 3», «нынешняя столица России» и «город, в котором родился А. С. Пушкин».

Если из содержания понятия устранить один или несколько признаков или заменить их более слабыми, получается новое понятие, о котором принято говорить, что оно является *обобщением* исходного, или иначе — *более общим* понятием. Например, устраняя из содержания понятия «кентавр» признаки «иметь человеческую голову» и «иметь конское туловище», мы получаем более общее понятие «мифическое существо». Заменяя в содержании понятия «часы» признак «служить для измерения времени» более слабым признаком «служить для измерения чего-либо», получаем более общее понятие «измерительный прибор». Заменяя в содержании понятия «студент» признак «обучаться в высшем учебном заведении» более слабым признаком «обучаться в каком-либо учебном заведении», получаем более общее понятие «учащийся». Точно так же понятия «многоугольник» и «геометрическая фигура» являются обобщениями понятия «треугольник» (а также понятий «четырехугольник», «пятиугольник» и т. д.); понятия «хищное животное», «млекопитающее», «позвоночное», «животное» являются обобщениями понятия «волк».

Мыслительная операция, с помощью которой из понятия образуется его обобщение, т. е. устранение из содержания понятия одного или нескольких признаков или замена их более слабыми, также называется *обобщением.* (Вспомните сказанное в сноске 2 к Введению о случаях омонимии названия действия и названия его результата.) Мы можем сказать, например, что понятие «многоугольник» можно получить, обобщая понятие «треугольник».

Мыслительная операция, обратная обобщению, т. е. добавление к содержанию понятия одного или нескольких признаков или замена одного или нескольких признаков более сильными, называется *ограничением* понятия; так же называется и ее результат. Например, понятие «кентавр» является ограничением понятия «мифическое существо», понятие «часы» — ограничением понятия «измерительный прибор», понятие «треугольник» — ограничением понятий «многоугольник» и «геометрическая фигура», понятие «квадрат» — ограничением понятий «прямоугольник» и «ромб» (а также «четырехугольник», «многоугольник», «геометрическая фигура»).

Ясно, что при обобщении понятия его объем расширяется, а при ограничении сужается. Например, в объем понятия «мифическое существо» наряду с кентаврами входят сирены, гарпии, Кербер и т. п.; в объем понятия «многоугольник» наряду с треугольниками входят четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Более общее понятие часто называют *родовым* по отношению к менее общему, а менее общее — *видовым* по отношению к более общему.

3. Понятие, как и всякая мысль, выражается словами. В простейшем случае его можно выразить одним словом (как было в большинстве наших примеров). Но так бывает далеко не всегда: многие понятия могут быть выражены только словосочетаниями («измерительный прибор», «мифическое существо», «книга по истории математики», «русский писатель второй половины девятнадцатого века» и т. п.). Одно и то же понятие может выражаться словами по-разному: глагол *бежать* выражает то же понятие, что и существительное *бег*, словосочетание *писатель, пишущий прозой* — то же, что и слово *прозаик.* Более того: едва ли не всякое понятие допускает разные выражения, поскольку возможность выражать один и тот же смысл разными способами (в лингвистике это называется синонимией) представляет собой одно из самых существенных свойств естественного языка.

Для понятий, выражаемых более или менее длинными словосочетаниями, это очевидно: например, вместо *человек, учившийся в университете* можно сказать *человек, который учился в университете*, или *человек, который был студентом университета*, или *бывший студент университета*. Но и в тех случаях, когда обычное выражение понятия состоит из одного слова и у этого слова нет точных синонимов, имеется, как правило, возможность выразить то же понятие иначе — с помощью словосочетания. Этой возможностью мы фактически уже не раз пользовались: ведь словосочетание *прибор для измерения времени* выражает то же понятие, что и слово *часы*, словосочетание *человек, обучающийся в высшем учебном заведении* — то же понятие, что и слово *студент*, и т. п. При такой замене слова словосочетанием (или одного словосочетания другим, более развернутым, — например, когда вместо *равнобедренный треугольник* говорят *треугольник, имеющий две равных стороны*) мы раскрываем содержание понятия, т. е. указываем в явной форме составляющие это содержание признаки. Но эти признаки также представляют собой понятия; таким образом, раскрыть содержание понятия означает не что иное, как выразить данное понятие через некоторые другие понятия.

Мыслительная операция над понятием, состоящая в том, что оно выражается через какие-либо другие понятия, называется *определением*, или *дефиницией*.[2] Так же называют и предложение, с помощью которого одно понятие выражается через другие («Прозаик — это писатель, пишущий прозой», «Несостоятельный должник — это человек, не имеющий средств для уплаты своих долгов», «Равнобедренным треугольником называется треугольник, имеющий две равных стороны», и т. п.).

Чаще всего определение понятия состоит в том, что указываются некоторое более общее (родовое) понятие («писатель», «треугольник», «человек», «прибор») и дополнительные признаки, которые нужно добавить к его содержанию («пишущий прозой», «имеющий две равных стороны», «обучающийся в высшем учебном заведении», «служащий для измерения времени»). Если при этом родовое понятие является ближайшим для определяемого (т. е. между ними нет никакого достаточно

[2] Оба эти термина произведены — первое калькированием, второе прямым заимствованием — от латинского слова definitio, происходящего от finis — граница, предел. Слово «дефиниция» употребляется преимущественно в философской литературе, а также в некоторых специальных случаях (так называют, например, первое предложение статьи в энциклопедическом словаре); в остальных случаях предпочтительнее пользоваться словом «определение».

естественного промежуточного понятия), то говорят об *определении через ближайший род и видовое отличие* (*definitio per genus proximum et differentiam specificam*). Таковы, например, приведенные выше определения понятий «прозаик» и «равнобедренный треугольник» (в то время как определения понятий «студент» и «часы» не таковы: для «студента» ближайшее родовое понятие — не «человек», а «учащийся», для «часов» — не «прибор», а «измерительный прибор»).

Стоит заметить, что определение понятия через ближайший род и видовое отличие не обязано быть единственным. Например, квадрат можно определить либо как прямоугольник, у которого все стороны равны, либо как ромб, у которого все углы прямые.

Для «обиходных» понятий — тех, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни, — дать определение нередко оказывается очень трудно, и далеко не всегда его удается сформулировать сколько-нибудь точно. Это хорошо известно составителям толковых и энциклопедических словарей. Чтобы осознать, насколько трудна эта задача, полезно попытаться дать определения, например, таких понятий, как «стол», «еда» (в смысле «процесс еды»), «пища», «погода», «забота», «труд», «работа», «трудный», «слово», «мысль», «пожар» (а потом заглянуть в какой-нибудь толковый словарь). Тем не менее мы, как правило, оперируем такими понятиями без затруднений, если интуитивно достаточно ясно представляем себе их объем, т. е. умеем без труда отличать входящие в него «предметы» от таких, которые в него не входят. И лишь тогда, когда такого ясного интуитивного представления об объеме понятия нет или у разных людей представления о нем разные, возникает настоятельная необходимость дать ему точное определение. (Примером понятия, имеющего разный смысл для разных людей, может служить «работа»: есть люди, для которых это только отбывание положенных часов в служебном помещении, но есть и такие, для которых главная работа начинается тогда, когда они приходят со службы.)

Гораздо более важную роль играют определения научных понятий. Научное мышление имеет дело с такими предметами, явлениями и закономерностями, которые обнаруживаются только путем систематической, упорядоченной и целенаправленной работы мысли, часто сопровождаемой столь же систематическими, упорядоченными и целенаправленными наблюдениями или экспериментами (в том числе с использованием специальных приборов и инструментов). При этом результаты научного мышления должны быть проверяемыми (подробнее об этом пойдет речь в главе 13) и иметь объективный характер, т. е. не зависеть от личности того, кто их получил, от его верований, вкусов, склонностей, симпатий и антипатий.[3] Этого можно добиться лишь при условии, что для каждого используемого понятия имеется критерий, позволяющий достаточно надежно решать, входит ли тот или иной «предмет» в его объем (иначе станет невозможным соблюдение закона тождества). А такой критерий — поскольку «предметы» в этом случае, как правило, недоступны непосредственному созерцанию — может основываться только на раскрытии содержания понятия, т. е. на его определении.

Поэтому все науки стремятся образовывать свои понятия так, чтобы они допускали как можно более точные определения. Правда, не всем наукам это удается в одинаковой степени.

Наиболее точные определения используются в математике — науке, изучающей абстрактные отношения между предметами материального мира — количественные, пространственные и другие — в отвлечении от всех конкретных свойств этих предметов (т. е., в сущности, от самой их материальности). Эти отношения сами по себе очень просты (их прообразами являются хорошо знакомые каждому человеку отношения «больше», «меньше», «дальше», «ближе» и т. п.), и именно благодаря этой простоте соответствующие понятия удается определять с большой точностью. Но простые отношения могут сочетаться и переплетаться весьма сложным образом, и в результате часто получаются совсем не простые, а главное — чрезвычайно абстрактные понятия, с которыми невозможно работать, не располагая их четкими определениями.

Определения, используемые в естественных науках — физике, химии, биологии и других — часто не столь точны, как математические, но все же отличаются большой четкостью. Некоторым гуманитарным наукам — например, лингвистике, — в ряде случаев также удается добиться довольно высокой точности определений. Но в целом гуманитарные науки в отношении четкости определений значительно уступают естественным, не говоря уже о математике. Главная причина этого — бóльшая сложность предмета изучения, но некоторую роль играет и несовершенство методов этих наук. (Подробнее об особенностях гуманитарного мышления мы будем говорить в главе 14.)

Необходимо подчеркнуть, однако, что ни одна наука не может определить все свои понятия. Ведь определить понятие значит выразить его через какие-то другие понятия; если мы и эти понятия захотим

[3] Здесь не идет речь, разумеется, о тех качествах человека, благодаря которым он оказался в состоянии получить научный результат: силе интеллекта, интуиции, знаниях, настойчивости и т. д.

определить, это будет значить, что нам придется выразить их через какие-то третьи, и т. д. Такой процесс не может продолжаться бесконечно, и какие-то понятия мы будем вынуждены оставить без определения. Поэтому первоначальные понятия всякой науки — *неопределяемые*. Нужно только стремиться к тому, чтобы таких понятий было по возможности немного и они были достаточно простыми, так что их смысл можно было бы хорошо усвоить, опираясь на примеры и приблизительные разъяснения.

Вообще, определение понятия может быть полезно только тогда, когда те понятия, к которым оно при этом сводится, проще и яснее, чем оно само. В противном случае попытка дать определение становится бесплодным словоговорением и может только запутать дело.

Теперь должно быть ясно, почему невозможно точно определить, что такое понятие (см. выше). Ведь «понятие» — одно из первоначальных понятий логики, а первоначальные понятия науки могут быть только неопределяемыми.

Сейчас мы впервые столкнулись с тем обстоятельством, что «понятие» само есть одно из понятий. Обстоятельство это, хотя и весьма примечательное, не уникально: например, «слово» есть одно из слов, «существительное» — одно из существительных. Многие авторы учебников логики предпочитают об этом обстоятельстве не упоминать и, возможно, поэтому говорят не об «основных понятиях логики», а о ее «основных категориях». (Слово «категория», происходящее от греческого κατηγορία, весьма многозначно. В философии категориями называют наиболее общие и фундаментальные научные понятия.)

4. Уточнение содержания научного понятия может быть далеко не простой задачей. Бывает, что понятие, знакомое с детства каждому, кто учился в школе, при анализе его логического строения оказывается весьма сложным, и если удается его уточнить, это позволяет добиться большей четкости в постановке научных проблем и более успешно их решать. Иногда разные авторы обозначают одним термином разные, хотя и близкие, понятия, и это ведет к разногласиям и спорам, в которых говорить о правоте той или другой стороны не имеет смысла ввиду нарушения закона тождества. В таких случаях единственный способ выяснить существо дела — уточнение понятий.

Примером «школьного» понятия, имеющего в действительности сложную логическую структуру, может служить понятие падежа. Споры о его природе начались еще в древности и не прекращаются до настоящего времени. Для многих языков разные грамматики дают разные описания падежных систем. В частности, в школьных грамматиках русского языка говорится о шести падежах, но некоторые научные грамматики добавляют к ним еще два — второй родительный, или родительный партитивный (выступающий в таких словосочетаниях, как *стакан чаю, немного сахару*) и второй предложный, или местный (*в лесу, на мосту*), а отдельные авторы рассматривают сверх того еще счетный (*два шагá, три часá*) и звательный (*Мам*! *Вань*!). Более того, в отношении некоторых языков грамматисты расходятся между собой даже в вопросе о том, имеются ли вообще в них падежи. (Так обстоит дело с венгерским языком; нет полного согласия и в отношении английского.)

В современной лингвистике понятие падежа уточняется с помощью математических моделей[4], в рамках которых падежные системы строятся однозначно (хотя в разных моделях они могут быть разными).

5. В заключение главы упомянем о некоторых частных видах понятий.

Понятие называется *единичным*, если его объем состоит из одного предмета. Примеры единичных понятий: «Москва-река», «Эйфелева башня», «Александр Македонский», «Тридцатилетняя война», «число 5». Понятия, не являющиеся единичными, принято называть *общими*.

При отнесении того или иного понятия к разряду единичных необходимо соблюдать осторожность, помня, что объем понятия состоит не из предметов как таковых, а из представлений о них. Например, понятие «президент СССР» вряд ли стоит считать единичным, хотя в СССР был только один президент — М. С. Горбачев: можно ведь представить себе, скажем, роман какого-нибудь писателя о некоем вымышленном президенте СССР. В то же время понятие «М. С. Горбачев, занимавший пост президента СССР в 1990—91 гг.» — единичное.)

Заметим также, что встречающееся в литературе определение общего понятия как такого, которое, в отличие от единичного, «охватывает целый класс предметов», неудовлетворительно, поскольку класс, состоящий из одного предмета — тоже «целый класс».

Понятие называется *собирательным*, если предметы, входящие в его объем, представляют собой совокупности некоторых «однородных» предметов, рассматриваемые «в целом». (Таким образом, объем собирательного понятия есть класс, элементы которого являются в свою очередь классами.) Примеры собирательных понятий: «толпа», «аудитория» (в смысле «слушатели лекции, доклада и т. п.»), «стая», «кустарник», «мебель», «крестьянство».

Собирательные понятия не отличаются сколько-нибудь принципиально от остальных. В частности, над ними можно производить

[4] О математических моделях см. ниже (замечание в конце пункта 2 гл. 14).

операции обобщения и ограничения; например, понятие «стая гусей» есть ограничение понятия «стая», «русское крестьянство XVIII-го столетия» — ограничение понятия «крестьянство», «растительность» — обобщение понятия «кустарник». Собирательные понятия могут быть единичными (например, «1-й «А» класс 162-й школы г. Новосибирска»).

В традиционной логике различают также конкретные и абстрактные понятия. *Конкретные* понятия — это те, объемы которых состоят из конкретных предметов: «стол», «береза», «город», «студент» и т. п. (Сюда же относят такие понятия, как «прозрачный», «тяжелый», т. к. они отвечают классам, состоящим из конкретных прозрачных или тяжелых предметов.) Понятия, объемы которых состоят из воображаемых предметов, которые мы представляем себе так или иначе подобными реальным конкретным предметам — «кентавр», «единорог», «инопланетянин» и т. п. — также естественно считать конкретными. Остальные понятия — *абстрактные*. К ним относятся все научные понятия («треугольник», «энергия», «кислота», «млекопитающее», «феодализм» и т. п.), а также многие «обиходные» («прозрачность», «тяжесть», «бег», «удивление», «забота» и т. п.) Впрочем, граница между конкретными и абстрактными понятиями весьма условна, и разные авторы проводят ее по-разному: некоторые относят к конкретным все понятия, выражаемые существительными, имеющими множественное число (или бо́льшую часть таких понятий), другие считают, что все вообще понятия абстрактны. Спор о том, кто здесь прав, не имеет смысла, как и всякий спор об «истинных значениях» слов.

Глава 3. Предложение

1. Две предыдущие главы были, в сущности, данью традиции, от которой мы не сочли возможным полностью отказаться. А теперь мы переходим к систематическому изложению науки о строении рассуждений.

Как уже говорилось во Введении, рассуждения выражаются в словах. И у нас нет иного способа подойти к исследованию строения рассуждений, кроме как присмотреться к строению их словесных выражений. При этом мы прежде всего замечаем, что словесное выражение рассуждения всегда представляет собой некоторую последовательность предложений. И если мы хотим понять, как устроено рассуждение, нам следует, по-видимому, сначала уделить некоторое внимание устройству предложения.

Изучение предложений является, вообще говоря, делом лингвистики. В самом древнем дошедшем до нас греческом грамматическом трактате, написанном в I в. до н. э. александрийским ученым

Дионисием Фракийцем, предложение — в тогдашней терминологии λόγος, что в данном контексте переводят обычно как «речь», — определяется следующим образом: «Речь есть соединение слов, выражающее законченную мысль». Современные лингвисты также относят «смысловую законченность» к главным признакам предложения. При этом выраженная в предложении «законченная мысль» может представлять собой либо утверждение, либо вопрос, либо просьбу, пожелание, приказание и т. п. Нетрудно заметить, что при изложении рассуждения всегда можно обойтись предложениями первого из этих трех типов. Более того, всякое достаточно строгое рассуждение может быть изложено так, чтобы оно состояло только из предложений, представляющих собой четко сформулированные утверждения о каких-то фактах, так что для каждого такого утверждения можно спросить, истинно оно или ложно, и на этот вопрос имеется недвусмысленный ответ «Да» или «Нет». Только такие предложения и будут интересовать нас в дальнейшем; говоря о предложениях, мы всегда будем подразумевать — если не оговорено противное, — что они именно таковы.

Это характеристическое свойство предложений, входящих в рассуждения, было замечено еще Аристотелем. В трактате «Об истолковании», посвященном изложению первоначальных понятий логики и грамматики, он называет предложение этого типа «высказывающей речью» — λόγος ἀποφαντικός — и говорит о нем так: «Всякая речь что-то обозначает ... Но не всякая речь есть высказывающая речь, а лишь та, в которой содержится истинность или ложность чего-либо; мольба, например, есть речь, но она не истинна и не ложна. Итак, прочие речи оставлены здесь без внимания, ибо рассмотрение их более подобает искусству красноречия или стихотворному искусству; к настоящему исследованию относится высказывающая речь.»

Для каждого предложения A интересущего нас типа мы будем теперь писать $A \equiv И$, если A истинно (т. е. истинно утверждение, выражаемое предложением A) и $A \equiv Л$, если A ложно. При этом предложение A может быть записано как в словесной, так и в какой-либо символической форме, например:

Волга впадает в Каспийское море $\equiv И$;
Днепр впадает в Каспийское море $\equiv Л$;
Кит — млекопитающее $\equiv И$;
Кит — рыба $\equiv Л$;
6 — четное число $\equiv И$;
6 — нечетное число $\equiv Л$;
$2+2=4 \equiv И$;
$2+2=5 \equiv Л$.

Букву *И* или *Л* мы будем называть *истинностным значением* соответствующего предложения.

2. Теперь необходимо сделать два важных замечания.

Первое. Говоря о недвусмысленном ответе на вопрос, истинно или ложно некоторое предложение, мы имеем в виду принципиальную возможность дать такой ответ, а не фактическое его наличие. Мы не знаем, например (и вряд ли когда-нибудь узнаем), истинно или ложно предложение «“Илиада” и “Одиссея” — произведения одного и того же автора», но ясно, что оно либо истинно, либо ложно.

Второе. Для некоторых предложений их истинностное значение (т. е. их истинность или ложность) зависит от обстоятельств, при которых они произнесены (или написаны), например: «Вчера здесь шел снег» или «Треугольник ABC — прямоугольный». (Во втором примере истинностное значение зависит от того, какие точки обозначены через A, B, C.)

3. В лингвистике предложение рассматривается как частный случай языкового знака.[1] Языковой знак есть двуплановая единица: он имеет две стороны, внутреннюю и внешнюю. Внутренняя сторона знака — это его смысл, внешняя — его материальная (т. е. звуковая или графическая) форма.[2] Смысл языкового знака соотносится с его формой по определенным законам, изучение которых составляет главную задачу лингвистики. Логика также занимается, в сущности, изучением соотношения между формой и смыслом языковых знаков частного вида — предложений; однако при этом она в соответствии со своими целями ограничивается рассмотрением одной «составной части» смысла предложения — его истинности или ложности, символически выражаемой истинностным значением.

Еще одно чрезвычайно важное отличие подхода логики к изучению предложений от подхода лингвистики состоит в том, что синонимичные предложения (т. е. имеющие один и тот же смысл) в логике, как правило, не различаются.[3] Например, предложения «15 делится на 3»,

[1] Языковыми знаками являются также словосочетания, слова, морфемы (т. е. минимальные значащие языковые единицы — корни, суффиксы и т. п.).

[2] Для естественных языков графическая форма вторична по отношению к звуковой.

[3] Имеются в виду абсолютно синонимичные предложения, полностью совпадающие по смыслу. Ниже, в начале гл. 6, мы познакомимся с более слабой «логической синонимией».

«Число 15 делится на число 3», «Тройка есть делитель пятнадцати», «Тройка является делителем пятнадцати», «Число 15 кратно трем» с точки зрения логики представляют собой одно и то же предложение.

Ввиду этого различия многие логики предпочитают не пользоваться термином «предложение» и говорят о «суждении» или «высказывании». (Первый из этих двух терминов используется преимущественно в литературе по традиционной логике, второй — в математической логике.) Но такое нарочитое отмежевание от грамматики не помогает уяснить смысл соответствующего понятия, а скорее мешает этому. Если отвлечься от разнообразных попыток дать определение суждения, которые — по причинам, изложенным в предыдущей главе, — мало что дают, и сосредоточить внимание на том, как этот термин употребляется, нетрудно прийти к выводу, что и по объему, и по содержанию «суждение» традиционной логики приблизительно совпадает с тем, что лингвисты называют внутренней стороной (смыслом) предложения. Попытка рассматривать внутреннюю сторону языкового знака (а тем более такого сложного, как предложение) отдельно от внешней превращает ее в весьма неопределенную «сущность», принимать которую в качестве первоначального понятия вряд ли целесообразно. В то же время объем понятия «предложение» хорошо представляет себе всякий образованный человек. Поэтому правильнее поступают, на наш взгляд, те авторы, которые открыто признают зависимость логики от грамматики в этом вопросе, пользуясь термином «предложение».

Что касается слова «высказывание», то оно используется либо в том же смысле, что и «суждение», либо просто как технический термин для обозначения предложений, выражающих истинные или ложные утверждения. Но в таком термине нет необходимсти: достаточно раз навсегда четко оговорить, какие предложения имеются в виду.

Часть II

Строение предложений

Глава 4. Множества и отношения

1. Нашей ближайшей задачей будет теперь изучить строение предложений, без чего невозможно понять, как устроены рассуждения. Но сначала нам придется познакомиться с некоторыми математическими понятиями, принадлежащими, по сути дела, также и к основным понятиям логики. Первым из них будет понятие множества.

Множеством в математике называют любую совокупность любых «предметов», конкретная природа и свойства которых могут быть какими угодно. Можно говорить, например, о множестве всех коров в некотором стаде; о множестве всех целых положительных чисел; о множестве всех букв русского алфавита; о множестве рек, впадающих в Волгу; о множестве, состоящем из числа 8, Александра Македонского, луны и слова «множество». «Предметы», из которых состоит множество, называются его *элементами*; о них говорят, что они *принадлежат* данному множеству (или *входят* в него). Если множество и его элементы обозначены какими-либо символами, — например, буквами, — то вместо слова «принадлежит» на письме часто используется значок $\in$; таким образом, $a \in A$ означает то же, что «a принадлежит A». Вместо «a принадлежит A» говорят также «A *содержит* a». Таким образом, предложения «a есть элемент A», «a принадлежит A» и «A содержит a» синонимичны, т. е. означают одно и то же, и то же самое означает символическая запись $a \in A$. Выражения «принадлежит» и «входит в» — точные синонимы.

Понятие множества лежит фактически в основе всей математики; естественно поэтому, что мы его не определяем, а только поясняем его смысл примерами и «приблизительным переводом» на естественный язык. (Вспомним то, что было сказано о первоначальных понятиях наук в главе 2.) Неопределяемым является и понятие «принадлежит». Но понятия «элемент» и «содержит» определяются: их определения состоят в указании, что предложения «a есть элемент A» и «A содержит a» означают то же, что «a принадлежит A».[1]

Вместо слов «не принадлежит» часто пользуются значком $\notin$. Если, например, M означает множество всех четных чисел, то $2 \in M$, $-5 \notin M$, $0 \in M$ и т. д.

2. Если каждый элемент множества A является также и элементом множества B, то говорят, что множество A есть *подмножество*, или *часть*, множества B, или, иначе, что A *содержится в* B, или, наконец, что B *содержит* A (все эти предложения, таким образом, синонимичны), а для краткости часто пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Следует обратить внимание, что слово «содержит» употребляется в двух разных смыслах: «содержит в качестве элемента» и «содержит в качестве подмножества». На самом деле то и другое «содержит» — разные слова (омонимы).

Если, например, A означает множество всех студентов некоторого университета, B — множество всех студентов исторического факультета этого университета, C — множество всех студентов его филологического факультета и D — множество всех студентов первого курса этого факультета, то, очевидно, $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $D \subseteq C$, $D \subseteq A$. Кроме того, можно утверждать, что $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$, $D \subseteq D$. В самом деле, по точному смыслу определения каждое множество является частью (подмножеством) самого себя: ведь утверждение «каждый элемент множества A есть элемент множества A» справедливо для любого A.

Говорят, что множество A *равно* множеству B, или что множества A и B *равны*, если A и B состоят из одних и тех же элементов — иначе говоря, если все элементы A являются элементами B и все элементы B — элементами A, т. е., если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Поскольку множества, кроме своих элементов, никакой другой «сущности» не имеют, мы должны, установив, что два множества равны, считать, что это на самом деле не два разных множества, а одно и то же. Вместо «A равно B» пишут для краткости $A = B$, вместо «A не равно B» пишут $A \neq B$.

Ясно, что для любых множеств A, B, C: а) $A = A$; б) если $A = B$, то $B = A$; в) если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

---

[1] Точно так же можно было бы иностранцу, знающему, что значит по-русски «купить», но не знающему, что значит «продать», объяснить смысл этого последнего слова, сказав, что «Иван продал корову Петру» означает то же, что «Петр купил корову у Ивана».

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, говорят, что множество A есть *истинное* (или *собственное*) *подмножество* множества B — иначе, *истинная* (или *собственная*) *часть* множества B — и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Так, в приведенном выше примере B, C и D — истинные части множества A и D — истинная часть множества C (при условии, что университет не состоит из одного исторического или филологического факультета и филологический факультет не состоит из одного первого курса).

3. Множества можно задавать различными способами. Самый простой из них — перечислить все элементы множества, т. е. назвать их один за другим («множество, состоящее из чисел 7, -3, 5, 18, $3/4$», «множество, состоящее из города Торжка и планет Марса и Юпитера» и т. п.) Это далеко не всегда можно сделать; бывает, однако, что хотя в буквальном смысле перечислить все элементы множества нельзя, их можно называть один за другим так, что любой элемент был бы когда-нибудь назван, если бы мы располагали неограниченным временем. Например: «множество, состоящее из чисел 0, 2, 4, 6 и т. д.» (начиная с нуля, каждый раз прибавляем к очередному числу двойку), «множество, состоящее из чисел 1, 4, 9, 16 и т. д.» (начиная с единицы, каждый раз берем квадрат следующего по порядку натурального числа). В этом случае тоже говорят, что множество задано *перечислением* его элементов.

Для обозначения множества, заданного «настоящим» перечислением его элементов, пользуются фигурными скобками, внутри которых пишутся обозначения всех элементов множества, разделенные запятыми: например, $\{2, 7, -2, 1/2\}$ означает множество, состоящее из чисел 2, 7, -2 и $1/2$ (это множество можно обозначить также $\{7, -2, 2, 1/2\}$, $\{1/2, -2, 2, 7\}$ и т. д.). Если выписывать обозначения всех элементов утомительно и в то же время интуитивно ясно, как их перечислить, то такое обозначение обычно сокращают, заменяя знаки некоторых элементов многоточием; например, $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ означает множество всех целых чисел от 1 до 100 включительно. Подобными обозначениями пользуются и для множеств, заданных «бесконечным перечислением»: $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ и т. п.

Другой обычный способ задать множество — указать какое-либо *характеристическое свойство* его элементов, т. е. свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они («множество всех четных чисел», «множество всех целых положительных чисел, меньших семи», «множество королей Франции, вступивших на престол после 1600 г.»). Для множеств, заданных таким образом, также есть удобный способ обозначения, который легко понять из примеров:

$\{x \mid x$ — четное число $\}$ означает множество всех четных чисел; то же самое означает $\{2n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$;

$\{x \mid x$ — целое число, $x < -5\}$ означает множество всех целых чисел, меньших -5.

Задания. 1) Для каждых двух из следующих множеств определить, равны ли они и содержится ли какое-либо из них в другом: множество квадратов всех целых чисел; множество квадратов всех целых положительных чисел; множество квадратов всех целых отрицательных чисел; множество квадратов всех целых неотрицательных чисел.

2) По образцу равенства

$$\{1, 2, 3, \dots, 100\} = \{x \mid x \text{ — целое число, } 0 < x < 101\}$$

обозначить другим способом каждое из следующих множеств:

$\{x^2 \mid x$ — целое число $\}$;

$\{x \mid x$ — целое положительное число $\}$;

$\{1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/1000\}$;

$\{1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$.

4. Читателю должно быть уже ясно, что во множестве не обязательно должно быть «много» элементов — так же, как чернила не всегда черные.[2] Множество $\{x \mid x$ — целое число, $1 < x < 4\} = \{2, 3\}$ состоит всего из двух элементов, множество $\{x \mid x$ — целое число, $1 < x < 3\} = \{2\}$ — из одного. Более того, можно говорить о множестве, не содержащем ни одного элемента; только такой смысл может иметь, например, обозначение $\{x \mid x$ — целое число, $1 < x < 2\}$, ничем существенным не отличающееся от только что приводившихся. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. По точному смыслу определения равенства множеств все пустые множества равны между собой (действительно, все они «состоят из одних и тех же элементов», а именно, «не состоят ни из каких»), или, лучше сказать, существует только одно пустое множество. (Таким образом, $\{x \mid x$ — целое число, $1 < x < 2\}$ — то же самое, что множество королей Франции, вступивших на престол после 1900 г.)

По определению считается, что пустое множество — часть любого множества, т. е. для любого множества A имеет место $\varnothing \subseteq A$. (Это не

[2] Русский термин «множество» представляет собой кальку немецкого термина Menge. По-французски множество — ensemble, по-английски — set.

противоречит данному выше определению части: утверждение $A \subseteq B$ может быть опровергнуто только указанием элемента множества A, не являющегося элементом множества B, но при $A = \varnothing$ такого элемента заведомо нет.)

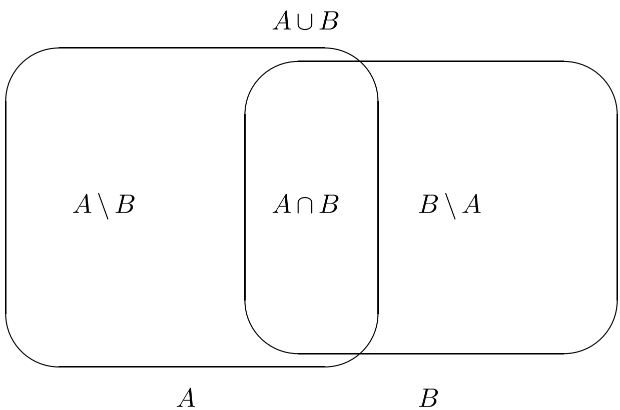
5. Для любых множеств A и B можно образовать новые множества, называемые их объединением, пересечением и разностью, следующим образом:

Объединением множеств A и B (или множества A с множеством B) называется множество, состоящее из всех элементов A и всех элементов B. Объединение A и B обозначается $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B (или множества A с множеством B) называется множество, состоящее из всех элементов A, которые являются также и элементами B. (Иногда вместо «пересечение» говорят «*общая часть*».) Пересечение A и B обозначается $A \cap B$.

Разностью между множеством A и множеством B называется множество, состоящее из тех элементов A, которые не являются элементами B. Разность между A и B обозначается $A \setminus B$.

Определения объединения, пересечения и разности множеств можно проиллюстрировать следующим рисунком, на котором множества A и B условно изображены закругленными прямоугольниками:



Примеры. 1) Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$. Тогда
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{1, 4\}$, $B \setminus A = \{5\}$.
2) Пусть $X = \{1, 3, 5, \dots\}$, $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$.
Тогда $X \cup Y = \{1, 2, 3, \dots\}$, $X \cap Y = \varnothing$, $X \setminus Y = X$, $Y \setminus X = Y$.

Из определений ясно, что если $A \subseteq B$, то $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$.

Если $A \cap B = \varnothing$, говорят, что A и B *не пересекаются.* В этом случае, очевидно, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

Ясно также, что для любого множества A имеет место $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$.

Задача. Пусть $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{n \mid n — \text{целое}, n < 6\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

6. Операции над множествами, состоящие в образовании по двум множествам A и B их объединения $A \cup B$ и пересечения $A \cap B$, также называются соответственно *объединением* и *пересечением*. Операция, состоящая в образовании по двум множествам A и B их разности $A \setminus B$, называется *вычитанием*.

Операции объединения, пересечения и вычитания множеств обладают некоторыми важными свойствами, во многом похожими на свойства арифметических действий над числами.

Вот эти свойства:

I. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность[3] объединения).

II. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения).

Эти два свойства очевидным образом следуют из определений объединения и пересечения.

III. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность[4] объединения).

Доказательство. По определению объединения левая часть этого (пока предполагаемого) равенства есть множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества $B \cup C$. А поскольку $B \cup C$ есть множество, состоящее из всех элементов B и всех элементов C, левая часть нашего предполагаемого равенства состоит в точности из всех элементов A, всех элементов B и всех элементов C. Но совершенно аналогичным рассуждением можно показать, что и правая часть состоит в точности из тех же элементов. $\square$

IV. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения).

Доказательство. По определению пересечения левая часть предполагаемого равенства есть множество, состоящее из тех элементов множества A, которые являются также и элементами множества $B \cap C$.

---

[3] От латинского commuto — «изменяю», «обмениваю».

[4] От латинского associo — «соединяю».

А поскольку $B \cap C$ состоит из тех элементов B, которые являются также и элементами C, левая часть нашего предполагаемого равенства состоит в точности из тех элементов, которые принадлежат одновременно всем трем множествам A, B, C. Но совершенно аналогичным рассуждением можно показать, что и правая часть состоит в точности из тех же элементов. □

Благодаря коммутативности объединения и пересечения мы можем переставлять члены в выражениях вроде $A \cup B$ или $A \cap B$, а благодаря ассоциативности — писать, например, вместо $A \cup (B \cup C)$ или $(A \cup B) \cup C$ просто $A \cup B \cup C$.

V. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность[5] пересечения по отношению к объединению).

Доказательство. Обозначим для краткости левую часть предполагаемого равенства через M, правую — через N. Чтобы доказать это равенство, достаточно установить, что $M \subseteq N$ и $N \subseteq M$.

а) Докажем, что $M \subseteq N$. Пусть $x \in M$; тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$; последнее соотношение означает, что $x \in B$ или $x \in C$. Если $x \in B$, то, поскольку $x \in A$, имеем $x \in A \cap B$, откуда $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) = N$. Если $x \in C$, точно так же получаем $x \in A \cap C$, откуда опять-таки $x \in N$.

б) Докажем, что $N \subseteq M$. Пусть $x \in N$; тогда $x \in A \cap B$ или $x \in$ $\in A \cap C$. В первом случае $x \in A$ и $x \in B$; из $x \in B$ следует $x \in B \cup C$, что вместе с $x \in A$ дает $x \in A \cap (B \cup C) = M$. Во втором случае рассуждаем аналогично. □

Доказанные свойства объединения и пересечения совершенно аналогичны известным свойствам сложения и умножения чисел, причем объединение соответствует сложению, а пересечение — умножению.

Однако следующее свойство уже не имеет аналога в арифметике:

VI. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения по отношению к пересечению).

Доказательство. Обозначим левую часть через M, правую — через N.

а) Докажем, что $M \subseteq N$. Пусть $x \in M$; тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$. В первом случае сразу имеем $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, откуда $x \in N$. Во втором случае имеем $x \in B$, откуда $x \in A \cup B$, и $x \in C$, откуда $x \in A \cup C$; но $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ дает $x \in N$.

[5] От латинского distribuo — «распределяю».

б) Доказательство соотношения $N \subseteq M$ предоставляется читателю. □

VII. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Доказательство. Каждый элемент A либо принадлежит B, либо не принадлежит. В первом случае он принадлежит $A \cap B$, во втором принадлежит $A \setminus B$, и, значит, в обоих случаях принадлежит правой части. Таким образом, левая часть содержится в правой. А поскольку каждое из множеств $A \setminus B$ и $A \cap B$ содержится в A, правая часть содержится в левой. □

7. Очень часто бывает, что рассматриваются всевозможные множества, являющиеся частями одного и того же множества U, и никакие другие множества не рассматриваются. Множество U называют в этом случае *универсальным*, и для произвольного множества A, содержащегося в U, разность $U \setminus A$ обозначают через CA и называют *дополнением* A до U; если U все время одно и то же (как бывает чаще всего), слова «до U» опускают. Операция, состоящая в образовании по множеству A, содержащемуся в U, его дополнения (до U), тоже называется *дополнением* (до U).

Основные свойства дополнения (в предположении, что все рассматриваемые множества содержатся в U):

I. $CCA = A$.

Доказательство. По определению дополнения множество CCA состоит в точности из тех элементов U, которые не принадлежат CA. Но не принадлежат CA в точности те элементы U, которые принадлежат A. □

II. $C(A \cup B) = CA \cap CB$.

Доказательство. Дополнение объединения A и B — это множество, состоящее в точности из тех элементов U, которые не принадлежат ни A, ни B, — иначе говоря, принадлежат как CA, так и CB. Но это как раз те элементы, которые принадлежат пересечению CA и CB. □

III. $C(A \cap B) = CA \cup CB$.

Доказательство. Дополнение пересечения A и B — это множество, состоящее в точности из тех элементов U, которые не принадлежат одновременно A и B, — иначе говоря, принадлежат хотя бы одному из множеств CA и CB. Но это как раз те элементы, которые принадлежат объединению CA и CB. □

Читатель сможет представить себе эти свойства дополнения наглядно, если внимательно рассмотрит приведенный выше рисунок (считая множество всех точек плоскости рисунка универсальным).

Задача. Доказать, что $C(A \setminus B) = CA \cup B$.

8. В математике, в логике и в повседневной жизни часто приходится иметь дело с *упорядоченными парами* элементов того или иного множества, т. е. с парами, в которых один элемент считается *первым*, а другой *вторым*. (В частном случае первый и второй элементы могут совпадать.) Например, координаты точки на плоскости — это упорядоченная пара, в которой первым элементом считается абсцисса, вторым — ордината. Упорядоченную пару с первым элементом a_1 и вторым элементом a_2 принято обозначать (a_1, a_2). Например, $(3, -1)$ — упорядоченная пара, первый элемент которой — число 3, второй — число -1; $(2, 2)$ — упорядоченная пара, первый и второй элементы которой равны 2.

Наряду с упорядоченнами парами рассматриваются *упорядоченные тройки, четверки* и т. д. Обозначаются они аналогично: упорядоченная n-ка (подробнее — *упорядоченная система n элементов*) с первым элементом a_1, вторым элементом a_2, ..., n-м элементом a_n записывается в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Например, $(2, 7, 6)$ — упорядоченная тройка с первым элементом 2, вторым элементом 7 и третьим элементом 6.

В повседневной жизни упорядоченные системы (часто их называют также *кортежами*) используются, когда нужно дать «имена» большому количеству однородных предметов, причем разные предметы должны иметь разные «имена». Так, номер телефона представляет собой упорядоченную n-ку элементов множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (число n в разных городах разное); принятые в странах СНГ почтовые индексы суть упорядоченные шестерки элементов того же множества. (То, что номера телефонов и почтовые индексы пишутся без запятых и скобок, очевидно, несущественно.)

Нередко приходится иметь дело и с такими упорядоченными парами, тройками и т. д., в которых разные элементы берутся из разных множеств. Например, полное имя человека в России есть упорядоченная тройка, первый элемент которой принадлежит множеству личных имен, второй — множеству отчеств и третий — множеству фамилий.

Внимательный читатель, вероятно, обратил внимание, что мы не дали никакого определения упорядоченной системы, т. е. фактически ввели еще одно неопределяемое понятие.

Полезно заметить — это понадобится нам в дальнейшем, — что если множество состоит из k элементов, то упорядоченных пар из элементов этого множества имеется в точности k^2 (поскольку первый элемент можно выбрать k способами, и каждая из этих возможностей может сочетаться с таким же числом возможностей выбора второго элемента), упорядоченных троек — k^3 (поскольку каждая из k^2 возможностей выбора первых двух элементов может сочетаться с k возможностями выбора третьего), и т. д.

9. Следующее понятие, с которым нам предстоит познакомиться — *отношение*. Мы введем это понятие как неопределяемое и поясним его на примерах из естественного языка и элементарной математики.

В естественном языке много слов, обозначающих различные отношения между двумя людьми, между человеком и предметом, между двумя предметами и т. п. Например, в каждой из следующих фраз подчеркнутое слово обозначает некоторое отношение: *Миша старше Вани*; *Это дерево выше, чем то*; *Мать любит сына*; *Ученик уважает учителя*; *Анна — жена Ивана*; *Петров — подчиненный Сидорова*; *Пушкин — автор «Евгения Онегина»*; *Книга принадлежит библиотеке*; *Деревня расположена на берегу*. Некоторые из этих слов выражают отношения между объектами одной природы (например, *подчиненный*), другие — между разнородными объектами (например, *автор*).

В математике также приходится иметь дело с отношениями между элементами одного и того же или различных множеств. Например, слова *лежит на* во фразе *Точка A лежит на прямой l* выражают некоторое отношение между элементом множества точек пространства и элементом множества прямых в пространстве; слово *параллельна* во фразе *Прямая l_1 параллельна прямой l_2* выражает отношение между двумя элементами множества прямых в пространстве. Если прямая l_1 параллельна прямой l_2, можно сказать, что l_1 и l_2 «связаны» отношением параллельности, или «находятся» в этом отношении. Для произвольного отношения R также говорят: «x и y *связаны* отношением R» или «x и y *находятся* в отношении R»; короче это записывают так: xRy. Здесь R может представлять собой либо словесное обозначение отношения: «x параллельна y», «x меньше y» и т. п., либо символическое: $x < y$, $x = y$ и т. п.

Множество, из которого берется первый из связанных отношением R элементов — тот, обозначение которого мы пишем слева от R — называется *областью отправления* отношения R, а множество, из которого берется второй элемент — его *областью прибытия*. Если P и Q — соответственно области отправления и прибытия отношения R и при этом $x \in P$ и $y \in Q$, то x и y могут находиться или не находиться в отношении R, но во всяком случае вопрос: «Находятся ли x и y в отношении R?» должен иметь смысл. Например, для рассмотренного выше отношения «лежит на» областью отправления служит множество точек, а областью прибытия — множество прямых; для отношения «быть автором» область отправления — множество людей, а область прибытия — множество произведений человеческого ума и рук.

Если область отправления и область прибытия отношения совпадают, т. е. равны одному и тому же множеству M, мы говорим, что отношение *задано на множестве* M. Примерами могут служить отношение параллельности, заданное на множестве прямых, отношение $<$ («меньше»), заданное на множестве действительных чисел, отношение $=$ («равно»), также заданное на множестве действительных чисел.

Если R — отношение с областью отправления P и областью прибытия Q, то множество упорядоченных пар (x, y), таких, что xRy, называется *графиком* отношения R. Например, график отношения равенства чисел — это множество таких упорядоченных пар чисел, у которых первый и второй элементы равны. Пара (*Пушкин*, «*Евгений Онегин*») принадлежит графику отношения «быть автором», а пара (*Пушкин*, «*Ревизор*») не принадлежит.

Если R — отношение с областью отправления P и областью прибытия Q, то множество тех элементов P, которые связаны отношением R с какими-либо элементами Q, называется *областью определения* отношения R, а множество тех элементов Q, которые связаны отношением R с какими-либо элементами P, — *множеством значений* отношения R. Иногда область определения совпадает с областью отправления и множество значений с областью прибытия — например, для рассмотренных выше отношений параллельности, «лежит на», $=$, $<$. Но это не всегда так. Примером может служить отношение «быть подчиненным»: оно задано на множестве людей, но, к счастью, не все люди — подчиненные и не все — начальники.

Другой пример: рассмотрим следующее отношение — мы обозначим его буквой T, — областью отправления которого будет множество $Г$ городов мира, а областью прибытия — множество $Б$ букв русского алфавита: xTy означает, что русское название города x начинается и оканчивается буквой y. (Например, *КурскTк*, *ОслоTо*). Ясно, что область определения отношения T — истинная часть множества $Г$, а его множество значений — истинная часть $Б$. (Читатель сам приведет примеры городов, не принадлежащих области определения T, и букв, не принадлежащих множеству значений T.)

Отношение S называют *обратным* для отношения R, если xSy тогда и только тогда, когда yRx. Отношение, обратное для R, обозначают обычно R^{-1}. Очевидно, область отправления отношения R является для R^{-1} областью прибытия, а область прибытия R — областью отправления; в частности, если R задано на множестве M, то и R^{-1} задано на том же множестве. Точно так же область определения отношения R является для R^{-1} множеством значений, а множество значений R — областью определения. Ясно, что отношение R является, в свою очередь, обратным для R^{-1}; поэтому говорят, что отношения R и R^{-1} *взаимно обратны*.

Примеры: для отношения «больше» обратное отношение есть «меньше», для «лежать на» — «проходить через» (предложение *Прямая l проходит через точку A* означает то же, что *Точка A лежит на прямой l*), для «быть женой» — «быть мужем». (Есть и такие отношения, которые сами себе обратны — например, равенство, параллельность, отношение «быть в родстве».)

Задачи. (1) Пусть S — следующее отношение с областью отправления $\{0, 1, \ldots, 9\}$ и областью прибытия $\{а, б, \ldots, я\}$: xSy означает, что русское название цифры x начинается с буквы y. Выписать все элементы графика S и все элементы множества значений S.

(2) Пусть T_0 — следующее отношение, заданное на множестве букв русского алфавита: xT_0y означает, что ни в каком русском слове (не являющемся собственным именем или аббревиатурой) буква x не может непосредственно предшествовать букве y. (а) Выписать не менее десяти элементов графика отношения T_0. (б) Совпадает ли область определения отношения T_0 с областью отправления? (в) Тот же вопрос для множества значений и области прибытия. (г) Совпадает ли отношение T_0 со своим обратным?

(3) Если x — слово естественного языка, выражающее некоторое отношение, то слово, выражающее обратное отношение (если такое слово существует), называется *конверсивом*[6] слова x. (Например, слово *меньше* — конверсив слова *больше*, слово *жена* — конверсив слова *муж*.) Найти конверсивы слов: *потомок, начальник, ученик, сосед, автор, страшить, радовать, нравиться, дружить, севернее, слева, далеко, близко.* (Предостережение: не смешивать конверсив с антонимом!)

[6] От лат. conversio — «обращение».

10. Отношение называется *функциональным*, если каждый элемент его области определения связан этим отношением только с одним элементом его множества значений — иначе говоря, если ни для какого x не может существовать более одного y, такого, что x и y связаны этим отношением (подразумевается, что x — первый элемент, а y — второй).

Функциональное отношение обычно называют просто *функцией*.

Функцию (функциональное отношение) F естественно представлять себе как некоторый «закон соответствия», по которому каждому элементу a области определения отношения F «ставится в соответствие» строго определенный элемент множества значений, а именно тот единственный элемент b, который связан с a отношением F, т. е. тот, для которого справедливо aFb. Этот элемент b обозначается $F(a)$ (читается «F от a») и называется *образом* элемента a; этот последний, в свою очередь, называется *прообразом* элемента b. (Прообраз, в отличие от образа, не обязан быть единственным.) Если x и y — переменные, пробегающие соответственно область определения и множество значений F, то x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, а y — *зависимой переменной*. Если a — произвольное значение независимой переменной, т. е. произвольный элемент области определения функции F, то естественно сказать, что соответствующее значение $b = F(a)$ зависимой переменной *зависит* от a (подробнее — «зависит по закону F»); этим и объясняются названия «независимая переменная» и «зависимая переменная». Вместо «функция F» часто пишут «функция $F(x)$» (читается «F от x») или «функция $y = F(x)$». (Разумеется, вместо x и y можно использовать любые другие буквы!) Если x_0 — какое-либо значение независимой переменной (т. е. элемент области определения функции F) и y_0 — соответствующее значение функции F (т. е. образ элемента x_0), то говорят, что при значении независимой переменной, равном x_0, функция принимает значение y_0.

Если областью определения некоторой функции является множество M, мы будем говорить, что эта функция *определена* на множестве M.

Из школьного курса математики читатель должен быть хорошо знаком с функциями, заданными на множестве действительных чисел. Рассмотрим, например, следующее отношение Q, заданное на этом множестве: xQy означает, что $y = x^2$. Поскольку для каждого действительного числа существует только одно число, являющееся его квадратом, это отношение есть функция (так что вместо xQy можно писать $y = Q(x)$). Ее область определения — множество действительных чисел, множество значений — множество неотрицательных действительных чисел. Имеем, например: $Q(2) = 4$, $Q(-2) = 4$, $Q(0) = 0$.

Однако область определения и множество значений функции не обязательно должны состоять из чисел. Пусть, например, xMy означает «y — мать x-а». Областью отправления отношения M можно считать множество людей, областью прибытия — множество женщин. Очевидно, отношение M есть функция (поскольку у каждого человека только одна мать).

Другой пример: для каждого человека x обозначим через $\Pi(x)$ ту (русскую) букву, которая записывается в его анкете в графе «пол», т. е. *м* для мужчин и *ж* для женщин. Отношение Π есть функция, областью определения которой является множество людей, а множество значений состоит из двух русских букв *м*, *ж*.

Еще одним примером «нечисловой» функции может служить отношение T между городами и буквами, рассмотренное в пункте 9.

В дальнейшем в этой книге нам будут нужны главным образом «нечисловые» функции.

Замечание. Следует обратить внимание на различие между терминами «функция определена на множестве» и «функция задана на множестве». Например, функция $y = \sqrt{x}$ задана на множестве (всех) действительных чисел, но определена на множестве неотрицательных действительных чисел.

Задачи. (1) Пусть P — следующее отношение, заданное на множестве букв русского алфавита: xPy означает, что в слове *трудолюбие* имеется буквосочетание xy. (Например, буква *ю* находится в отношении P к букве *л*.) (а) Выяснить, является ли отношение P функцией. (б) Выписать все элементы области определения, все элементы множества значений и все элементы графика функции P.

(2) Выписать все элементы графика функции G, определенной на множестве порядковых номеров слов в тексте настоящей задачи, считая с начала, и такой, что для каждого слова значение функции от его номера равно числу букв в этом слове (например, $G(1) = 8$).

(3) В лингвистике принято обозначать через Magn (от латинского magnus — «большой») функцию, определенную на некотором подмножестве множества слов заданного естественного языка (например, русского) и такую, что $\mathrm{Magn}(x)$ есть слово, обозначающее «высокую степень» того, что обозначается словом x.

Например: Magn(*аплодисменты*) = *бурные*;
Magn(*плакать*) = *горько*;
Magn(*опечаленный*) = *глубоко*.

Найти значения функции Magn от слов: *уважение, свет, тьма, храбрость, молодость, старость, победа, поражение, здоровье, болезнь, грех, спать, дурак, дождь.*

11. До сих пор, говоря об отношениях, мы для простоты ограничивались теми из них, в которых участвуют только два объекта. Однако в естественном языке есть и такие слова, которые выражают отношения между тремя объектами — например, *дал* (кто — что — кому: *Иван дал книгу Петру*), *научил* (кто — кого — чему: *Отец научил сына грамоте*), *рассказал* (кто — кому — о чем: *Ваня рассказал Мише о своей работе*), между четырьмя — *купил* (кто — у кого — что — почем: *Иван купил у Петра корову за сто рублей*) и даже между пятью — *арендовал* (кто — у кого — что — на какой срок — за какую плату: *Смит арендовал у Джонса пять акров земли на два года за двести фунтов.*[7]

В математике также встречаются отношения между тремя, четырьмя и более объектами. Например, если A, B, C — точки, лежащие на одной прямой, то фраза «C лежит между A и B» выражает определенное отношение между этими тремя точками; фраза «Прямые k и l пересекаются в точке A» выражает отношение между тремя объектами, два из которых — прямые, а третий — точка; если a, b, c — числа, то выражение $a + b = c$ представляет собой утверждение о том, что между данными числами имеется определенное отношение: сумма первых двух равна третьему. Отношение пропорциональности $a/b = c/d$ связывает уже четыре объекта.

В дальнейшем, говоря об отношениях, мы будем подразумевать отношения между любым числом объектов. Отношения между двумя объектами называются *бинарными*[8] или *двуместными*, между тремя объектами — *тернарными*[9] или *трехместными*; отношения, в которых участвует точно n объектов, $n = 2, 3, \ldots$, называются *n-местными.*

По аналогии с предыдущим для произвольного n-местного отношения R понятно выражение «$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *связаны* отношением R (или *находятся* в отношении R)». Множество, из которого берется первый (второй, третий и т. д.) из связанных отношением R элементов, мы будем называть *областью первых* — соответственно *вторых, третьих* и т. д. — *элементов* отношения R. Если все эти множества совпадают между собой, т. е. равны одному и тому же множеству M, мы говорим, что отношение *задано на множестве* M.

---

[7] Пример Ю. Д. Апресяна.

[8] От лат. bini — «по два».

[9] От лат. terni — «по три».

Графиком n-местного отношения R называется множество всех тех упорядоченных n-ок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых $x_1, x_2, \dots, x_n$ связаны отношением R.

Примеры. 1) Для тернарного отношения «x и y — соответственно отец и мать z-а» область первых элементов есть множество мужчин, область вторых элементов — множество женщин, область третьих — множество людей. Примером упорядоченной тройки, принадлежащей графику этого отношения, может служить тройка (*Сергей Львович Пушкин*, *Надежда Осиповна Пушкина*, *Александр Сергеевич Пушкин*).

2) Графику заданного на множестве действительных чисел тернарного отношения $x + y = z$ принадлежат, например, упорядоченные тройки $(3, 2, 5)$, $(2, 2, 4)$, $(-7, 10, 3)$ и не принадлежат тройки $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 2, 9)$ и т. п.

Теперь мы можем обобщить также и понятие функционального отношения (функции).

$(n + 1)$-местное отношение $(n = 2, 3, \dots)$ называется *функциональным*, если ни для какой упорядоченной n-ки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не может существовать более одного y, такого, что $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ связаны данным отношением.

Если в этом определении допустить также значение n, равное единице, и при $n = 1$ вместо упорядоченной n-ки брать просто x_1, то введенное выше понятие функционального бинарного отношения окажется частным случаем введенного только что общего понятия функционального бинарного отношения.

$(n + 1)$-местное функциональное отношение обычно называют *функцией n переменных*. В частности, функции одной переменной — это то же самое, что «просто» функции, рассматривавшиеся выше.

Областью определения функции n переменных F называется множество тех упорядоченных n-ок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых существуют y, такие, что $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ связаны отношением F. *Множеством значений* функции n переменных F называется множество тех y, для которых существуют упорядоченные n-ки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такие, что $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ связаны отношением F.

Примеры. 1) Рассмотренное выше тернарное отношение $x + y = z$, заданное на множестве действительных чисел, является функциональным отношением, т. е. функцией двух переменных, поскольку для каждой пары чисел x, y существует только одно число z, такое, что $x + y = z$. Областью определения этой функции служит множество упорядоченных пар действительных чисел, а множеством значений —

само множество действительных чисел. Если обозначить эту функцию буквой F, то для каждой пары действительных чисел x, y будем иметь $F(x, y) = x + y$. Например, $F(3, 2) = 5$, $F(2, 2) = 4$.

2) Объем прямоугольного параллелепипеда есть функция трех переменных, называемых обычно его «измерениями» («длины», «ширины» и «высоты»). Эта функция выражается формулой $V(x, y, z) = xyz$, где x, y, z — «измерения» параллелепипеда. Ее область определения состоит из всевозможных упорядоченных троек положительных чисел, множество значений — из всевозможных положительных чисел.

3) Окончание русского прилагательного (точнее, полного прилагательного в положительной степени) зависит от его основы (например, основа прилагательного *белый* есть *бел-*, основа прилагательного *настольный* — *настольн-*) и четырех грамматических характеристик, по которым прилагательное согласуется с существительным: рода, одушевленности/неодушевленности, числа и падежа. Иначе говоря, окончание русского прилагательного есть функция пяти переменных x, y, z, u, v, где переменная x пробегает множество всевозможных основ русских прилагательных (довольно обширное, но конечное и вполне обозримое), переменная y пробегает множество {*муж*, *жен*, *ср*}, переменная z — множество {*одуш*, *неодуш*}, переменная u — множество {*ед*, *мн*} и переменная v — множество {*им*, *род*, *дат*, *вин*, *тв*, *предл*}. Смысл обозначений здесь ясен. Обозначив эту функцию $\mathrm{Fl}(x, y, z, u, v)$, мы будем иметь, например:

Fl(*больш-*, *муж*, *одуш*, *ед*, *вин*) = *-ого*;
Fl(*больш-*, *жен*, z, *ед*, *вин*) = *-ую* при любом значении z;
Fl(*маленьк-*, y, z, *мн*, *тв*) = *-ими* при любых значениях y и z.

Задачи. (1) (а) Привести несколько примеров упорядоченных троек, принадлежащих графику тернарного отношения «Человек x старше человека y на n лет».

(б) То же для отношения «Расстояние между железнодорожными станциями x и y равно z км.»

(в) То же для заданного на множестве действительных чисел отношения $x + y + 1 = 2z$.

(2) Для каждого из отношений предыдущей задачи ответить на вопрос, является ли оно функциональным.

(3) Пусть $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где n — одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, есть следующая функция n переменных, заданная на множестве всех букв русского алфавита:

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = а$, если среди букв $x_1, x_2, \dots, x_n$ нет двух одинаковых;

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = б$, если среди букв $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть две одинаковые, но нет трех одинаковых;

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = в$, если среди букв $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть три или более одинаковых.

(Например: $F_5(э,й,а,ъ,н) = а$; $F_5(э,й,а,ъ,й) = б$; $F_5(ъ,ъ,а,ъ,ъ) = в$.)

Найти:

(а) $F_4(F_2(а,б), F_3(а,б,в), F_1(б), F_1(в))$;

(б) $F_3(F_1(а),\ F_1(б),\ F_1(в))$;

(в) $F_1(F_3(а,б,в))$;

(г) $F_{100}(x_1, x_2, \dots, x_{100})$, где $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ — произвольные русские буквы.

Глава 5. Строение предложений и их символическая запись

Сейчас мы займемся описанием строения предложений — разумеется, только входящих в поле зрения логики (см. главу 3), и притом не всех, а лишь наиболее простых (но их будет достаточно для исследования строения рассуждений). Современная логика пользуется для этой цели специальным символическим языком, выразительные средства которого носят по преимуществу математический характер. С ним мы и должны будем познакомиться в настоящей главе.

1. Мы начнем с рассмотрения предложений, в которых утверждается наличие некоторой простой ситуации, например: *Учитель пришел, Ока впадает в Волгу, Отец подарил сыну книгу, Иван купил у Петра корову за сто рублей.* В каждой такой ситуации участвуют один или несколько «предметов»: в первом предложении речь идет о ситуации «прихода» с одним участником — учителем, во втором о ситуации «впадения» с двумя участниками — Окой и Волгой, и т. д. Ситуация с одним участником может состоять в том, что «предмет» обладает каким-либо свойством: *Кошка — млекопитающее,* 6 — *четное число*; с известной натяжкой можно описать таким образом и любую одноместную ситуацию — например, понимать наше первое предложение как «Учитель обладает тем свойством, что он пришел». Что же касается ситуаций с несколькими участниками, то они всегда состоят фактически в том, что «предметы» находятся в каком-либо отношении (см. гл. 4, пункты 9 и 11).

Для предложений этого типа — по смысловой структуре они самые простые — в современной логике принят следующий способ записи: ситуация обозначается каким-либо символом (чаще всего буквой) и справа от него в скобках записываются имена ее участников — разделенные запятыми, если их больше одного. (Эти имена могут быть либо словами естественного языка, либо тоже символами — например, математическими.) Обозначив, например, свойство «быть пришедшим» и отношения «впадения», «дарения» и «покупки» соответственно буквами *П*, *В*, *Д*, *К*, мы сможем записать приведенные выше предложения так: *П*(*учитель*), *В*(*Ока*, *Волга*), *Д*(*отец*, *сын*, *книга*), *К*(*Иван*, *Петр*, *корова*, *сто рублей*).

Читатель, вероятно, обратил внимание на сходство такого способа записи предложений с обычным способом обозначения функций (см. гл. 4, пункты 10 и 11). Это сходство не случайно: с каждым свойством и каждым отношением можно весьма естественно связать некоторую функцию. Например, со свойством M — «быть млекопитающим» связывается функция одной переменной $M(x)$, определенная на множестве видов животных и такая, что для каждого элемента x этого множества $M(x)$ есть истинностное значение предложения «x — млекопитающее», так что $M($*кошка*$) =$ *И*, $M($*корова*$) =$ *И*, $M($*ворона*$) =$ *Л*. Аналогично, с отношением «впадения» B связывается функция двух переменных $B(x, y)$, у которой область первых элементов состоит из всевозможных рек, а область вторых элементов включает также всевозможные моря и озера, такая, что для каждой пары (x, y) элементов соответствующих множеств $B(x, y)$ есть истинностное значение предложения «x впадает в y», так что $M($*Ока, Волга*$) =$ *И*, $M($*Волга, Ока*$) =$ *Л*, $M($*Волга, Волга*$) =$ *Л*.

Этим же способом можно связать некоторую функцию одной переменной с каждым свойством и некоторую функцию n переменных $(n = 2, 3, \dots)$ с каждым n-местным отношением. Такие функции называют *предикатами*. Предикаты, отвечающие свойствам, называются *одноместными*, отвечающие двуместным (бинарным) отношениям — *двуместными*, и т. д. Общее определение можно сформулировать так: n-*местный предикат* есть функция n переменных с непустой областью определения, множество значений которой содержится в множестве $\{$*И*, *Л*$\}$.

Приведем еще несколько примеров. Обозначим через $G(x)$ одноместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел и принимающий значение *И* для четных x и *Л* для нечетных; через $M(x, y)$ — двуместный предикат, заданный на множестве действительных чисел и принимающий значение *И*, если $x < y$, и значение *Л* в остальных случаях; через $S(x, y, z)$ — трехместный предикат, заданный на том же множестве действительных чисел и принимающий значение *И*, если $x + y = z$, и значение *Л* в остальных случаях. Ясно, что первый из этих предикатов отвечает свойству «быть четным числом», второй — бинарному отношению $x < y$, третий — тернарному отношению $x + y = z$.

Об n-местном предикате мы будем говорить, что его *вместимость* равна n. Предикаты, вместимость которых больше единицы, часто называют *многоместными*.

Если все значения предиката равны *И*, его называют *тождественно истинным*, а если все его значения равны *Л* — *тождественно ложным*. Например, предикат, определенный на множестве людей и отвечающий свойству «быть смертным», тождественно истинен, а определенный на том же множестве предикат, отвечающий свойству «быть бессмертным», тождественно ложен.

2. В разного рода рассуждениях часто приходится иметь дело с предложениями, выражающими утверждения о том, что все элементы некоторого множества обладают некоторым свойством: «Все люди смертны», «У всех прямоугольников диагонали равны» — или что в некотором множестве существуют элементы, обладающие некоторым свойством: «Существуют люди, знающие несколько десятков языков», «Существуют черные лебеди». Для таких предложений в логике принят следующий символический способ записи. Если F — свойство, имеющее смысл для элементов множества M, и $F(x)$ — отвечающий этому свойству предикат[1] (определенный на M), то предложение «Все элементы множества M обладают свойством F» — или, что то же самое, «Каждый (или «любой», или «всякий») элемент множества M обладает свойством F» записывается в виде $\forall x F(x)$, а предложение «Во множестве M существует (или «есть», или «имеется», или «найдется») элемент, обладающий свойством F» — в виде $\exists x F(x)$.[2] Выражения $\forall x$ и $\exists x$ называются *квантором общности* (или *всеобщности*) и *квантором существования* соответственно. При этом обычно говорят «квантор *по* переменной x».

[1] Обозначая свойство и предикат одной и той же буквой, мы хотим подчеркнуть, что предикат — это в сущности, «и есть» свойство; задать свойство значит задать предикат.

[2] Таким образом, множество M не упоминается явно; это вполне естественно, так как, поскольку предикат F задан, тем самым задано и множество, на котором он определен.

Предложение $\forall x F(x)$, очевидно, истинно, если $F(x)$ — тождественно истинный предикат, и ложно в противном случае; предложение $\exists x F(x)$ ложно, если предикат $F(x)$ тождественно ложен, в противном случае он истинен.

Подчеркнем, что поскольку выражения $\forall x F(x)$ и $\exists x F(x)$ — не предикаты, а предложения, они в действительности не зависят от переменной x. Эта переменная является здесь, как говорят, *связанной*; ее можно обозначить и любой другой буквой: вместо $\forall x F(x)$ можно писать, например, $\forall y F(y)$ или $\forall z F(z)$, вместо $\exists x F(x)$ — $\exists y F(y)$ или $\exists z F(z)$.

Постановку квантора общности и квантора существования перед одноместными предикатами — или, как чаще говорят, *связывание переменной квантором* — можно рассматривать как операции, превращающие эти предикаты в предложения. Например: связывая квантором общности переменную x в предикате $C(x)$, определенном на множестве людей и означающем «x смертен», получаем истинное предложение $\forall x C(x)$ — «Все люди смертны», а из предиката $Ч(x)$, определенного на множестве лебедей и означающего «x черен», тем же способом получаем ложное предложение $\forall x\, Ч(x)$ — «Все лебеди черные»; заменив в последнем примере квантор общности квантором существования, получим истинное предложение $\exists x\, Ч(x)$ — «Существуют черные лебеди», а связав квантором существования переменную x в предикате $Б(x)$, определенном на множестве людей и означающем «x бессмертен», получаем ложное предложение $\exists x Б(x)$ — «Существуют бессмертные люди».

Заметим еще, что если предложение $\forall x F(x)$ истинно, то $\exists x F(x)$ также истинно, и если $\exists x F(x)$ ложно, то $\forall x F(x)$ также ложно. Например, предложение $\exists x C(x)$ истинно, а предложение $\forall x Б(x)$ ложно.

Операции связывания кванторами можно применять и к многоместным предикатам, но в этом случае результатом будет не предложение, а предикат, вместимость которого на единицу меньше. Рассмотрим, например, введенный выше двуместный предикат $B(x, y)$, означающий «x впадает в y», где x — река, а y — река, море или озеро. Связывая в нем переменную x квантором общности, мы получим одноместный предикат $\forall x B(x, y)$, зависящий только от переменной y и означающий «Все реки впадают в y». (Этот предикат, очевидно, тождественно ложен.) Связывая ту же переменную квантором существования, получим другой одноместный предикат — $\exists x B(x, y)$,— означающий «Существует река, впадающая в y» (и не являющийся, очевидно, ни тождественно истинным, ни тождественно ложным). Связывая в том же двуместном предикате переменную y, получим одноместные предикаты $\forall y B(x, y)$ и $\exists y B(x, y)$, означающие соответственно «x впадает во все реки, моря и озера» и

«Существует река, море или озеро, куда впадает x». (Первый из этих предикатов тождественно ложен, второй ни тождественно истинным, ни тождественно ложным не является.[3]) Если теперь в каком-либо из четырех полученных таким образом одноместных предикатов связать оставшуюся «свободную» переменную квантором общности или существования, получится уже предложение, истинное или ложное. Например, предложение $\exists x \forall y B(x,y)$ — «Существует река, впадающая во все реки, моря и озера» — ложно, предложение $\exists x \exists y B(x,y)$ — «Существует река, впадающая в какую-то реку, море или озеро» — истинно.

Приведем еще один пример. Пусть $M(x,y)$ — рассмотренный выше предикат, определенный на множестве действительных чисел и отвечающий отношению $x < y$. Тогда предложение $\forall x \exists y M(x,y)$, означающее «Для любого действительного числа существует действительное число, которое больше его», истинно, а предложение $\exists y \forall x M(x,y)$, означающее «Существует действительное число, которое больше всех действительных чисел», ложно.

Из этого примера видно, между прочим, что кванторы общности и существования нельзя переставлять.

Задачи. (1) (а) Выше были выписаны два из восьми предложений, получающихся из предиката $B(x,y)$ связыванием обеих переменных кванторами. Выпишите остальные шесть, переведите их на русский язык и найдите их истинностные значения.

(б) То же для предиката $M(x,y)$.

(2) Обозначим через $M_1(x,y)$ двуместный предикат, заданный на множестве натуральных чисел и отвечающий отношению $x \leqslant y$.

(а) Убедитесь, что из четырех одноместных предикатов, возникающих при связывании квантором в $M_1(x,y)$ одной переменной, два тождественно истинны, один тождестенно ложен и один не является ни тождественно истинным, ни тождественно ложным.

(б) Выпишите все предложения, получающиеся из $M_1(x,y)$ связыванием обеих переменных кванторами, переведите их на русский язык и найдите их истинностные значения.

Замечания. 1) Стоит обратить внимание на то, что при записи выражений, содержащих кванторы, на обычном русском языке связанные переменные могут исчезать. Происходит это потому, что от таких переменных, как мы уже говорили, эти выражения не зависят.

2) Еще один способ получить из многоместного предиката предикат меньшей вместимости состоит в том, чтобы фиксировать значения

[3] Примером никуда не впадающей реки может служить Зеравшан в Средней Азии.

некоторых переменных. Например, если в рассматривавшемся выше двуместном предикате $B(x, y)$ положить $y =$ *Волга*, получится одноместный предикат $B(x,$ *Волга*$)$, означающий «x впадает в Волгу».

3. Теперь мы займемся символической записью предложений, которые образуются из других, более простых, предложений с помощью союзов. Для целей исследования рассуждений можно ограничиться тремя союзами: «и», «или», «если»[4]. Для этих союзов в логике используются специальные символические обозначения. В практическом плане это очень существенно: без символических обозначений сложные выражения, возникающие при исследовании рассуждений — с такими выражениями нам скоро придется столкнуться, — были бы совершенно необозримы.[5] В теоретическом плане важнее другое: нам придется точно описать значения союзов. Впрочем, это описание будет довольно схематичным. В естественном языке зависимость смысла предложения, образованного с помощью того или иного союза, от смысла его частей бывает обычно довольно сложной. Но в логике нас интересует только один аспект смысла предложения — его истинностное значение. Поэтому сейчас для нас описать зачение союза значит указать, каким образом зависит истиностное значение полученного с его помощью предложения от истинностных значений тех предложений, из которых оно получено. Разумеется, при этом значение союза сильно упрощается и обедняется, но для целей логики такое упрощенное описание вполне удовлетворительно.

Начнем с союза «и». В русском языке сложное предложение, образованное с его помощью (или с помощью близкого по значению союза «а») истинно в том и только в том случае, когда истинны оба составляющих его простых предложения. Например, предложение «Лондон — столица Англии, а Париж — столица Франции» истинно, а каждое из предложений «Лондон — столица Англии, а Париж — столица Норвегии», «Лондон — столица Швеции, а Париж — столица Франции», «Лондон — столица Швеции, а Париж — столица Норвегии» ложно.

---

[4]Вместо русских союзов можно было бы с таким же успехом говорить, скажем, об английских «and», «or», «if», или немецких «und» «oder», «wenn», или французских «et», «ou», «si».

[5]Положение здесь такое же, как с математическими обозначениями: попробуйте представить себе, как выглядели бы, скажем, школьные упражнения на решение систем уравнений, если бы мы вынуждены были обходиться без знаков арифметических действий и буквенных обозначений для чисел!

В логике принято для произвольных предложений «A» и «B» записывать предложение «A и B» символически в виде $A \,\&\, B$. Это предложение называется *конъюнкцией*[6] предложений «A» и «B»; оно истинно, если оба предложения «A», «B» истинны, в противном случае оно ложно.

Замечание. Вместо знака & иногда используется знак $\wedge$.

Зависимость истинностного значения конъюнкции от истинностных значений ее членов можно представить с помощью таблицы:

A	B	$A \,\&\, B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

Здесь в каждой строке слева от вертикальной черты записана одна из четырех возможных комбинаций истинностных значений предложений «A», «B», а справа — соответствующее истинностное значение предложения $A \,\&\, B$. Подобными *истинностными таблицами* мы будем широко пользоваться и впредь.

Пример. Пусть P означает «Дважды два — четыре», Q — «Снег бел», P' — «Дважды два — пять», Q' — «Снег черен». Тогда предложение $P \,\&\, Q$ истинно, а предложения $P \,\&\, Q'$, $P' \,\&\, Q$ и $P' \,\&\, Q'$ ложны.

Конечно, в реальной речи весьма маловероятно встретить предложение вроде «Дважды два — четыре, и снег бел». Но дело тут не в свойствах языка, а в том, что снег и таблица умножения обычно в одном рассуждении не встречаются. Можно, впрочем, представить себе ситуацию, в которой такая фраза естественна. Вообразим, например, что некий шутник, желая разыграть своего приятеля, яростного спорщика и любителя объяснять общеизвестные истины, стал уверять его, что дважды два — пять и что снег черен. Если приятель примет это всерьез, он вполне может воскликнуть: «Да нет же, дважды два — четыре, и снег бел!»

Обратимся теперь к союзу «или». В русском языке он имеет несколько разных значений. Из них нас будет интересовать только одно, наиболее употребительное — то, которое выступает, например, в следующих предложениях: (1) «Здесь близко река или озеро» (иначе: «Здесь близко

[6] От латинского *conjunctio* — «соединение, связь». Символ & — стилизованное написание латинского *et* — «и».

река или здесь близко озеро»); (2) «Это яблоко сорвано с той или с соседней яблони»; (3) «Завтра я пойду в школу или в библиотеку»; (4) «Завтра в 12 часов он будет выступать в Туле или в Твери». (Предложения (2), (3), (4) можно, очевидно, преобразовать так же, как (1).) Каждое из предложений (1)—(4) состоит из двух более простых предложений — скажем, A и B; при этом ни об A, ни о B в отдельности говорящий не знает, истинно оно или ложно, однако он утверждает, что хотя бы одно из них истинно — а может быть, и оба. Например, предложение (1) будет признано истинным, если в действительности поблизости есть река, но нет озера, или реки нет, но озеро есть, или есть и река, и озеро; если же ни реки, ни озера нет, это предложение будет признано ложным. (Конечно, в случаях (2) и (4) A и B не могут быть истинны одновременнно, но не потому, что «или» употреблено в них в ином значении, чем в (1) и (3), а потому, что в этих случаях несовместимы *факты*, выраженные соединяемыми предложениями.[7])

Предложение «A или B», где «или» понимается в только что разъясненном смысле, записывается символически в виде $A \vee B$. Это предложение называется *дизъюнкцией*[8] предложений «A» и «B»; оно истинно, если хотя бы одно из предложений A, B истинно, в противном случае (т. е. если A и B оба ложны) оно ложно.

Зависимость истинностного значения дизъюнкции от истинностных значений ее членов можно представить с помощью следующей истинностной таблицы:

A	B	$A \vee B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

Пример. Если P, Q, P', Q' означают то же, что в примере после определения конъюнкции, то предложения $P \vee Q$, $P \vee Q'$ и $P' \vee Q$ истинны, а предложение $P' \vee Q'$ ложно.

Конечно, надеяться встретить в реальной речи предложение «Дважды два — четыре или снег бел» еще труднее, чем «Дважды два —

[7] Следующий пример позволяет убедиться, что значение союза «или» в предложениях типа (1), (3) и типа (2), (4) одно и то же: фраза «Завтра его увидят в Петербурге или в Москве» полтораста лет назад должна бы была быть отнесена к типу (2), (4), но сейчас ее нужно отнести к типу (1), (3).

[8] От латинского *disjunctio* — разъединение, разобщение.

четыре и снег бел», и понятно, почему: как уже говорилось, союз «или» в интересующем нас значении употребляется для соединения предложений[9] в тех случаях, когда ни об одном из этих предложений в отдельности говорящий не знает, истинно ли оно; так что произнести (не в шутку) предложение «Дважды два — четыре или снег бел» мог бы только человек, не знающий, сколько будет дважды два и какого цвета снег, но берущийся об этом рассуждать.

Перейдем, далее, к союзу «если». Он имеет в русском языке два основных значения: условное и противопоставительное. Нас будет интересовать только первое, выступающее, например, в таких предложениях: (1) «Если эта книга поступила в магазин, то она поступила и в библиотеку»; (2) «Если завтра будет хорошая погода, мы пойдем в лес», (3) «Если он вчера не был в городе, то новость еще не дошла до него»; (4) «Если данный треугольник — прямоугольный, мы можем воспользоваться теоремой Пифагора»; (5) «Если меня не обманывает зрение, это Иван Иванович».[10] В каждом из этих предложений утверждается, что некоторое предложение — скажем, B — истинно *при условии*, что истинно некоторое другое предложение — скажем, A. При этом говорящий не знает, истинно ли A в действительности, или по крайней мере сомневается в его истинности (или делает вид, что сомневается, как в (5)). Как зависит здесь истинностное значение сложного предложения от истинностных значений A и B, мы постараемся уяснить себе на примере предложения (1). Пусть некто — скажем, Иван — произнес это предложение; чтобы узнать, сказал ли он правду, нужно выяснить, поступила ли книга в магазин и в библиотеку. Возможны четыре случая: (а) Книга поступила и в магазин, и в библиотеку; в этом случае естественно считать, что Иван сказал правду. (б) Книга не поступила ни в магазин, ни в библиотеку; и в этом случае нельзя считать, что Иван сказал неправду.[11] (в) Книга не поступила в магазин, но поступила в библиотеку; в этом случае также нет оснований уличить Ивана во лжи. (г) Книга поступила в магазин, но в библиотеку не поступила. В этом случае Иван сказал неправду.

[9] Точнее — для соединения предложений, выражающих единичные факты. Он может использоваться также для соединения «предложений с переменными», т. е. предикатов (см. ниже).

[10] Вот пример предложения с противопоставительным «если»: «Если на севере промышляли больше охотой, то на юге основу хозяйства составляло земледелие».

[11] Нет также оснований откладывать решение до тех пор, когда кнпга поступит в магазин — ведь в предложении (1) говорится только о том, что было до его произнесения.

Таким образом, поскольку предложению «Если A, то B» должно быть присвоено истинностное значение при любом распределении значений A и B, это предложение должно получить значение *Л* в случае, когда A истинно и B ложно, и значение *И* во всех остальных случаях.

В логике предложение «Если A, то B» (иначе «Из A следует B» или «A влечет B») записывается символически в виде $A \to B$ и называется *импликацией*[12] предложений A и B; оно ложно, если A истинно и B ложно, в противном случае (т. е. если либо A ложно, либо B истинно) оно истинно.

Предложения A B называются соответственно *посылкой* и *заключением* импликации $A \to B$.

Замечание. Вместо знака $\to$ иногда используется знак $\supset$.

Истинностная таблица для импликации имеет следующий вид:

A	B	$A \to B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*

Пример. Если P, Q, P', Q' означают то же, что в двух предыдущих примерах, то предложения $P \to Q$, $P' \to Q$ и $P' \to Q'$ истинны, а предложение $P \to Q'$ ложно.

Разумеется, в реальной речи предложение «Если дважды два — четыре, то снег бел» не встретится — по той причине, что произносящий его должен не знать, сколько будет дважды два, да к тому же еще считать, что от результата умножения двух на два зависит цвет снега. Предложения «Если число 18 делится на 6, то оно четно», «Если число 17 делится на 6, то оно четно», «Если число 17 делится на 6, то оно нечетно» (все они истинны!) кажутся довольно-таки странными — потому что всякий, кто знает, что из делимости на 6 следует четность, должен, конечно, знать и о том, что 18 делится на 6, а 17 не делится. (В то же время фраза «Если число делится на 6, то оно четно» вполне естественна, т. к. здесь говорящему неизвестно, о каком конкретном числе идет речь, и, стало быть, неизвестно истинностное значение посылки.) Однако необходимость считать такие странные предложения истинными не означает,

[12] От латинского *implico* — «вплетаю», «впутываю», «тесно связываю». Такой выбор названия можно объяснить тем, что здесь A, так сказать, «влечет B за собой», как если бы B было «привязано» к A. (Отсюда и термин «влечет».)

что само понятие импликации — «странное», «неестественное» или, как иногда говорят, «парадоксальное». Ведь эти предложения — всего лишь примеры, приводимые ради лучшего усвоения «внутреннего устройства» понятия импликации; приводя такие примеры, мы как бы разглядываем понятие через увеличительное стекло — а разве не странно выглядит под увеличительным стеклом обыкновенная муха? С таким же успехом можно было бы из примитивности и искусственности текстов на первых страницах учебника иностранного языка сделать вывод, что сам этот язык примитивен и неестественен.

Из предыдущего ясно, для что для истинности импликации $A \to B$ не требуется, чтобы между предложениями A и B существовала какая-либо «внутренняя связь» — в частности, причинная. Но и в естественном языке условное предложение «Если A, то B» не означает наличия причинной связи между A и B. Такая связь может, конечно, существовать, как в предложении «Если вода при нормальном атмосферном давлении нагревается до 100°C, то она закипает», но может и отсутствовать, как в предложении «Если ласточки летают низко, то можно ждать ненастной погоды». (Эта старая примета имеет, как известно, рациональное основание, но вряд ли даже наши далекие предки, впервые это подметившие, считали низко летающих ласточек виновницами ненастья.) Смысл условного предложения «Если A, то B» может быть в первом приближении выражен примерно следующим образом: «Истинность предложения A является достаточным основанием для утверждения об истинности предложения B.» (О недопустимости смешения достаточного основания с причиной мы уже говорили на с. 12.)

Кроме союзов, в русском языке есть и иные слова, служащие для образования предложений из других предложений. Одно из таких слов очень часто используется в рассуждениях — частица «не». Главный случай ее употребления, к которому при исследовании рассуждений можно свести все остальные — тот, когда она ставится перед сказуемым и в полученном таким образом новом предложении отрицается то, что утверждалось в старом, например: «Он не ездил вчера в город», «Кит — не рыба». Если исходное предложение есть A, то новое предложение означает «Неверно, что A». Это предложение записывается символически в виде $\neg A$ и называется *отрицанием предложения* A.

Замечание. Вместо $\neg A$ иногда пишут $\bar{A}$.

Истинностная таблица для отрицания имеет такой вид:

A	$\neg A$
И	*Л*
Л	*И*

Пример. Если P, Q, P', Q' означают то же, что в предыдущих примерах, то предложения $\neg P$ и $\neg Q$ ложны, а предложения $\neg P'$ и $\neg Q'$ истинны.

Символы $\&$, $\vee$, $\to$, $\neg$ называются *пропозициональными связками*.

Замечание. Значения слов естественного языка, которые мы «перевели» на наш символический язык с помощью пропозициональных связок, на самом деле гораздо богаче и шире значений этих последних, и «переводы» далеко не точны (кроме случая дизъюнкции, довольно точно передающей смысл слова «или»). Подробный анализ значений соответствующих русских слов содержится в работах, выходные данные которых указаны в списке литературы в конце книги.

Задача. Пусть X, X', Y, Y' означает соответственно: «7 — нечетное число», «7 — четное число», «8 — нечетное число», «8 — четное число».

(а) Какие из предложений $X \mathbin{\&} Y$, $X \mathbin{\&} Y'$, $X' \mathbin{\&} Y$, $X' \mathbin{\&} Y'$ истинны и какие ложны?

(б), (в), То же с заменой $\&$ на $\vee$ и на $\to$.

(г) То же для предложений $\neg X$, $\neg X'$, $\neg Y$, $\neg Y'$.

Каждой пропозициональной связке естественным образом сопоставляется некоторая операция над предложениями. Например, конъюнкции отвечает бинарная операция,[13] состоящая в образовании по двум предложениям их конъюнкции; отрицанию отвечает унарная операция, состоящая в образовании по предложению его отрицания. Всего мы получаем четыре операции: три бинарных и одну унарную. Эти операции также называются конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и отрицанием. (Таким образом, каждое из этих слов обозначает и операцию, и ее результат, подобно терминам «объединение» и «пересечение» — см. гл. 4.)

4. Пусть у нас имеется произвольный набор предложений $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$; мы будем называть их *элементарными предложениями* и их «внутренним устройством» пока интересоваться не будем. Если применять к элементарным предложениям операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания, к полученным предложениям снова применять эти операции, и т. д., будут получаться «сложные предложения», например: $X_1 \to (\neg X_2)$, $(X_1 \mathbin{\&} X_2) \vee X_3$, $((X_2) \to (X_1 \to X_3)) \mathbin{\&} X_1$. Такие выражения — составленные из элементарных предложений с помощью пропозициональных связок — называются *формулами логики*

---

[13] Операцию называют *бинарной*, если она производится над двумя объектами, и *унарной* (от латинского *unus* — один), если она производится над одним объектом.

предложений (иначе — *логики высказываний*). Сами элементарные предложения также считаются формулами логики предложений.

Для упрощения записи формул логики предложений вводится *соглашение о порядке действий*, аналогичное принятому в арифметике. Именно, считается, что дизъюнкция связывает теснее, чем импликация, конъюнкция — теснее, чем дизъюнкция и импликация, а отрицание — теснее остальных трех операций. Например: $\neg X \mathbin{\&} Y$ означает $(\neg X) \mathbin{\&} Y$ (а не $\neg(X \mathbin{\&} Y)$); $X \vee Y \mathbin{\&} Z$ означает $X \vee (Y \mathbin{\&} Z)$ (а не $(X \vee Y) \mathbin{\&} Z$);[14] $\neg(X \to Y \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} \neg Y \vee Z)$ означает $(\neg(X \to (Y \mathbin{\&} Z))) \vee ((X \mathbin{\&} (\neg Y)) \vee Z)$.

Задачи. (1) Пусть A означает «Андрей выдержал экзамен», $Б$ — «Борис выдержал экзамен», $В$ — «Виктор выдержал экзамен».

(а) Записать с помощью формул логики предложений: (а$_1$) Неверно, что ни Андрей, ни Борис не выдержали экзамена; (а$_2$) Из того, что Андрей и Борис выдержали экзамен, не следует, что его выдержал Виктор; (а$_3$) Если Борис или Виктор выдержал экзамен, то и Андрей его выдержал.

(б) Записать по-русски: (б$_1$) $\neg(\neg В \mathbin{\&} \neg A \to Б)$; (б$_2$) $\neg\neg((A \vee Б) \mathbin{\&} \neg В)$.

(2) Пусть X означает «В огороде бузина», Y — «В Киеве дядька».

(а) Записать с помощью формул логики предложений: (а$_1$) В огороде бузина, а в Киеве дядька; (а$_2$) Если неверно, что в огороде нет бузины, то или в Киеве дядька, или в огороде бузина; (а$_3$) Неверно, что если в Киеве нет дядьки и в огороде нет бузины, то или в огороде бузина, или неверно, что в Киеве нет дядьки; (а$_4$) Если неверно, что если неверно, что если неверно, что в Киеве дядька, то в огороде бузина, то в огороде бузина, то в огороде бузина.

(б) Записать по-русски: (б$_1$) $\neg X \vee \neg Y$; (б$_2$) $\neg(X \to Y) \to X \mathbin{\&} \neg X$; (б$_3$) $(Y \vee X) \mathbin{\&} \neg Y \to X$; (б$_4$) $\neg(\neg(\neg X \to Y) \to Y) \to Y$.

5. Операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания можно применять не только к предложениям, но и к предикатам. Например: если $K_2(x)$ и $K_3(x)$ — предикаты, определенные на множестве натуральных чисел и означающие соответственно «x делится на 2» и «x делится на 3», то $K_2(x) \mathbin{\&} K_3(x)$ — предикат, определенный на том же множестве и означающий «x делится на 2 и на 3»; если $D(x)$ и $F(x)$ — предикаты, определенные на некотором множестве людей и означающие соответственно «x владеет немецким языком» и «x владеет французским языком» то $D(x) \vee F(x)$ — предикат, определенный на том

[14] Подобно тому, как в арифметике $a + b \cdot c$ означает $a + (b \cdot c)$, а не $(a + b) \cdot c$.

же множестве и означающий «x владеет немецким или французским языком»; если $Ч(x)$ — предикат, определенный на множестве натуральных чисел и означающий «x четно», то $\neg Ч(x)$ — предикат, определенный на том же множестве и означающий «x нечетно».

Таким образом, у нас есть шесть операций, с помощью которых можно образовывать из предикатов новые предикаты и предложения: четыре операции, отвечающие пропозициональным связкам, и две операции постановки кванторов. Выражения, образованные с помощью этих операций из предикатов, «внутренним строением» которых мы интересоваться не будем (эти предикаты мы будем называть *элементарными*), называются *формулами логики предикатов* (далее до конца главы мы будем называть их просто *формулами*). Например, если $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$, $G(x, y)$, $P(x)$ — элементарные предикаты, то следующие выражения являются формулами:

(а) $F_1(x_1, x_2, x_3) \to P(x_4)$;
(б) $\forall x \neg \exists z F_2(x, y, z) \vee \neg G(x, y)$;
(в) $\exists y(\neg \exists z F_1(z, y, y) \to \neg \forall z(\neg P(z) \,\&\, \exists x G(z, x)))$.

Здесь и далее мы пользуемся введенным выше соглашением о порядке действий, к которому теперь добавляется еще один пункт: кванторы связывают теснее, чем конъюнкция, дизъюнкция и импликация.

О вхождениях переменной, по которой берется квантор, в ту часть формулы, к которой этот квантор относится, говорят, что они *связаны* этим квантором. Например, в формуле (в) первый квантор связывает два вхождения y, второй — одно вхождение z, третий — два вхождения z, четвертый — одно вхождение x. Те вхождения переменных в формулу, которые связаны кванторами, а также вхождения переменных в сами кванторы называются *связанными*; остальные вхождения переменных в формулу называются *свободными*. Например, формула (б) содержит два связанных и одно свободное вхождение x, два свободных вхождения y и два связанных вхождения z.

Говорят, что переменная является в некоторой формуле *свободной*, если в данной формуле имеются свободные вхождения этой переменной. Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется *замкнутой*. (Такова, например, формула (в).)

Поскольку, как мы видели выше (см. пункт **2**), при связывании переменной в предикате квантором предикат перестает зависеть от этой переменной, каждая замкнутая формула представляет собой предложение, а незамкнутая — предикат, зависящий от ее свободных переменных (и только от них!). Например, формула (а) выражает четырехместный предикат, формула (б) — двуместный (от переменных x и y), формула (в) — предложение.

6. Подводя итог сделанному, мы можем сказать, что фактически мы построили некоторый символический язык, в котором предложения имеют вид математических формул. Этот язык хорошо приспособлен для записи таких предложений, содержание которых может быть выражено в точных терминах. Классический образец дают математические предложения, но «переводу» на символический язык поддаются не только они. В пункте **2** мы уже приводили примеры такого «перевода», но там мы имели дело только с формулами простейшего вида — не содержащими пропозициональных связок. Рассмотрим теперь еще несколько примеров.

Пример 1. Возьмем в качестве элементарных следующие два предиката, заданные на множестве всевозможных небесных тел: $C(x, y)$, означающий «Тело x является спутником тела y», и $E(x, y)$, означающий «x и y совпадают» (иначе: «x и y — одно и то же небесное тело»). Тогда формула $\neg\exists x C(x, x)$ есть предложение, в переводе на русский язык означающее «Никакое небесное тело не является своим собственным спутником»; формула $\exists z(C(x, z) \,\&\, C(y, z))$ есть двуместный предикат (от переменных x и y), означающий «x и y — спутники одного и того же небесного тела», $\neg\exists y C(y, x)$ — одноместный предикат (от переменной x), означающий «x не имеет спутников». А как выразить формулой одноместный предикат, означающий «x имеет (ровно) один спутник»? Чтобы найти такую формулу, полезно прибегнуть к перифразированию, т. е. выразить тот же смысл по-русски иным способом (этот прием, кстати, помогает и при переводе с одного естественного языка на другой). Можно, например, выразить его так: «Существует небесное тело y, являющееся спутником тела x и такое, что всякое небесное тело, являющееся спутником тела x, совпадает с y», или еще немного иначе: «Существует небесное тело y, являющееся спутником тела x и такое, что, каково бы ни было небесное тело z, если это z является спутником тела x, то z совпадает с y». А последнее предложение уже легко перевести на наш символический язык «буквально»: $\exists y(C(y, x) \,\&\, \forall z(C(z, x) \to E(z, y)))$.

Пример 2. Возьмем в качестве элементарных следующие три предиката, заданные на множестве людей (всех когда-либо живших и ныне живущих; трудностями, связанными с уточнением объема этого множества, можно здесь пренебречь): $P(x, y, z)$, означающий «x и

y — соответственно отец и мать z'а», $M(x)$, означающий «x — лицо мужского пола», и $E(x, y)$, означающий «x и y — один и тот же человек». Через эти предикаты можно выразить все термины кровного родства.[15] Например:

(а) Предикаты «x — отец y'а» и «x — мать y'а» записываются соответственно как $\exists z P(x, z, y)$ и $\exists z P(z, x, y)$.

(б) «x — сын y'а»: $(\exists z P(y, z, x) \vee \exists z P(z, y, x)) \,\&\, M(x)$.

(в) «x — бабушка y'а»: $\exists u \exists v (P(u, x, v) \,\&\, \exists z (P(v, z, y) \vee P(z, v, y)))$. (Здесь первый член дизъюнкции отвечает случаю бабушки по отцу, второй — случаю бабушки по матери.)

(г) «x и y — сестры» (не сводные, т. е. и по отцу, и по матери): $\exists z \exists t (P(z, t, x) \,\&\, P(z, t, y)) \,\&\, \neg E(x, y) \,\&\, \neg M(x) \,\&\, \neg M(y)$.

(д) «x — сестра y'а»: соответствующая формула отличается от предыдущей отсутствием конъюнктивного члена $\neg M(y)$.

Пример 3. Заменим в предыдущем примере предикат $P(x, y, z)$ двуместным предикатом $A(x, y)$, означающим «x — предок y'а».Через полученный набор элементарных предикатов также можно выразить все термины кровного родства. Например, предикат «x — сын y'а» записывается так: $A(y, x) \,\&\, \neg \exists z (A(y, z) \,\&\, A(z, x)) \,\&\, M(x)$; предикат «$x$ — бабушка y'а» можно записать следующим образом: $A(x, y) \,\&\, \exists z (A(x, z) \,\&\, \&\, A(z, y) \,\&\, \neg \exists t (A(x, t) \,\&\, A(t, z)) \,\&\, \neg \exists u (A(z, u) \,\&\, A(u, y))) \,\&\, \neg M(x)$.

Пример 4. Возьмем в качестве элементарных два предиката, заданные на множестве натуральных чисел: $M(x, y)$, означающий $x < y$, и $E(x, y)$, означающий $x = y$. Тогда предложения, выражающие основные свойства отношения «меньше» запишутся так: $\forall x \neg M(x, x)$ (никакое число не меньше самого себя);

$$\forall x \forall y \forall z (M(x, y) \,\&\, M(y, z) \to M(x, z))$$

(если некоторое число меньше другого числа, а это другое число меньше третьего, то первое меньше третьего);

$$\forall x \forall y (\neg E(x, y) \to M(x, y) \vee M(y, x))$$

(если два числа различны, то одно из них меньше другого). Запись предложения «Единица есть наименьшее натуральное число» имеет вид $\neg \exists x M(x, 1)$.

[15] Точнее, все термины кровного родства, имеющиеся в русском языке. В некоторых языках (например, в тюркских, в венгерском) термины родства связаны также со старшинством.

Пример 5. Пусть $\mathit{\Gamma}$ и C — предикаты, определенные на множестве букв русского алфавита и означающие соответственно «x — гласная» и «x — согласная». Рассмотрим, кроме того, предикат $A(x, y, z)$, определенный на множестве всевозможных «слов», т. е. конечных последовательностей, составленных из русских букв (но не обязательно являющихся в самом деле русскими словами) и означающий «слово z можно составить из слов x и y в этом порядке» (как в шараде: например, слово *фасоль* можно составить из слов *фа* и *соль*), и предикат $B(x, y)$, в котором первая переменная пробегает множество букв и вторая — множество слов, означающий «буква x входит в слово y». Взяв эти четыре предиката в качестве элементарных, можно выразить, например, следующие предикаты:

(а) «Слово x состоит из одной буквы»: $\neg\exists y\exists z A(y, z, x)$. (В самом деле, слово состоит из одной буквы в том и только в том случае, когда его нельзя составить ни из каких двух слов.)

(б) «Слово x состоит из двух букв»:

$$\exists y\exists z(A(y, z, x) \,\&\, \neg\exists u\exists v A(u, v, y) \,\&\, \neg\exists t\exists s A(t, s, z)).$$

(в) «Первая буква слова x есть y»:

$$\exists t\exists z(A(t, z, x) \,\&\, \neg\exists u\exists v A(u, v, t) \,\&\, B(y, t)).$$

(г) «Слово x начинается с гласной»:

$$\exists t\exists z\exists y(A(t, z, x) \,\&\, \neg\exists u\exists v A(u, v, t) \,\&\, B(y, t) \,\&\, \mathit{\Gamma}(y)).$$

Задачи. (1) Выразить через элементарные предикаты примера 1 одноместный предикат, означающий «x имеет (ровно) два спутника».

(2) (а) Выразить через элементарные предикаты примера 2 следующие термины родства: внук; дядя по отцу (древнерусск. *стрыи*, русск. диалектное *строй*, польск. *stryj*); дядя; племянница; правнучка; сводный брат. (Имеется в виду запись формул, выражающих предикаты, означающие «x — внук y’а» и т. д.)

(б) Перевести на русский язык (смысл обозначений тот же, что в примере 2):

(б$_1$) $\exists u\exists v(P(x, u, v) \,\&\, \exists z(P(v, z, y) \vee P(z, v, y)))$.

(б$_2$) $\exists t\exists z\exists u\exists v(P(t, z, u) \,\&\, P(t, z, v) \,\&\, \neg E(u, v) \,\&$
$\&\, \exists w\exists s(P(u, w, x) \vee P(w, u, x)) \,\&\, (P(v, s, y) \vee P(s, v, y))) \,\&\, \neg M(x)$.

(б$_3$) $\exists t\exists z\exists u\exists v\exists w\exists s(P(t, z, x) \,\&\, (P(t, z, u) \,\&\, \neg E(x, u) \,\&\, (P(u, v, w) \vee$
$\vee\, P(v, u, w)) \,\&\, (P(w, s, y) \vee P(s, w, y))) \,\&\, M(x)$.

(в) С помощью элементарных предикатов примера 2 записать предложение «Никто не может быть своим собственным дедушкой».

(3) Присоединив к элементарным предикатам примера 2 предикат $C(x, y)$, означающий «x и y — супруги», выразить (в том же смысле, что в задаче (2) (а)) следующие термины родства через брак: тесть, теща, свекор, свекровь, зять, сноха, шурин, деверь, золовка, свояченица, свояк, мачеха.

(4) Выразить предикат $P(x, y, z)$ из примера 2 через элементарные предикаты примера 3.

(5) С помощью элементарных предикатов примера 4 записать предложения: (а) «Не существует наибольшего натурального числа»; (б) «Никакое натуральное число, отличное от единицы, не является наименьшим».

(6) Выразить через элементарные предикаты примера 5 одноместные предикаты, означающие: (а) «Слово x оканчивается согласной»; (б) «В слове x никакие две гласные не стоят рядом»; (в) «Слово x содержит (ровно) два вхождения гласных».

(7) С помощью предиката $V(x, y)$, означающего «x — вассал y'а», записать замкнутую формулу, выражающую предложение «Вассал моего вассала — не мой вассал».

(8) Пусть $M(x, y, z)$ — предикат, заданный на множестве натуральных чисел и означающий $xy = z$. Выразить через этот предикат двуместные предикаты, означающие: (а) y делится на x; (б) $y = x^2$; (в) $y = x^3$.

(9) Пусть двуместный предикат $I(x, y)$, в котором первая переменная пробегает множество точек плоскости и вторая — множество прямых на той же плоскости, означает «Точка x лежит на прямой y». Записать с помощью этого предиката замкнутую формулу, выражающую предложение «Через всякую точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, параллельная этой прямой».

Глава 6. Начала логики предложений

В этой главе мы займемся изучением свойств формул логики предложений, или, что фактически то же самое, свойств пропозициональных связок.

1. Каждая формула логики предложений представляет собой предложение, истинностное значение которого зависит от истинностных значений входящих в формулу элементарных предложений. Эту зависимость для каждой формулы можно представить с помощью истинностной таблицы, аналогичной приведенным в предыдущей главе таблицам для пропозициональных связок. Например, истинностная таблица для формулы $\neg(X_1 \to \neg X_2)$ выглядит так:

X_1	X_2	$\neg(X_1 \to \neg X_2)$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

Действительно: а) Если X_1 и X_2 истинны, то $\neg X_2$ ложно, поэтому $X_1 \to \neg X_2$ ложно и, значит, $\neg(X_1 \to \neg X_2)$ истинно; б) Если X_1 истинно, а X_2 ложно, то $\neg X_2$ истинно, $X_1 \to \neg X_2$ истинно и $\neg(X_1 \to \neg X_2)$ ложно; в) Если X_1 ложно, то $X_1 \to \neg X_2$ истинно при любом X_2, и $\neg(X_1 \to \neg X_2)$ ложно.

Другой пример: истинностная таблица для формулы $(X_1 \to X_2)\,\& \neg(X_2 \vee X_1)$ имеет вид:

X_1	X_2	$(X_1 \to X_2)\,\& \neg(X_2 \vee X_1)$
И	*И*	*Л*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*

Легко убедиться, что таблица записана верно, непосредственно «вычислив» значение формулы для каждого из четырех наборов значений X_1 и X_2. Например, для набора *ИИ* дизъюнкция $X_1 \vee X_2$ принимает значение *И*, а ее отрицание $\neg(X_1 \vee X_2)$ — значение *Л*; поэтому конъюнкция $(X_1 \to X_2)\,\& \neg(X_2 \vee X_1)$ ложна (так что значение импликации $X_1 \to X_2$ вычислять не нужно).

Приведем пример построения истинностной таблицы для формулы, содержащей три элементарных предложения X_1, X_2, X_3. В этом случае таблица имеет 8 строк: всевозможных наборов значений предложений X_1, X_2 имеется 4, и каждый из них может сочетаться с двумя значениями предложения X_3. (Можно доказать, что для произвольного n число всевозможных наборов истинностных значений предложений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равно 2^n.) При составлении истинностных таблиц удобно располагать наборы значений элементарных предложений («слова» из букв *И*, *Л*) в *лексикографическом порядке*, т. е. так, как располагают слова в обычных словарях (так мы поступали и при $n = 2$). Для формулы $\neg(X_2 \vee \neg X_1) \to X_1 \,\&\, X_3$ при лексикографическом расположении строк получаем следующую таблицу:

X_1	X_2	X_3	$\neg(X_2 \vee \neg X_1) \to X_1 \,\&\, X_3$
И	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*И*
И	*Л*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*	*И*
Л	*Л*	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*	*И*

Последний столбец можно заполнить, выполнив для каждой строки непосредственное «вычисление». Можно, однако, значительно упростить эту процедуру, если заметить, во-первых, что если предложения X_1 и X_3 оба истинны, то наша импликация имеет истинное заключение и потому истинна, и, во-вторых, что если X_2 истинно или X_1 ложно, то импликация также истинна, так как имеет ложную посылку. Остается произвести непосредственное «вычисление» для одной строки — той, где X_1 истинно, а X_2 и X_3 ложны.

Задача. Составить истинностные таблицы для формул:

(а) $\neg(\neg X_2 \vee X_2)$;
(б) $(X_1 \,\&\, X_2) \vee X_3$;
(в) $(X_1 \to \neg X_2) \to \neg(X_1 \vee X_2) \,\&\, \neg X_3$;
(г) $(X_1 \to X_2) \,\&\, (\neg X_3 \to \neg X_3)$;
(д) $\neg((X_2 \to (X_3 \to X_1)) \to X_3 \vee X_1 \,\&\, X_2)$.

2. Нетрудно заметить, что две разных формулы логики предложений могут иметь один и тот же смысл, т. е. быть синонимичными. Рассмотрим, например, предложения $A =$ «Неверно, что Иванов и Петров — оба студенты» и $B =$ «По крайней мере один из двоих — Иванов или Петров — не студент». Ясно, что эти предложения означают одно и то же. Введя элементарные предложения $X =$ «Иванов студент» и $Y =$ «Петров студент», мы можем записать A и B в виде $\neg(X \,\&\, Y)$

и $\neg X \vee \neg Y$ соответственно. Теперь легко понять, почему A и B синонимичны — составив истинностные таблицы для соответствующих формул, мы видим, что эти таблицы совпадают:

X	Y	$\neg(X \,\&\, Y)$	$\neg X \vee \neg Y$
И	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*	*И*

(Здесь две таблицы самоочевидным образом сведены в одну.)

Ясно, что предложения, выражаемые этими формулами, останутся синонимичными, если взять в качестве X и Y любые другие предложения, так что мы имеем здесь дело, в сущности, с синонимией не предложений, а формул; эта синонимия имеет логическую природу — она обусловлена свойствами логических операций.

Замечание. Рассматривая предложения A и B как «совпадающие по смыслу», мы, строго говоря, допустили неточность. Эти предложения вполне равнозначны лишь с точки зрения истинности/ложности, смыслы же их совпадают не до конца: тот, кто произносит предложение A, предполагает, что у его собеседника возникло или может возникнуть мнение, что Иванов и Петров — оба студенты, и он делает акцент на опровержении этого мнения, в то время как в предложении B такой смысловой оттенок отсутствует. (Еще нагляднее это различие видно на примере более простых предложений «Иванов студент» и «Неверно, что Иванов не студент».) Такие предложения — равнозначные с точки зрения истинностных значений — можно было бы назвать «логически синонимичными», в отличие от «полностью синонимичных» — абсолютно тождественных по смыслу. (Впрочем, в некоторых случаях логическая синонимия предложений, обусловленная синонимией формул, может приводить и к настоящей синонимии. Например, предложения «Лондон — столица Англии и Париж — столица Франции» и «Париж — столица Франции и Лондон — столица Англии» логически синонимичны — ввиду очевидной синонимии формул $X \,\&\, Y$ и $Y \,\&\, X$, — но они синонимичны и «на самом деле.») Так что нам не случайно пришлось в главе 3, говоря об отождествлении в логике синонимичных предложений, сказать, что они отождествляются лишь «как правило». Теперь мы можем уточнить это так: в логике синонимичные предложения отождествляются, если их синонимия не вызвана синонимией выражающих их формул логики предложений или логики предикатов.

Мы можем теперь сказать, что две формулы логики предложений синонимичны — или, как принято говорить, равносильны, — если их истинностные таблицы совпадают. Но нам удобно будет сформулировать определение равносильности еще и в несколько иной форме. Для этого нужно будет ввести новое понятие, которое важно и само по себе — понятие булевой функции.[1] Именно: *булева функция* — это функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, такая, что все независимые переменные пробегают двухэлементное множество $\{И, Л\}$ и все значения функции также принадлежат этому множеству.

Всякую булеву функцию можно, очевидно, задать с помощью таблицы точно такого же вида, как те истинностные таблицы, которые сопоставляются формулам. Например, таблица

X_1	X_2	$F(X_1, X_2)$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*

задает функцию двух переменных $F(X_1, X_2)$, такую, что $F(И, И) = И$, $F(И, Л) = Л$, $F(Л, И) = Л$, $F(Л, Л) = И$.

Если таблица, задающая булеву функцию F, совпадает с истинностной таблицей некоторой формулы, говорят, что эта формула *представляет* (или *задает*, или *реализует* функцию F.

Например, только что упомянутая функция $F(X_1, X_2)$ представляется, как легко проверить, формулой $(X_1 \to X_2) \mathbin{\&} (X_2 \to X_1)$. (Для проверки можно, конечно, непосредственно «вычислить» истинностное значение формулы для каждой строки таблицы, но проще заметить, что каждая из двух входящих в нее импликаций ложна тогда и только тогда, когда ее посылка истинна, а заключение ложно, и, следовательно, их конъюнкция истинна, когда значения X_1 и X_2 одинаковы, и ложна, когда они различны.)

Естественно возникает вопрос: всякую ли булеву функцию можно представить формулой? Ответ на него — положительный, но доказательство этого факта выходит за рамки нашей книги.

Теперь мы можем сформулировать определение равносильности так:

[1] В честь одного из создателей математической логики Джорджа Буля (George Boole, 1815—1864).

Две формулы логики предложений называются *равносильными*, если они представляют одну и ту же булеву функцию.

Для обозначения равносильности формул используется знак $\equiv$ (он уже знаком нам по главе 3).

Равносильными являются, например, формулы $\neg(X_1 \,\&\, X_2)$ и $\neg X_1 \vee \vee \neg X_2$: мы фактически доказали это выше, когда обсуждали пример с Ивановым и Петровым. (Мы писали там X вместо X_1 и Y вместо X_2, но это, разумеется, не имеет никакого значения.)

Другим примером могут служить формулы $(X_1 \vee X_2) \,\&\, X_3$ и $X_1 \,\&\, \&\, X_3 \vee X_2 \,\&\, X_3$, как показывают их истинностные таблицы:

X_1	X_2	X_3	$(X_1 \vee X_2) \,\&\, X_3$	$X_1 \,\&\, X_3 \vee X_2 \,\&\, X_3$
И	*И*	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*

Задачи. (1) Доказать, что:
(а) $X \to \neg Y \equiv Y \to \neg X$;
(б) $X \to (Y \to Z) \equiv X \,\&\, Y \to Z$.

(2) Равносильны ли формулы:
(а) $\neg(X \to Y)$ и $X \to \neg Y$?
(б) $(X \to Y) \to Z$ и $X \to (Y \to Z)$?
(в) $(X \to Y) \,\&\, (X \to Z)$ и $X \to Y \,\&\, Z$?
(г) $(X \to Y) \vee (X \to Z)$ и $X \to (Y \vee Z)$?

Равносильными могут быть и такие формулы, у которых множества входящих в них элементарных предложений не совпадают. Дело в том, что формула, содержащая, допустим, два элементарных предложения X_1 и X_2, представляет не только функцию двух переменных X_1, X_2, но и, например, функцию трех переменных X_1, X_2, X_3, такую, что при фиксированных значениях X_1 и X_2 ее значение не изменяется при изменении значения X_3.

Рассмотрим, например, функцию $C(X_1, X_2, X_3)$, заданную следующей таблицей:

X_1	X_2	X_3	$C(X_1, X_2, X_3)$
И	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*И*
И	*Л*	*И*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*Л*
Л	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*Л*

Когда X_1 и X_2 принимают значение *И*, эта функция также принимает значение *И* при обоих возможных значениях X_3; при остальных сочетаниях значений X_1 и X_2 она принимает значение *Л*, тоже независимо от значения X_3. Но нам известна формула, истинностное значение которой есть *И* при $X_1 = X_2 =$ *И* и *Л* при остальных наборах значений X_1 и X_2: это $X_1 \,\&\, X_2$. Таким образом, эта формула представляет нашу функцию $C(X_1, X_2, X_3)$. Но эта функция представляется также и формулой $X_1 \,\&\, X_2 \,\&\, X_3 \vee X_1 \,\&\, X_2 \,\&\, \neg X_3$, как легко проверить, построив для нее истинностную таблицу. Таким образом, формулы $X_1 \,\&\, X_2$ и $X_1 \,\&\, X_2 \,\&\, X_3 \vee X_1 \,\&\, X_2 \,\&\, \neg X_3$ равносильны.

Вот еще один пример такого рода: составив истинностную таблицу для формулы $(X_1 \to X_2) \,\&\, (X_1 \to \neg X_2)$, мы увидим, что она принимает значение *И*, когда X_1 ложно, и *Л*, когда X_1 истинно, каково бы ни было значение X_2. Следовательно, эта формула равносильна $\neg X_1$.

Задача. Доказать, что:
(а) $(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \,\&\, (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \equiv X_1 \vee X_2$;
(б) $(Y \to X) \,\&\, (\neg Y \to X) \equiv X$;
(в) $X \vee (X \,\&\, Y) \equiv X$;
(г) $(X \,\&\, Y \to Z) \,\&\, (X \,\&\, \neg Y \to Z) \equiv X \to Z$.

3. Пользуясь понятием равносильности, можно установить ряд простых, но очень важных свойств пропозициональных связок. До некоторой степени они похожи на свойства арифметических действий над числами, но еще больше — на свойства операций над множествами, которые были рассмотрены в главе 4. Все эти свойства имеют вид равносильностей и легко доказываются с помощью истинностных таблиц; их называют обычно *основными равносильностями логики предложений* или *основными свойствами пропозициональных связок*. Ради большей обозримости мы разобьем их на три группы.

В группу I войдут восемь соотношений, в которых участвуют только конъюнкция и дизъюнкция:

I_1. $X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$ (ассоциативность дизъюнкции).
I_2. $X \vee Y \equiv Y \vee X$ (коммутативность дизъюнкции).
I_3. $X \mathbin{\&} (Y \mathbin{\&} Z) \equiv (X \mathbin{\&} Y) \mathbin{\&} Z$ (ассоциативность конъюнкции).
I_4. $X \mathbin{\&} Y \equiv Y \mathbin{\&} X$ (коммутативность конъюнкции).
I_5. $X \mathbin{\&} (Y \vee Z) \equiv X \mathbin{\&} Y \vee X \mathbin{\&} Z$ (дистрибутивность конъюнкции по отношению к дизъюнкции).
I_6. $X \vee Y \mathbin{\&} Z \equiv (X \vee Y) \mathbin{\&} (X \vee Z)$ (дистрибутивность дизъюнкции по отношению к конъюнкции).
I_7. $X \vee X \equiv X$.
I_8. $X \mathbin{\&} X \equiv X$.

Группу II составляют три соотношения, в которых, кроме конъюнкции и дизъюнкции, участвует отрицание:

II_1. $\neg\neg X \equiv X$ («правило снятия двойного отрицания).

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{II}_2.\ \neg(X \vee Y) \equiv \neg X \mathbin{\&} \neg Y \\ \mathrm{II}_3.\ \neg(X \mathbin{\&} Y) \equiv \neg X \vee \neg Y \end{array}\right\} \text{(«законы Де Моргана»).}$$ [2]

Группа III состоит из трех соотношений, в которых участвует импликация:

III_1. $X \to Y \equiv \neg X \vee Y$.
III_2. $X \to Y \equiv \neg(X \mathbin{\&} \neg Y)$.
III_3. $X \to Y \equiv \neg Y \to \neg X$ («закон контрапозиции»).

Стоит заметить, что содержательный смысл соотношений группы III очень прост: предложение «Из X следует Y» означает то же, что каждое из двух предложений: «Или Y верно, или X неверно» (III_1) и «Невозможно, чтобы X было верно, а Y неверно» (III_2); если из верности X следует верность Y, то из неверности Y следует неверность X, и если из неверности Y следует неверность X, то из верности X следует верность Y (III_3).

Основные равносильности логики предложений позволяют производить *тождественные преобразования* формул, т. е. переходить от одних формул к другим, равносильным, подобно тому, как производятся тождественные преобразования в элементарной алгебре. В частности: ввиду соотношений I_1 и I_3 в выражениях вида $X \vee (Y \vee Z)$, $X \mathbin{\&} (Y \mathbin{\&} Z)$ и т. п. можно опускать скобки (фактически мы это несколько раз уже делали); соотношения I_2 и I_4 дают возможность переставлять члены

[2] В честь одного из создателей математической логики Августа Де Моргана (Augustus De Morgan, 1806—1871).

в дизъюнкциях и конъюнкциях, соотношение I_5 — раскрывать скобки. Кроме того, всякую импликацию можно, пользуясь соотношением III_1 или III_2, выразить через дизъюнкцию и отрицание или через конъюнкцию и отрицание; соотношения II_2 и II_3 позволяют «загонять внутрь» отрицание, стоящее перед дизъюнкцией или конъюнкцией (причем дизъюнкция заменяется конъюнкцией, а конъюнкция — дизъюнкцией); соотношение II_1 позволяет вычеркивать двойные отрицания.

С помощью тождественных преобразований всякую формулу логики предложений можно привести к некоторому особенно простому виду. Именно, если мы, пользуясь соотношениями группы III, устраним все импликации, а также устраним двойные отрицания (если они есть), а затем все оставшиеся отрицания, насколько можно, «загоним внутрь», вычеркивая «по дороге» вновь возникающие двойные отрицания, то мы получим формулу, не содержащую импликаций и притом такую, в которой знаки отрицания, если они есть, стоят только перед элементарными предложениями. Если в этой формуле раскрыть все скобки, т. е. произвести формальное «умножение» (считая дизъюнкцию аналогом суммы, а конъюнкцию — аналогом произведения) то получится дизъюнкция, члены которой представляют собой либо конъюнкции, каждая из которых состоит только из элементарных предложений, имеющих или не имеющих перед собой знаки отрицания, либо просто элементарные предложения с отрицаниями или без них — подобно тому, как в элементарной алгебре всякое выражение, составленное из букв и чисел с помощью знаков сложения и умножения, раскрытием скобок можно превратить в сумму произведений букв и чисел. (При этом возможны также «дизъюнкции из одного члена».) Такие формулы принято называть *формулами в дизъюнктивной нормальной форме*, а последовательность тождественных преобразований, в результате которых получается такая формула — *приведением к дизъюнктивной нормальной форме.*

Пример.

$$X \mathbin{\&} \neg Y \vee Z \to \neg(X \to \neg Z) \equiv \tag{1}$$
$$\equiv X \mathbin{\&} \neg Y \vee Z \to \neg\neg(X \mathbin{\&} \neg\neg Z) \equiv \tag{2}$$
$$\equiv X \mathbin{\&} \neg Y \vee Z \to X \mathbin{\&} Z \equiv \tag{3}$$
$$\equiv \neg(X \mathbin{\&} \neg Y \vee Z) \vee X \mathbin{\&} Z \equiv \tag{4}$$
$$\equiv \neg(X \mathbin{\&} \neg Y) \mathbin{\&} \neg Z \vee X \mathbin{\&} Z \equiv \tag{5}$$
$$\equiv (\neg X \vee \neg\neg Y) \mathbin{\&} \neg Z \vee X \mathbin{\&} Z \equiv \tag{6}$$
$$\equiv (\neg X \vee Y) \mathbin{\&} \neg Z \vee X \mathbin{\&} Z \equiv \tag{7}$$
$$\equiv \neg X \mathbin{\&} \neg Z \vee Y \mathbin{\&} \neg Z \vee X \mathbin{\&} Z. \tag{8}$$

Здесь при переходе от формулы (1) к формуле (2) импликация выражается через конъюнкцию и отрицание, при переходе к формуле (3) устраняются двойные отрицания, при переходе к формуле (4) импликация выражается через дизъюнкцию и отрицание, при переходе к формуле (5) отрицание дизъюнкции заменяется конъюнкцией отрицаний, при переходе к формуле (6) отрицание конъюнкции заменяется дизъюнкцией отрицаний, при переходе к формуле (7) еще раз устраняется двойное отрицание и при переходе к формуле (8) раскрываются скобки.

Задача. Привести к дизъюнктивной нормальной форме следующие формулы:

(а) $X \vee \neg Z \to Y \,\&\, Z$;
(б) $(X \to Y) \to (Y \to X)$;
(в) $\neg(X_1 \,\&\, \neg(X_2 \vee \neg X_3) \to X_1) \,\&\, X_2$;
(г) $\neg\neg\neg(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$.

4. Булева функция называется *тождественно истинной*, если для всех наборов значений независимых переменных она принимает значение *И*, и *тождественно ложной*, если для всех наборов значений независимых переменных принимает значение *Л*. Формула, представляющая тождественно истинную или тождественно ложную булеву функцию, также называется *тождественно истинной*, соответственно *тождественно ложной*.

Тождественно истинны, например, следующие формулы: $X \vee \neg X$, $\neg(X \,\&\, \neg X)$, $X \to X$; в самом деле, каждая из них при любом значении X принимает значение *И*. Точно так же ясно, что формулы $\neg(X \vee \neg X)$, $X \,\&\, \neg X$, $\neg(X \to X)$ тождественно ложны.

Примеры тождественно истинных формул, содержащих две переменных: $X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \neg Y \vee \neg X \,\&\, Y \vee \neg X \,\&\, \neg Y$; $(X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$. Читатель легко убедится в их тождественной истинности, составив для них истинностные таблицы.

Ясно, что все тождественно истинные формулы равносильны между собой, и всякая формула, равносильная тождественно истинной, сама тождественно истинна; то же верно для тождественно ложных формул. Очевидно также, что отрицание тождественно истинной формулы тождественно ложно, а отрицание тождественно ложной — тождественно истинно.

Тождественно истинные формулы играют в логике очень важную роль, поскольку они истинны вне зависимости от содержания входящих в них элементарных предложений. Иначе говоря, их истинность полностью обусловлена их логическим строением и не зависит от того, к какой предметной области они относятся. Сравним, например, два арифметических предложения: «Если натуральное число делится на 6, то оно делится на 3» и «Всякое натуральное число или делится на 3, или не делится». Оба они истинны, но истинность первого обусловлена законами арифметики, а истинность второго от этих законов не зависит: если мы для произвольного натурального числа x обозначим предложение «x делится на 3» через X, то наше предложение выразится тождественно истинной формулой $X \vee \neg X$, и полученное из этой формулы предложение останется истинным, если взять в качестве X любое другое предложение, не обязательно арифметическое.

Можно сказать, таким образом, что любая тождестенно истинная формула выражает некоторый *логический закон*. В частности, формула $X \vee \neg X$ выражает закон исключенного третьего, а формула $\neg(X \,\&\, \neg X)$ — закон противоречия (см. гл. 1).

5. К указанным выше основным равносильностям мы можем теперь добавить несколько новых; их особенностью будет то, что некоторые из участвующих в них предложений предполагаются тождественно истинными или тождественно ложными. В этих соотношениях буква R будет обозначать произвольную тождественно истинную формулу, F — произвольную тождественно ложную и X — произвольное предложение.

IV_1. $X \vee R \equiv R$. IV_2. $X \vee F \equiv X$.
IV_3. $X \,\&\, R \equiv X$. IV_4. $X \,\&\, F \equiv F$.
IV_5. $X \to R \equiv R$. IV_6. $F \to X \equiv R$.

Доказываются эти соотношения очень просто. Например: если X принимает значение *И*, то, поскольку R всегда имеет значение *И*, $X \,\&\, R$ тоже принимает значение *И*; если же X принимает значение *Л*, то и $X \,\&\, R$ принимает значение *Л*. Аналогично: каково бы ни было X, импликация $F \to X$ принимает значение *И*, поскольку импликация ложна лишь тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно. Остальные равносильности читатель докажет сам.

Соотношение IV_6 выражает так называемое *правило Дунса Скота*[3]: из лжи следует все, что угодно (по-латыни ex falso quodlibet).

Соотношения IV_{1-6} во многих случаях позволяют упрощать формулы, т. е. находить для них равносильные формулы более простого вида. Именно, в силу $\mathrm{IV}_{2,3}$ в дизъюнкциях можно вычеркивать тождественно

[3] Иоанн Дунс Скот (Johannes Duns Scotus, 1265—1308) — один из крупнейших средневековых философов и богословов, монах-францисканец, родом из Шотландии.

ложные члены, а в конъюнкциях — тождественно истинные; в то же время тождественную истинность или тождественную ложность формулы нередко удается установить с помощью соотношений $\mathrm{IV}_{1,4,5,6}$ и законов исключенного третьего и противоречия. Кроме того, ввиду соотношений $\mathrm{I}_{7,8}$ в конъюнкциях и дизъюнкциях можно вычеркивать повторяющиеся члены.

Например, формула $(\neg(X \,\&\, \neg X \to Y) \vee X) \,\&\, (Y \vee Z \vee \neg Z)$ равносильна X, поскольку: а) импликация $X \,\&\, \neg X \to Y$ тождественно истинна (в силу IV_6 и тождественной ложности формулы $X \,\&\, \neg X$), так что дизъюнкция $\neg(X \,\&\, \neg X \to Y) \vee X$ равносильна X (в силу IV_2); б) дизъюнкция $Y \vee Z \vee \neg Z$ тождественно истинна (в силу закона исключенного третьего и IV_1), так что конъюнкция $X \,\&\, (Y \vee Z \vee \neg Z)$ равносильна X (в силу IV_3). Другой пример: формула $(X \vee Y \vee X) \,\&\, (X \vee Y)$ равносильна $X \vee Y$ в силу I_7 и I_8.

Задачи. (1) Упростить формулы:
(а) $(\neg X \vee \neg Z \vee X \vee Y) \,\&\, (X \vee \neg Z \vee X \vee Y) \,\&\, (X \vee \neg Z \vee Z \vee Y)$;
(б) $X \to (Y \,\&\, \neg Y \to Z)$;
(в) $(X_1 \to (X_2 \to \ldots (X_n \to Y \ \vee \neg Y) \ldots)) \,\&\, Z$.

(2) Вывести соотношения, аналогичные IV_5 и IV_6, с левыми частями $R \to X$ и $X \to F$.

Глава 7. Начала логики предикатов

1. В этой главе мы займемся свойствами операций над предикатами и выражений, образованных с помощью этих операций, т. е. формул логики предикатов. При этом мы имеем в виду только такие свойства, которые не зависят от природы входящих в формулы элементарных предикатов.[1] Поэтому в этой главе мы будем считать, что входящие в формулы знаки элементарных предикатов могут обозначать *любые* предикаты от сответствующих переменных; нам будет удобно, таким образом, говорить, что в формулы входят не предикаты, а символы предикатов — иначе, *предикатные символы* — от некоторых переменных и что эти предикатные символы можно *замещать* любыми конкретными предикатами от тех же переменных. (Фактически предикатные символы

[1] Свойства, зависящие от природы элементарных предикатов, относятся не к логике, а к тем предметным областям, которые описываются этими предикатами. Например, истинность предложения $\forall x \forall y \forall z (A(x,y) \,\&\, A(y,z) \to A(x,z))$, где $A(x,y)$ — определенный на множестве действительных чисел предикат, означающий $x < y$, есть факт арифметики, а не логики.

суть переменные, значениями которых служат предикаты — «предикатные переменные», в отличие от «предметных переменных», от которых предикаты зависят.) Предикатные символы могут быть *одноместными*, *двуместными*, *трехместными* и т. д.

При замещении предикатных символов конкретными предикатами замкнутая формула превращается в предложение, а незамкнутая — в предикат, зависящий от входящих в нее свободных переменных.

Примеры. (1) Формула $\forall x \exists y F(x, y)$ содержит один двуместный предикатный символ $F(x, y)$. При замещении его предикатом, определенным на множестве натуральных чисел и означающим $x < y$, формула превращается в истинное предложение «Для любого натурального числа существует натуральное число, которое больше него», при замещении предикатом, определенным на том же множестве и означающим $x > y$, — в ложное предложение «Для любого натурального числа существует натуральное число, которое меньше него», при замещении предикатом, определенным на множестве людей и означающим «y — мать x'а», — в истинное предложение «У любого человека есть или была мать», при замещении предикатом, определенным на том же множестве и означающим «y — сын x'а», — в ложное предложение «У любого человека есть или был сын».

(2) Если в формуле $\neg\exists x A(x, y) \to \neg B(y)$ заместить двуместный предикатный символ $A(x, y)$ предикатом, определенным на множестве людей и означающим «x заставляет y'а умываться по утрам», а одноместный предикатный символ $B(x)$ — предикатом, определенным на том же множестве и означающим «x умывается по утрам», эта формула превращается в одноместный предикат от переменной y, означающий «Если никто не заставляет y'а умываться по утрам, он этого не делает» (для некоторых y'ов значение этого предиката есть *И*, для некоторых — *Л*). Та же формула при замещении символа $A(x, y)$ предикатом, в котором x пробегает множество изучаемых в школе учебных предметов и y — множество людей, означающим «человек y знает предмет x», и символа $B(x)$ — предикатом, определенным на множестве людей и означающим «x может быть учителем в школе», превращается в предикат, означающий «Если y не знает ни одного учебного предмета, он не может быть учителем в школе» (очевидно, тождественно истинный).

(3) Формула $\forall x \forall y \forall z(A(x, y) \,\&\, A(y, z) \to A(x, z))$ при замещении предикатного символа $A(x, y)$ предикатом, определенным на множестве людей и означающим «x старше y'а», превращается в истинное предложение «Каковы бы ни были люди x, y, z, если x старше y'а и y старше z'а,

то x старше z'а», а при замещении предикатом, означающим «x знаком с y'ом» — в ложное предложение «Каковы бы ни были люди x, y, z, если x знаком с y'ом и y знаком с z'ом, то x знаком с z'ом».

(4) Рассмотрим формулу $\forall x \forall y \forall z \forall t(S(x,y,z) \mathbin{\&} S(y,x,t) \rightarrow E(z,t))$. Если заместить в ней символы $S(x,y,z)$ и $E(x,y)$ предикатами, определенными на множестве действительных чисел и означающими соответственно $x+y=z$ и $x=y$, получится истинное предложение «Сумма двух чисел не изменяется при перестановке слагаемых», а если взять вместо $x+y=z$ предикат $x-y=z$ — ложное предложение «Разность двух чисел не изменяется при перемене местами уменьшаемого и вычитаемого».

2. В логике предложений главным рабочим инструментом было у нас понятие равносильности формул. Аналогичное понятие можно ввести и в логике предикатов. Именно, две незамкнутые формулы логики предикатов называются *равносильными*, если при любом замещении входящих в них предикатных символов конкретными предикатами они превращаются в один и тот же предикат, а две замкнутые — если при любом таком замещении они превращаются в предложения, имеющие одинаковые истинностные значения.

Для обозначения равносильности формул логики предикатов используется тот же знак $\equiv$, что и в логике предложений.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. $\neg(F(x) \mathbin{\&} G(x)) \equiv \neg F(x) \vee \neg G(x)$.

В самом деле, если мы заместим F и G произвольными одноместными предикатами F_0 и G_0, а затем дадим переменной x произвольное значение x_0, то формула $\neg(F(x) \mathbin{\&} G(x))$ превратится в предложение $\neg(F_0(x_0) \mathbin{\&} G_0(x_0))$, а формула $\neg F(x) \vee \neg G(x)$ — в предложение $\neg F_0(x_0) \vee \neg G_0(x_0)$; но истинностные значения этих предложений совпадают. Таким образом, значения предикатов $\neg(F_0(x) \mathbin{\&} G_0(x))$ и $\neg F_0(x) \vee \neg G_0(x)$ совпадают при любых значениях x, — иначе говоря, это не разные предикаты, а один и тот же предикат. (Напомним, что предикат — частный случай функции, а функции совпадают, если совпадают их области определения и совпадают их значения при любых значениях независимой переменной.)

Замечание. Проведенное только что рассуждение было основано на том, что формулы $\neg(F(x) \mathbin{\&} G(x))$ и $\neg F(x) \vee \neg G(x)$ получаются из равносильных формул логики предложений $\neg(X \mathbin{\&} Y)$ и $\neg X \vee \neg Y$ заменой элементарных предложений X и Y формулами $F(x)$ и $G(x)$. Точно такое же рассуждение можно провести для любой пары равносильных формул логики предложений, в которых элементарные предложения заменены какими-либо формулами логики предикатов. Таким образом: если в равносильных формулах логики предложений заменить каждое элементарное предложение какой-либо формулой логики предикатов, то полученные при этом формулы логики предикатов будут равносильны.

Пример 2. $\forall x(F(x) \,\&\, G(x)) \equiv \forall x F(x) \,\&\, \forall x G(x)$.

В самом деле: обе эти формулы замкнуты, и первая из них при замещении $F(x)$ и $G(x)$ конкретными предикатами $F_0(x)$ и $G_0(x)$ превращается в истинное предложение в том и только том случае, когда предикат $F_0(x) \,\&\, G_0(x)$ тождественно истинен; но этот предикат тождественно истинен тогда и только тогда, когда тождественно истинны оба предиката $F_0(x)$ и $G_0(x)$ — иначе говоря, когда истинны предложения $\forall x F_0(x)$ и $\forall x G_0(x)$, или, еще иначе, когда истинна их конъюнкция, в которую как раз и превратилась наша вторая формула.

Пример 3. Формулы $\exists x(F(x) \,\&\, G(x))$ и $\exists x F(x) \,\&\, \exists x G(x)$ не равносильны.

Чтобы убедиться в этом, достаточно найти *одно* замещение $F(x)$ и $G(x)$ конкретными предикатами, при котором одна из наших формул превратилась бы в истинное предложение, а другая — в ложное. Но если заместить F и G предикатами, определенными на множестве натуральных чисел и означающими соответственно «x четно» и «x нечетно», то первая формула превратится в ложное предложение «Существует натуральное число, являющееся одновременно четным и нечетным», а вторая — в истинное предложение «Существуют как четные, так и нечетные натуральные числа».

Пример 4. $\exists x(F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$.

В самом деле: первая формула при замещении $F(x)$ и $G(x)$ конкретными предикатами $F_0(x)$ и $G_0(x)$ превращается в ложное предложение в том и только том случае, когда предикат $F_0(x) \vee G_0(x)$ тождественно ложен; но этот предикат тождественно ложен тогда и только тогда, когда тождественно ложны оба предиката $F_0(x)$ и $G_0(x)$ — иначе говоря, когда ложны предложения $\exists x F_0(x)$ и $\exists x G_0(x)$, или, еще иначе, когда ложна их дизъюнкция, в которую превратилась вторая формула.

Пример 5. Формулы $\forall x(F(x) \vee G(x))$ и $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ не равносильны.

Читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно, подобрав подходящее замещение (как в примере 3).

Пример 6. Формулы $\forall x \exists y F(x,y)$ и $\exists y \forall x F(x,y)$ не равносильны.

Действительно, если заместить предикатный символ $F(x,y)$ предикатом, определенным на множестве натуральных чисел и означающим $x < y$, то первая формула превратится в истинное предложение «Для любого натурального числа существует натуральное число, которое больше него» (ср. пример (1) в начале главы), а вторая — в ложное предложение «Существует натуральное число, которое больше всех натуральных чисел».

Задачи.

(1) (а) Доказать, что $\forall x \exists y (F(x) \,\&\, G(y)) \equiv \exists y \forall x (F(x) \,\&\, G(y))$.

(б) То же с заменой $\&$ на $\vee$.

(2) (а) Равносильны ли формулы

$$\forall x (F(x) \to G(x)) \quad \text{и} \quad \forall x F(x) \to \forall x G(x)?$$

(б) То же с заменой $\forall$ на $\exists$.

3. Как нам известно из предыдущей главы, в логике предложений имеется простой способ, позволяющий для любых двух формул узнать, равносильны ли они: достаточно сравнить их истинностные таблицы. В логике предикатов подобного способа нет, и было бы бесполезно пытаться его найти: *доказано*, что не существует никакого универсального метода, который позволял бы «механически», с помощью одних и тех же четко определенных правил, для любых двух формул логики предикатов выяснять, являются ли они равносильными.[2] Поэтому равносильность приходится в разных случаях доказывать по-разному, и это может оказаться совсем не просто. Но для некоторых важных частных случаев все-таки есть простые способы доказательства равносильности. Иногда удается, например, воспользоваться средствами логики предложений (см. выше, пример 1 предыдущего пункта и замечание к нему). В ряде других случаев можно пользоваться свойствами кванторов. Вот наиболее важные из этих свойств (их часто называют *основными равносильностями логики предикатов*). Мы разделим их на четыре группы:

Группа I: перестановка одноименных кванторов.

I_1. $\forall x \forall y F(x,y) \equiv \forall y \forall x F(x,y)$.
I_2. $\exists x \exists y F(x,y) \equiv \exists y \exists x F(x,y)$.

---

[2] Точная формулировка и доказательство этого утверждения относятся к теории алгоритмов.

Для доказательства соотношения I_1 достаточно заметить, что при замещении предикатного символа F любым двуместным предикатом как левая, так и правая его части превращаются в истинные предложения тогда и только тогда, когда этот предикат тождественно истинен. В случае соотношения I_2 можно рассуждать аналогично. $\square$

Группа II: связь между разноименными кванторами.

II_1. $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$.
II_2. $\neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$.

Докажем соотношение II_1. Заместим предикатный символ F произвольным одноместным предикатом F_0. Если предложение $\neg\forall x F_0(x)$ истинно, то предложение $\forall x F_0(x)$ ложно; следовательно, предикат F_0 не является тождественно истинным и, стало быть, предикат $\neg F_0$ не является тождественно ложным, т. е. для какого-то значения переменной x он принимает значение *И*, так что $\exists x \neg F(x)$ — истинное предложение. С другой стороны, если предложение $\neg\forall x F_0(x)$ ложно, то $\forall x F_0(x)$ истинно; поэтому предикат $F_0(x)$ тождественно истинен, а $\neg F_0(x)$ тождественно ложен, так что $\exists x \neg F_0(x)$ — ложное предложение. $\square$

Соотношение II_2 доказывается аналогично; читателю будет очень полезно попытаться провести это доказательство самому.

Замечание. Если некоторый одноместный предикат $P(x)$ определен на конечном множестве $\{a_1, \ldots a_n\}$, то $\forall x P(x)$ означает то же, что $P(a_1) \,\&\, \ldots \,\&\, P(a_n)$, а $\exists x P(x)$ — то же, что $P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_n)$. В общем случае кванторы общности и существования можно понимать как «бесконечную конъюнкцию» и «бесконечную дизъюнкцию». Тогда соотношения группы II оказываются обобщениями на «бесконечный случай» законов Де Моргана.

Группа III: вынесение кванторов за скобки.

Для произвольной формулы Φ, не содержащей свободных вхождений переменной x, справедливы соотношения:

III_1. $\Phi \,\&\, \forall x F(x) \equiv \forall x(\Phi \,\&\, F(x))$.
III_2. $\Phi \vee \forall x F(x) \equiv \forall x(\Phi \vee F(x))$.
III_3. $\Phi \,\&\, \exists x F(x) \equiv \exists x(\Phi \,\&\, F(x))$.
III_4. $\Phi \vee \exists x F(x) \equiv \exists x(\Phi \vee F(x))$.

Мы докажем только первое из этих соотношений; остальные доказываются более или менее аналогично (хотя не все аналогии очевидны). При этом мы проведем доказательство только для случая, когда формула Φ замкнута, т. е. вообще не содержит свободных переменных. В общем случае доказательство строится так же, но добавляются некоторые технические усложнения, которые мы опускаем, чтобы сделать более ясной общую идею.

Итак, пусть Φ — замкнутая формула. Заместим символ F произвольным одноместным предикатом F_0 и все предикатные символы, входящие в Φ, — произвольными предикатами соответствующей вместимости; формула Φ превратится при этом в некоторое предложение Φ_0. Тогда, если предложение $\Phi_0 \,\&\, \forall x F_0(x)$ истинно, то истинны оба предложения Φ_0 и $\forall x F_0(x)$; из истинности $\forall x F_0(x)$ следует, что предикат $F_0(x)$ тождественно истинен; поэтому предикат $\Phi_0 \,\&\, F_0(x)$ также тождественно истинен, так что $\forall x(\Phi_0 \,\&\, F_0(x))$ — истинное предложение. С другой стороны, если $\Phi_0 \,\&\, \forall x F_0(x)$ ложно, то ложно либо Φ_0, либо $\forall x F_0(x)$; в первом случае $\Phi_0 \,\&\, F_0(x)$ — тождественно ложный предикат, во втором — предикат $F_0(x)$ не тождественно истинен, и, стало быть, не тождественно истинен также и предикат $\Phi_0 \,\&\, F_0(x)$. В обоих случаях предложение $\forall x(\Phi_0 \,\&\, F_0(x))$ ложно. □

Группа IV: переименование связанных переменных.

IV_1. $\forall x F(x) \equiv \forall y F(y)$.
IV_2. $\exists x F(x) \equiv \exists y F(y)$.

Эти соотношения следуют из того, что, как было отмечено еще в главе 5 (с. 47), предложения $\forall x F_0(x)$ и $\forall y F_0(y)$ имеют одинаковые истинностные значения, каков бы ни был предикат F_0, и то же самое верно для $\exists x F_0(x)$ и $\exists y F_0(y)$.

Во всех выведенных сейчас равносильностях вместо x и y можно, разумеется, брать любые другие переменные.

4. С помощью основных равносильностей логики предложений и логики предикатов можно производить в логике предикатов *тождественные преобразования* аналогично тому, как это делается в логике предложений.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $\forall x(F(x) \to \exists y G(x,y)) \equiv \forall x(\neg F(x) \vee \exists y G(x,y)) \equiv$
$\equiv \forall x \exists y(\neg F(x) \vee G(x,y)) \equiv \forall x \exists y(F(x) \to G(x,y))$.

Здесь на первом шаге импликация выражается через дизъюнкцию и отрицание, на втором из дизъюнкции выносится за скобки квантор существования по y (это можно сделать, поскольку формула $\neg F(x)$ не содержит свободных вхождений y), и на третьем восстанавливается импликация.

Пример 2. $\neg\forall x\neg F(x)\,\&\,\neg\forall x G(x) \equiv \exists x\neg\neg F(x)\,\&\,\exists x\neg G(x) \equiv$
$\equiv \exists x F(x)\,\&\,\exists y\neg G(y) \equiv \exists x(F(x)\,\&\,\exists y\neg G(y)) \equiv$
$\equiv \exists x\exists y(F(x)\,\&\,\neg G(y))$.

Здесь на первом шаге дважды применяется соотношение II_1, на втором устраняется двойное отрицание и одновременно связанная переменная x в формуле $\exists x\neg G(x)$ переименовывается в y, на третьем выносится за скобки квантор по x и на четвертом — квантор по y. (Переименование переменной необходимо для того, чтобы можно было выносить кванторы за скобки.)

Пример 3. $\neg\exists x\forall y F(x,y) \vee \forall x G(x) \equiv$
$\equiv \forall x\neg\forall y F(x,y) \vee \forall z G(z) \equiv \forall x\exists y\neg F(x,y) \vee \forall z G(z) \equiv$
$\equiv \forall x\exists y(\neg F(x,y) \vee \forall z G(z)) \equiv$
$\equiv \forall x\exists y\forall z(\neg F(x,y) \vee G(z))$.

Здесь на первом шаге применяется соотношение II_2 и одновременно связанная переменная x в формуле $\forall x G(x)$ переименовывается в z, на втором применяется соотношение II_1, на третьем выносятся за скобки кванторы по x и по y и на четвертом — квантор по z.

В каждом из приведенных примеров результатом преобразования является формула, в которой все кванторы «вынесены вперед» — иначе говоря, формула, начинающаяся с «кванторной приставки» (или «префикса»), за которой следует бескванторная формула. Такие формулы называют формулами в *префиксной нормальной форме* (сокращенно *п. н. ф.*). Нетрудно понять, что к п. н. ф. можно привести любую формулу логики предикатов.

Пример 4. $\neg\forall x\exists y\forall z(L(x,z) \to C(y,z)) \equiv$
$\equiv \exists x\neg\exists y\forall z(L(x,z) \to C(y,z)) \equiv$
$\equiv \exists x\forall y\neg\forall z(L(x,z) \to C(y,z)) \equiv$
$\equiv \exists x\forall y\exists z\neg(L(x,z) \to C(y,z))$.

Здесь сначала применяется соотношение II_1, затем II_2 и еще раз II_1, после чего получается формула, в которой все кванторы заменены «противоположными», а отрицание стоит справа от кванторной приставки. Таким способом можно, очевидно, образовать отрицание любой формулы в префиксной нормальной форме.

Пример 4 (продолжение). Преобразуя последнюю формулу дальше (выражая импликацию через конъюнкцию и отрицание и устраняя двойное отрицание), получаем формулу $\exists x\forall y\exists z(L(x,z)\,\&\,\neg C(y,z))$.

Пусть, например, переменная x пробегает множество имеющихся в некотором городе предприятий, y — множество имеющихся в нем детских садов и z — множество его жителей. Заместим предикатные символы $L(x,z)$ и $C(y,z)$ предикатами, означающими соответственно «z работает на преприятии x» и «Дети z'а могут посещать детский сад y». Тогда выражение, стоящее в исходной формуле под знаком отрицания, означает «Для каждого предприятия существует детский сад, который могут посещать дети всех его работников», а последняя формула (равносильная отрицанию этого выражения) означает «Существует такое предприятие, что, каков бы ни был детский сад, на этом предприятии есть работник, чьи дети его посещать не могут».

Задачи. (1) Привести к п. н. ф.:
(а) $\forall x F(x) \to \exists y G(x,y)$;
(б) $(\neg\forall x F(x,y) \to \exists y G(y,z))\, \&\, \neg\exists t H(t)$;
(в) $\neg\exists x(\neg\forall y \exists z F(x,y,z) \vee \neg\exists x G(x,y,z))$.

(2) Образовать отрицания формул, полученных в результате решения задачи 1.

5. В логике предикатов имеются также понятия, аналогичные понятиям тождественно истинной и тождественно ложной формулы логики предложений, хотя имена им здесь даются другие. Именно: формула логики предикатов называется *всюду истинной*, если при любом замещении входящих в нее предикатных символов конкретными предикатами она превращается в истинное предложение (если она замкнута) или в тождественно истинный предикат (если она не замкнута); формула логики предикатов называется *невыполнимой*, если при любом замещении входящих в нее предикатных символов конкретными предикатами она превращается в ложное предложение (если она замкнута) или в тождественно ложный предикат (если она не замкнута).

Вместо «всюду истинная» в литературе на русском языке часто используется неудачный термин «общезначимая» (возникший в результате неверного перевода немецкого *allgemeingültig*).

Формулу, не являющуюся невыполнимой, естественно назвать *выполнимой*.

Замечание. Из определений ясно, что: (а) всякая формула, равносильная всюду истинной формуле, сама всюду истинна, и то же верно для невыполнимых формул; (б) отрицание всюду истинной формулы невыполнимо, а отрицание невыполнимой всюду истинно; (в) формула Φ со свободной переменной x тогда и только тогда всюду истинна, когда всюду истинна формула $\forall x \Phi$, и тогда и только тогда выполнима, когда выполнима формула $\exists x \Phi$.

Подобно тождественно истинным формулам логики предложений, всюду истинные формулы логики предикатов выражают *логические законы*, т. е. «абсолютно истинные» предложения — истинные вне зависимости от того, какой смысл придается входящим в них предикатным символам. (Незамкнутая всюду истинная формула становится «абсолютно истинным» предложением, если связать все свободные переменные кванторами общности.)

Рассмотрим теперь несколько простых примеров.

Пример 1. Формула $F(x) \vee \neg F(x)$ всюду истинна. В самом деле, если заместить F произвольным одноместным предикатом F_0 и затем дать переменной x произвольное значение x_0, получится истинное (в силу закона исключенного третьего) предложение $F_0(x_0) \vee \neg F_0(x_0)$. Таким образом, при любом замещении символа F конкретным предикатом наша формула превращается в тождественно истинный предикат.

Пример 2. Формула $\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ также всюду истинна (см. замечание на предыдущей странице, пункт (в)).

Пример 3. Формула $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$ всюду истинна, т. к. для любого предиката F_0, для которого предложение $\forall x F_0(x)$ истинно, предложение $\exists x F_0(x)$ также истинно, а потому истинна и импликация $\forall x F_0(x) \to \exists x F_0(x)$, но она истинна и тогда, когда предложение $\forall x F_0(x)$ ложно.

Примеры 4, 5. Формула $\exists y \forall x F(x, y) \to \forall x \exists y F(x, y)$ всюду истинна. Действительно, если символ F замещен произвольным двуместным предикатом F_0, выражающим некоторое бинарное отношение, то посылка нашей импликации утверждает, что в области прибытия отношения имеется элемент, связанный этим отношением с *каждым* элементом области отправления, а заключение — что для каждого элемента области отправления существует — вообще говоря, свой — связанный с ним элемент области прибытия. Очевидно, из истинности посылки вытекает истинность заключения. В то же время при истинном заключении посылка может оказаться ложной; так будет, например, если $F_0(x, y)$ — предикат, определенный на множестве натуральных чисел и означающий $x < y$ (см. выше, пример 6 на с. 76). Поэтому обратная импликация $\forall x \exists y F(x, y) \to \exists y \forall x F(x, y)$ не является всюду истинной. Однако она выполнима: она превращается в истинное предложение, например, в случае, когда $F_0(x, y)$ — предикат, определенный на множестве целых отрицательных чисел и означающий по-прежнему $x < y$ (поскольку посылка в этом случае ложна).

Пример 6. Формула $\forall x \exists y F(x, y)$ также выполнима, но не всюду истинна. Читатель легко убедится в этом, рассмотрев те же предикаты, которые были использованы в предыдущем примере.

Примеры 7, 8. Формула $F(x) \mathbin{\&} \neg F(x)$ невыполнима: каким бы предикатом F_0 мы ни заместили символ F, предикат $F_0(x) \mathbin{\&} \neg F_0(x)$ будет тождественно ложен. Вместе с этой формулой невыполнима и формула $\exists x(F(x) \mathbin{\&} \neg F(x))$ (ср. выше пример 2).

Остается добавить, что никакого универсального метода проверки формулы на всюду-истинность или на выполнимость не существует; положение здесь таково же, как для равносильности (см. выше).

Задачи. (1) Показать, что следующие формулы всюду истинны:
(а) $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \to \forall x(F(x) \vee G(x))$;
(б) $\exists x(F(x) \mathbin{\&} G(x)) \to \exists x F(x) \mathbin{\&} \exists x G(x))$;
(в) $\exists x G(x, x) \to \exists y \exists z G(y, z)$.

(2) Показать, что импликации, обратные формулам задачи (1), выполнимы, но не являются всюду истинными.

(3) Показать, что следующие формулы выполнимы, но не являются всюду истинными:
(а) $\exists x F(x, y) \mathbin{\&} \exists x F(y, x)$;
(б) $\forall x F(x, y) \vee \forall x F(y, x)$.

(4) Показать, что следующие формулы невыполнимы:
(а) $\exists x((F(x) \to \neg F(x)) \mathbin{\&} (\neg F(x) \to F(x)))$;
(б) $\exists y \forall x F(x, y) \mathbin{\&} \forall x \exists y \neg F(y, x)$;
(в) $(G(x) \to G(y)) \mathbin{\&} \exists x G(x) \mathbin{\&} \exists x \neg G(x)$.

Часть III

Строение рассуждений

Глава 8. Теория доказательства: пропозициональные правила

1. После проделанной подготовительной работы мы можем теперь перейти к изучению строения рассуждений, что и является главной задачей нашего курса. В этой и следующих трех главах мы будем заниматься так называемыми *дедуктивными*[1] рассуждениями, состоящими в том, что из некоторых явно и четко сформулированных утверждений (называемых обычно *посылками*) выводятся другие так же четко сформулированные утверждения (*следствия*), причем вывод *абсолютно достоверен* в том смысле, что если мы уверены в истинности посылок, то мы в такой же степени можем быть уверены в истинности следствий.

Наиболее чистым примером дедуктивных рассуждений могут служить математические доказательства. Но сфера их использования далеко не исчерпывается математикой, хотя она и является единственной наукой, в которой *только* за такими рассуждениями признается доказательная сила. Дедуктивные рассуждения составляют неотъемлемую часть *любых* рассуждений, используемых в науках (как естественных, так и гуманитарных) и в практической деятельности. О том, каким образом дедуктивные рассуждения «вписываются» в рассуждения более общего вида, пойдет речь в главах 13 и 14; а сейчас нам надлежит изучить их строение.

Первая теория, имеющая целью описание строения дедуктивных рассуждений, была построена еще Аристотелем. (Мы познакомимся с ней в главе 11.) В течение многих веков считалось, что эта теория исчерпывающим образом описывает вообще любые рассуждения; недостаточность

[1] От латинского deductio — «выведение, вывод».

дедуктивных рассуждений была замечена лишь в Новое время, приблизительно в конце XVI—начале XVII в. (см. ниже главу 12). Вскоре ученые начали осознавать и недостаточность аристотелевской теории для описания самих дедуктивных рассуждений. Великий философ и математик Г. В. Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716) выдвинул идею построения «универсальной характеристики» (Characteristica universalis) — математизированной логической системы, которая могла бы служить не только для теоретического описания рассуждений, но и для их практического выполнения. Эта система должна была состоять из знаков, соответствующих мыслям, и правил оперирования с этими знаками, построенных таким образом, что всякий раз, когда некоторая мысль является следствием другой, знак первой получается из знака второй по этим правилам. Лейбниц мечтал о времени, когда философы вместо того, чтобы спорить, будут говорить: «Посчитаем!»

Сам Лейбниц не построил развернутой формально-логической системы, но под его влиянием мысль ученых начала работать в этом направлении. Первым серьезным успехом на этом пути было создание «алгебры логики», т. е. пропозициональной части символического языка, рассмотренного нами в главе 5. Основные идеи, которые легли в основу алгебры логики, впервые появились в опубликованных в 1847 г. работах А. де Моргана и Дж. Буля и были развиты рядом других исследователей в течение второй половины XIX в. А в 1879 г. вышла книга Г. Фреге (Gottlob Frege, 1848—1925) «Begriffsschrift» («Понятийная письменность») с подзаголовком «Формульный язык чистого мышления, построенный по образцу арифметического», где впервые была построена формальная логическая система, в которой не только предложения представляются в виде формул, подобно математическим выражениям, но и правила вывода следствий из посылок представляются в виде формальных операций, подобных математическим.[2] Впоследствии такие системы стали называть *логическими исчислениями.* Однако формализованный процесс вывода в исчислении Фреге и во всех других логических исчислениях, предлагавшихся разными авторами на протяжении нескольких последующих десятилетий, был мало похож на то, как на самом деле рассуждает человек даже в тех случаях, когда он проводит совершенно строгое доказательство — например, математическое. И только в 30-х гг. XX столетия Г. Генцен (Gerhard Gentzen, 1909—1945) построил *исчисление естественного*

[2] Фреге является также автором ряда других очень глубоких логических исследований, полностью сохраняющих свое значение и сейчас. Он же первый ввел в употребление истинностные таблицы и кванторы.

вывода, дающее строгое описание реального процесса дедуктивного рассуждения — иначе говоря, процесса доказательства. В математической логике исчисления «до-генценовского» типа[3] широко используются и в настоящее время, т. к. в чисто техническом аспекте они обладают некоторыми преимуществами. Но *теорию доказательства* как таковую принято излагать либо на основе исчисления естественного вывода, либо на основе другого построенного Генценом исчисления — *секвенциального*, так же хорошо (хотя и «менее непосредственно») описывающего реальный процесс рассуждения. Мы будем вести изложение на основе исчисления естественного вывода.

В заключение этого краткого исторического обзора необходимо заметить, что развитие математической логики, создатели которой в значительной мере вдохновлялись идеями Лейбница, не оправдало его надежд на замену рассуждений вычислениями. Прежде всего, не все рассуждения сводятся к дедуктивным (см. ниже, часть IV), а формализации и «математизации» поддаются только эти последние. Кроме того, дедуктивные рассуждения тоже не могут быть формализованы полностью: *доказано*, что даже в арифметике натуральных чисел можно сформулировать утверждения, являющиеся истинными, причем истинность их можно установить с помощью рассуждений, которые всякий математик должен признать настоящими доказательствами, но при этом такие, что ни в каком сколько-нибудь «разумном» логическом исчислении невозможен их формальный вывод из аксиом арифметики.[4] И, наконец, формальные выводы чрезвычайно громоздки, и поэтому даже в тех пределах, в которых формализация рассуждений возможна, она до сих пор остается — и, будем надеяться, останется дальше — только средством (хотя и важнейшим!) их *теоретического изучения*, а практически рассуждать каждый должен по-прежнему исключительно с помощью собственной головы.

2. В исчислении естественного вывода — как и во всяком логическом исчислении — основную роль играет *отношение выводимости*. Область отправления этого отношения состоит из конечных множеств формул

---

[3]Обычно их называют «исчислениями гильбертовского типа» по имени Д. Гильберта (David Hilbert, 1862—1943), в чьих работах эти исчисления приобрели ту форму, в которой они теперь используются.

[4]Этот факт составляет содержание так называемой теоремы Гёделя о неполноте арифметики, доказанной в 1931 г. К. Гёделем (Kurt Gödel, 1906—1979) с помощью очень глубоких и тонких соображений. Строгая формулировка теоремы Гёделя потребовала бы привлечения понятий, выходящих далеко за пределы возможного в рамках этой книги.

(т. е. предложений), а область прибытия — просто из формул. Выражение «Формула γ выводима из множества формул M» означает, что если все формулы, входящие в M (посылки), истинны, то формула γ также истинна, причем — и это здесь самое главное! — ее истинность можно вывести из истинности посылок по правилам исчисления (которые будут рассмотрены ниже). Вместо «Формула γ выводима из множества формул M» мы часто будем писать символически $M \vdash \gamma$.

Если множество M состоит из одной формулы α или из двух формул α, β, мы будем говорить просто «Формула γ выводима из формулы α», соответственно «из формул α, β» и писать $\alpha \vdash \gamma$, соответственно $\alpha, \beta \vdash \gamma$. (Аналогично будем поступать и тогда, когда M состоит из трех или более формул и задано их перечислением.) Если M пусто, мы вместо $\varnothing \vdash \gamma$ будем писать просто $\vdash \gamma$. Содержательно выводимость формулы из пустого множества означает, что она истинна и при этом ее истинность может быть доказана по правилам исчисления (без каких бы то ни было посылок). Формулы, выводимые из пустого множества, мы будем называть *доказуемыми*.

В этой и следующей главах мы будем рассматривать только «пропозициональную часть» исчисления естественного вывода, не затрагивая те его правила, которые связаны с кванторами. (Рассмотрение этих правил мы отложим до главы 10.) Поэтому слово «формула» будет здесь означать формулу логики предложений. Но теперь мы будем рассматривать формулы, которые наряду с пропозициональными переменными могут содержать также логическую константу *Л*, означающую «ложь» — подобно тому, как формулы элементарной алгебры наряду с переменными могут содержать символы постоянных чисел — 1, 2, $\sqrt{2}$ и т. п. (Можно было бы допустить также константу *И*, но технически удобнее писать вместо нее $\neg$*Л*.)

В дальнейшем мы будем обозначать формулы строчными греческими буквами, причем такая буква всегда будет означать *произвольную* формулу.

3. Точное описание процесса рассуждения означает прежде всего выявление тех элементарных «шагов», из которых он складывается. Генцену удалось найти простые и ясные формулировки правил, по которым производятся элементарные шаги рассуждения; именно эти правила лежат в основе исчисления естественного вывода. Сейчас мы с ними познакомимся (точнее, с теми из них, которые не связаны с кванторами).

Главную часть системы правил исчисления естественного вывода составляют *правила введения и удаления логических символов*. Каждой из шести рассмотренных нами в главе 5 логических операций отвечают два правила — правило введения и правило удаления символа этой операции. В настоящей главе мы будем иметь дело только с правилами, отвечающими пропозициональным связкам.

Правила введения и удаления нам будет удобно расположить в два столбца:

1) $\alpha, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta$
(*введение конъюнкции*);

2) $\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha$
$\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta$
(*удаление конъюнкции*);

3) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$
$\beta \vdash \alpha \vee \beta$
(*введение дизъюнкции*);

4) Если $M, \alpha \vdash \gamma$ и $M, \beta \vdash \gamma$,
то $M, \alpha \vee \beta \vdash \gamma$
(*удаление дизъюнкции*);

5) Если $M, \alpha \vdash \beta$, то $M \vdash \alpha \to \beta$
(*введение импликации*);

6) $\alpha,\ \alpha \to \beta \vdash \beta$
(*удаление импликации*);

7) Если $M, \alpha \vdash \text{Л}$, то $M \vdash \neg\alpha$
(*введение отрицания*);

8) $\alpha, \neg\alpha \vdash \text{Л}$
(*удаление отрицания*).

Сокращенно эти правила будут обозначаться ВК, УК, ВД, УД, ВИ, УИ, ВО, УО.

Кроме правил введения и удаления, исчисление содержит три *особых правила*:

9) $\text{Л} \vdash \beta$ (*правило Дунса Скота*, сокращенно ДС);

10) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (*закон исключенного третьего*, сокращенно ИТ);

11) Если $\beta \in M$, то $M \vdash \beta$ (*правило тривиальной выводимости*, сокращенно ТВ).

Подчеркнем, что, поскольку буквы α, β, γ обозначают *произвольные* формулы, все правила останутся справедливыми, если заменить эти буквы любыми другими буквами и вообще любыми формулами. Например, каждая из следующих выводимостей получается по правилу ВД: $\gamma \vdash \delta \vee \gamma$; $\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta \vee \gamma$; $\alpha \vdash \alpha \vee \alpha$. То же верно и для всех выводимостей, доказываемых ниже.

Поясним теперь содержательный смысл сформулированных правил. Как уже было сказано, по этим правилам производятся мельчайшие «элементарные шаги» дедуктивного рассуждения.

Первые три правила, а также пятое и шестое, настолько просты, что, пользуясь ими, мы этого практически никогда не замечаем: доказав два утверждения A и B, мы делаем из этого вывод, что истинно также утверждение «A и B» (введение конъюнкции); обратно, если доказано «A и B», мы делаем вывод, что истинно каждое из утверждений A, B по отдельности (удаление конъюнкции); если доказано хотя бы одно из утверждений A, B, отсюда выводится истинность утверждения «A или B» (введение дизъюнкции); если из A можно вывести B, то считается доказанным условное утверждение «Если A, то B» (введение импликации); обратно, из истинности условного утверждения и его посылки выводится истинность заключения (удаление импликации).[5]

Удаление дизъюнкции — это прием, известный под названием «доказательство разбором случаев»: если в какой-то ситуации (описываемой множеством предложений M) возможны два случая A и B (не обязательно взаимоисключающие), и в каждом из этих случаев удается доказать утверждение C, то это утверждение можно считать вообще доказанным для данной ситуации. Например, если мы доказали, что все целые числа, бо́льшие или равные нулю, обладают некоторым свойством, а затем доказали также, что этим свойством обладают все целые числа, меньшие или равные нулю, то мы можем считать доказанным, что данным свойством обладают вообще все целые числа.

Введение отрицания — это тот прием доказательства, который в старых учебниках математики назывался *приведением к нелепости* (по-латыни *reductio ad absurdum*): если, допустив, что (при условии M) утверждение A истинно, мы приходим к заведомо ложному выводу, то мы можем считать доказанным, что (при условии M) утверждение A ложно (т. е. что истинно его отрицание). Этот прием весьма часто используется не только в математике, но и в других науках (подробнее об этом см. ниже, в главе 13), а также и в обыденной жизни. Если, например, мне говорят: «Сегодня ночью был дождь», а я отвечаю: «Тогда земля была бы мокрая, но посмотри — она сухая, значит, дождя не было», я пользуюсь приведением к нелепости.

Предостережение. Приведение к нелепости не следует смешивать с доказательством от противного, представляющим собой более

[5] На способ рассуждения, получивший у Генцена имя удаления импликации, обратила внимание еще традиционная логика; там он назывался modus ponens (буквально «положительный способ», в противоположность «отрицательному способу», о котором см. ниже в настоящей главе). Под тем же традиционным названием он фигурирует обычно в логических исчислениях гильбертовского типа.

сложный способ рассуждения. (О нем мы мы будем говорить в следующей главе.)

Удаление отрицания — это не что иное, как закон противоречия, о котором мы говорили уже в главах 1 и 6.

Правило Дунса Скота на первый взгляд кажется менее очевидным, чем предыдущие правила, но в действительности даже люди, далекие от науки, интуитивно уверены в его справедливости. Когда кто-нибудь, желая показать, что убежден в ложности некоего утверждения, говорит: «Если это верно, то я китайский император», он пользуется правилом Дунса Скота. Именно в силу этого правила условное утверждение считается истинным, когда его посылка опровергнута (ср. те соображения, которыми мы обосновали в главе 5 определение импликации; см. также ниже в настоящей главе пример 11). В математических рассуждениях правило Дунса Скота часто используется при доказательстве разбором случаев: если, доказывая, что при некотором условии M справедиво утверждение C, мы рассматриваем различные случаи, и при этом оказывается, что с одним из них условие M несовместимо (т. е. из него в этом случае выводится заведомая ложь), то мы считаем, что и в этом случае C истинно при условии M. Например, утверждение «Все диагонали выпуклого многоугольника лежат целиком внутри него» (точнее: «Всякая внутренняя точка диагонали выпуклого многоугольника является внутренней точкой этого многоугольника») истинно, хотя некоторые выпуклые многоугольники (а именно, треугольники) не имеют диагоналей. (Условие M состоит здесь в том. что рассматриваемая точка является внутренней точкой некоторой диагонали данного многоугольника.) Еще один пример использования ДС в сочетании с разбором случаев см. ниже в этой главе (пример 12).

Закон исключенного третьего занимает в системе логических правил особое место; о его роли в рассуждениях мы будем говорить в следующей главе, а в этой будем рассматривать только такие выводы, в которых он не используется.

Что касается правила тривиальной выводимости, то это, собственно, не логическое, а *структурное* правило, играющее чисто техническую роль. В техническом аспекте очень удобно считать каждое утверждение выводимым из любого множества утверждений, в котором оно содержится (и, в частности, из самого себя).[6]

[6]На самом деле правило тривиальной выводимости можно свести к другим правилам, так что мы могли бы без него обойтись (именно так сделано в первоначальном изложении Генцена).

4. Процесс вывода изображается в исчислении естественного вывода не в виде последовательности шагов, расположенных «в одну линию», а в виде дерева. Как выглядит такое изображение, лучше всего уяснить себе на примерах.

Пример 1. Покажем, что $\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \beta \mathbin{\&} \alpha$.

Для этого построим следующую фигуру (*дерево вывода*):

$$3\;\dfrac{1\;\dfrac{\alpha \mathbin{\&} \beta}{\beta}\;\text{УК} \qquad 2\;\dfrac{\alpha \mathbin{\&} \beta}{\alpha}\;\text{УК}}{\beta \mathbin{\&} \alpha}\;\text{ВК}$$

В этой фигуре каждая горизонтальная черта отвечает одному шагу вывода. Слева от черты записан номер шага, справа — сокращенное название применяемого на этом шаге правила. Над чертой записаны формулы, к которым это правило применяется, под чертой — формула, получаемая в результате его применения. Самая нижняя формула (единственная, *под* которой нет черты), называется *корнем* дерева; самые верхние формулы (те, *над* которыми нет черты), называются *листьями*. Корень — это формула, получающаяся в результате данного вывода, листья — его посылки. (Точнее, множество листьев дерева есть множество посылок вывода. Дело в том, что дерево может иметь несколько одинаковых листьев, но в таком случае все они «считаются только один раз»; так, в рассмотренном примере множество листьев состоит из одной формулы $\alpha \mathbin{\&} \beta$, входящей в дерево дважды.)

Номера шагов и названия правил мы записываем только ради большей ясности, в принципе без них можно обойтись: какое правило применяется на том или ином шаге, всегда можно узнать по виду формул, стоящих над и под чертой, а номера служат просто метками, позволяющими в случае надобности ссылаться на тот или иной шаг. Нумерация шагов никоим образом не означает, что вывод должен производиться в задаваемом ею порядке: единственное условие, которому должен удовлетворять порядок шагов, состоит в том, что «нижний» шаг можно выполнять только после того, как выполнены все «верхние», от которых он зависит — т. е. те, которые расположены на «ветвях», «растущих» из черты, отвечающей этому шагу.

В дальнейшем мы часто — в очевидных случаях — будем опускать названия правил, а иногда и номера шагов.

Во всех следующих примерах мы вслед за выводимостью, которую хотим доказать, будем сразу рисовать дерево вывода, являющееся ее доказательством.

Пример 2. $\alpha,\ \alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma \vdash \gamma$.

$$2\ \dfrac{1\ \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ \text{УИ} \qquad\qquad \beta \to \gamma}{\gamma}\ \text{УИ}$$

Пример 3. $\alpha,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \gamma$.

$$3\ \dfrac{2\ \dfrac{1\ \dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ \text{ВД} \qquad \neg(\alpha \vee \beta)}{\text{Л}}\ \text{УО}}{\gamma}\ \text{ДС}$$

Пример 4. $\alpha \mathbin{\&} \beta \vee \gamma \to \delta,\ \alpha,\ \beta \vdash \delta$.

$$3\ \dfrac{2\ \dfrac{1\ \dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \mathbin{\&} \beta}\ \text{ВК}}{\alpha \mathbin{\&} \beta \vee \gamma}\ \text{ВД} \qquad\qquad \alpha \mathbin{\&} \vee\gamma \to \delta}{\delta}\ \text{УИ}$$

Пример 5. $(\alpha \mathbin{\&} \beta) \mathbin{\&} \gamma \vdash \alpha \mathbin{\&} (\beta \mathbin{\&} \gamma)$.

$$7\ \dfrac{2\ \dfrac{1\ \dfrac{(\alpha \mathbin{\&} \beta) \mathbin{\&} \gamma}{\alpha \mathbin{\&} \beta}\ \text{УК}}{\alpha}\ \text{УК} \qquad 6\ \dfrac{4\ \dfrac{3\ \dfrac{(\alpha \mathbin{\&} \beta) \mathbin{\&} \gamma}{\alpha \mathbin{\&} \beta}\ \text{УК}}{\beta}\ \text{УК} \qquad 5\ \dfrac{(\alpha \mathbin{\&} \beta) \mathbin{\&} \gamma}{\gamma}\ \text{УК}}{\beta \mathbin{\&} \gamma}\ \text{ВК}}{\alpha \mathbin{\&} (\beta \mathbin{\&} \gamma)}\ \text{ВК}$$

Следующий пример показывает, как «работает» правило тривиальной выводимости:

Пример 6. $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$.

$$2\ \dfrac{1\ \dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha}\ \text{ТВ}}{\alpha \vee \beta}\ \text{ВД}$$

Приведенные примеры показывают, что построение дерева вывода можно представлять себе как «сборку» его из меньших деревьев.[7] Так,

[7] Хотелось бы, конечно, говорить о «выращивании» дерева, но тогда ему пришлось бы расти от листьев к корню.

дерево примера 5 составляется (на 7-м шаге) из двух деревьев с корнями α и $\beta \mathbin{\&} \gamma$, под которыми проводится черта, а под чертой записывается конъюнкция их корней; второе из этих деревьев (правое) составляется точно таким же образом (на 6-м шаге), а первое (левое) получается (на 2-м шаге) из «элементарного дерева» (с единственным листом $(\alpha \mathbin{\&} \beta) \mathbin{\&} \gamma$, единственной чертой и корнем $\alpha \mathbin{\&} \beta$), под которым проводится черта и под чертой записывается формула α. (Таким образом, мы произвели «полный разбор» левого дерева; подобным же образом можно «разобрать» и правое, хотя такой «разбор» будет более громоздким.)

5. Просмотрев приведенный выше перечень правил, можно заметить, что в некоторых из них речь идет просто о том, что из каких-то формул что-то выводимо, а в некоторых о том, что из каких-то формул что-то выводимо *при условии*, что имеет место какая-то другая выводимость. Правила первого типа мы будем называть *безусловными*, правила второго типа — *условными*. Условными являются правила УД, ВИ и ВО, остальные правила — безусловные.[8]

В приведенных до сих пор примерах использовались только безусловные правила, а сейчас мы займемся условными. Для чего они служат? В дедуктивных рассуждениях часто приходится вводить *промежуточные допущения*, которые потом становятся ненужными и устраняются. Примером может служить доказательство разбором случаев: рассматривая каждый отдельный случай, мы принимаем допущение, что этот случай имеет место, а когда все случаи разобраны, мы больше не нуждаемся в этих допущениях. То же происходит при доказательстве приведением к нелепости: чтобы доказать, что некоторое утверждение ложно, мы допускаем сначала, что оно истинно, а как только из этой гипотезы получено противоречие, она устраняется. Наконец, при доказательстве условного утверждения мы допускаем, что его посылка истинна, и из этого допущения выводим его заключение, а затем устраняем допущение. Эти три приема рассуждения как раз и описываются нашими условными правилами. При применении каждого из этих правил устраняется некоторое допущение или допущения. (Формулируя правила, мы обозначали устраняемые допущения через α, β в правиле УД и через α в правилах ВИ и ВО.) В дереве вывода допущения — это те формулы, которые являются его листьями. Поэтому устранение допущения можно

[8]В частности, к безусловным относится правило ТВ, хотя оно имеет вид условного предложения. Дело в том, что в посылке этого предложения нет речи о выводимости. В наиболее простых и часто используемых случаях это правило имеет вид $\alpha \vdash \alpha$ (см. ниже пример 8), или $\alpha, \beta \vdash \alpha$ (см. пример 6), или $\alpha, \beta \vdash \beta$ и т. п.

представлять себе как «обрыв» или «увядание» листа; из дальнейшего будет видно, что «увядание» — более точный образ.

При «сборке» большего дерева из меньших некоторые листья этих меньших деревьев могут «увядать»; те листья, которые не «увянут» до конца, образуют множество исходных посылок вывода, т. е. то множество M, которое стоит слева от знака $\vdash$ в выводимости $M \vdash \alpha$, доказываемой с помощью данного дерева; «увядшие» листья — это промежуточные допущения. Может случиться, в частности, что «увянут» все листья; тогда мы получим вывод из пустого множества — иначе говоря, корень дерева будет доказуемой формулой.

В дальнейшем мы будем писать слова *увядать*, *увядание*, *увядший* без кавычек, а листья, не увядающие до конца вывода, будем называть *зелеными листьями* соответствующего дерева.

Проиллюстрируем теперь применение условных правил на примерах. При этом мы будем заключать увядшие листья в квадратные скобки, а рядом будем писать в круглых скобках номер шага, на котором увял данный лист. (Впрочем, указание этого номера не обязательно, и иногда мы будем его опускать.)

Пример 7. $\alpha\vee\beta \vdash \beta\vee\alpha$.

$$3\;\dfrac{1\;\dfrac{[\alpha](3)}{\beta\vee\alpha}\,\text{ВД}\qquad 2\;\dfrac{[\beta](3)}{\beta\vee\alpha}\,\text{ВД}\qquad \alpha\vee\beta}{\beta\vee\alpha}\,\text{УД}$$

(Здесь применяется УД с пустым M.)

Пример 8. $\vdash \alpha \to \alpha$.

$$2\;\dfrac{1\;\dfrac{[\alpha](2)}{\alpha}\,\text{ТВ}}{\alpha\to\alpha}\,\text{ВИ}$$

(Здесь применяется ВИ с пустым M. Полученное дерево не имеет зеленых листьев; это значит, что формула $\alpha \to \alpha$ доказуема.)

Пример 9. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$.

$$1\;\dfrac{\alpha\qquad[\neg\alpha]\,(2)}{2\;\dfrac{\textit{Л}}{\neg\neg\alpha}\,\text{ВО}}\,\text{УО}$$

(Здесь при применении ВО множество M состоит из одной формулы α.)

Замечание. Сравнение примера 9 с примером 3 иллюстрирует существенное различие между правилами ВО и ДС: то и другое применяются в случае, когда выведена константа *Л*, но при применении ВО один из зеленых листьев дерева увядает, тогда как при применении ДС все зеленые листья остаются зелеными.

Пример 10. $\beta \vdash \alpha \to \beta$.

$$2\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha](2) \qquad\qquad \beta}{\beta}\ \text{ТВ}}{\alpha \to \beta}\ \text{ВИ}$$

Пример 11. $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$.

$$3\ \cfrac{2\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha](3) \qquad\qquad \neg\alpha}{Л}\ \text{УО}}{\beta}\ \text{ДС}}{\alpha \to \beta}\ \text{ВИ}$$

Пример 12. $\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha \vdash \beta$.

$$4\ \cfrac{2\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha](4) \qquad\qquad \neg\alpha}{Л}\ \text{УО}}{\beta}\ \text{ДС} \qquad\qquad 3\ \cfrac{[\beta](4) \qquad\qquad \neg\alpha}{\beta}\ \text{ТВ} \qquad\qquad \alpha \vee \beta}{\beta}\ \text{УД}$$

Пример 13. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.

$$7\ \cfrac{4\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha](4)}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)} \qquad 3\ \cfrac{2\ \cfrac{\beta[4]}{\beta \vee \gamma}}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)} \qquad [\alpha \vee \beta](7)}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)} \qquad 6\ \cfrac{5\ \cfrac{[\gamma](7)}{\beta \vee \gamma}}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)} \qquad (\alpha \vee \beta) \vee \gamma}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}$$

(Здесь дважды применяется УД с пустым M.)

Пример 14. $\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \neg\alpha$.

$$3\ \cfrac{2\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha](3) \qquad \alpha \to \beta}{\beta} \qquad\qquad \neg\beta}{Л}}{\neg\alpha}$$

Пример 15. $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$.

Дерево вывода получается здесь из дерева предыдущего примера добавлением одного шага, на котором применяется ВИ.

Пример 16. Формула $\neg Л$ выводима из любого множества формул. В самом деле, если M — произвольное множество формул, то по правилу ТВ имеем $M, Л \vdash Л$, а отсюда по правилу ВО следует, что $M \vdash \neg Л$. В частности, в качестве M можно взять пустое множество, так что формула $\neg Л$ доказуема.

Замечание. Нетрудно убедиться, что формула β тогда и только тогда выводима из формулы α, когда доказуема импликация $\alpha \to \beta$. В самом деле, если $\alpha \vdash \beta$, то (по правилу ВИ) $\vdash \alpha \to \beta$; с другой стороны, если импликация $\alpha \to \beta$ доказуема, то фигура

$$\dfrac{\alpha \qquad \begin{array}{c}\Delta\\ \alpha \to \beta\end{array}}{\beta}\,\text{УИ},$$

где Δ — дерево вывода формулы $\alpha \to \beta$ из пустого множества (не имеющее зеленых листьев), будет, очевидно, деревом вывода формулы β из формулы α.

6. Чтобы лучше понять строение деревьев вывода, нужно научиться хотя бы в несложных случаях строить их самостоятельно. При этом полезно принять во внимание следующие простые соображения:

Во-первых, если среди исходных посылок, из которых нам надлежит нечто вывести (т. е. тех формул, которые должны быть листьями дерева) есть формула, являющаяся конъюнкцией каких-либо двух формул, то нам, скорее всего, придется один или несколько раз применить к этой формуле правило удаления конъюнкции; аналогично для остальных пропозициональных связок. Так, в дереве примера 1 к (единственной) исходной формуле $\alpha \,\&\, \beta$ дважды применяется УК; в дереве примера 5 к исходной формуле $(\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma$ то же правило применяется трижды; в деревьях примеров 2 и 4 к исходным формулам применяется УИ, в деревьях примеров 3 и 9 — УО, в деревьях примеров 7 и 13 — УД, в деревьях примеров 14 и 15 — УИ и УО, в дереве примера 12 — УО и УД.

То же самое будет, если формула, являющаяся, например, конъюнкцией, получится на одном из промежуточных шагов вывода, или такая формула появится в качестве промежуточного допущения: эту конъюнкцию, скорее всего, придется потом удалить. Так обстоит дело в примере 5 (где удаляется конъюнкция $\alpha \& \beta$), и в примере 13 (где удаляется дизъюнкция $\alpha \vee \beta$).

Во-вторых, если формула, которая должна быть корнем, представляет собой конъюнкцию, то получить ее мы, скорее всего, должны будем с помощью правила введения конъюнкции, и аналогично для остальных пропозициональных связок. Так, в деревьях примеров 1 и 5 на «самом нижнем» шаге применяется ВК, в деревьях примеров 6 и 13 — ВД, в деревьях примеров 8, 10, 11 и 15 — ВИ, в деревьях примеров 9 и 14 — ВО. То же верно для корней «частичных деревьев» (см. хотя бы пример 4, где на шаге 1 применяется ВК и на шаге 2 — ВД).

В-третьих, если мы хотим нечто вывести из дизъюнкции с помощью правила УД, мы должны сначала вывести это из каждого ее члена в отдельности (см. примеры 7, 12, 13).

В-четвертых, если формула, которую нужно вывести, содержит «куски», не входящие в состав исходных посылок, то весьма вероятно, что придется применить ДС (особенно в случае, когда эти «куски» не находятся внутри дизъюнкции, что могло бы дать надежду воспользоваться правилом ВД). Так обстоит дело в примерах 3 и 11. То же относится к корням «частичных деревьев» (см. пример 12). Иногда, впрочем, в подобных случаях работает правило ТВ (см. пример 10).

Пользуясь этими соображениями, можно пытаться рисовать деревья вывода сверху вниз, или снизу вверх, или попеременно в том и другом направлении.

Теперь читателю рекомендуется, прежде чем продолжать чтение, доказать (построением деревьев) следующие выводимости:

(1) $\alpha \& \beta \vdash \alpha \vee \beta$;
(2) $\alpha \& \beta,\ \beta \& \gamma \vdash \alpha \& \gamma$;
(3) $\alpha,\ \beta,\ \neg(\alpha \& \beta) \vdash \gamma \to \delta$;
(4) $\alpha,\ \beta,\ \neg\gamma,\ \alpha \& \beta \to \gamma \vdash \text{Л}$;
(5) $\alpha,\ \beta,\ \neg\gamma,\ \beta \to \gamma \vdash \delta$;
(6) $\alpha \& (\beta \& \gamma) \vdash (\alpha \& \beta) \& \gamma$;
(7) $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$;
(8) $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$;
(9) $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \& \beta \to \gamma$;
(10) $\alpha \& \beta \to \gamma \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$;
(11) $\alpha_1 \to \beta_1,\ \alpha_2 \to \beta_2 \vdash \alpha_1 \& \alpha_2 \to \beta_1 \& \beta_2$;
(12) $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \vdash (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$;
(13) $\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta \vdash \neg\alpha$;
(14) $(\alpha \to \gamma) \& (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma$;
(15) $(\alpha \vee \beta) \& (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \vee \gamma$.

7. Обратимся теперь к содержательному смыслу рассмотренных примеров. Каждая из полученных нами выводимостей представляет собой, в сущности, некоторое «правило рассуждения». Но эти правила в нашем исчислении не постулируются, как основные правила, перечисленные выше (пункт 3), а выводятся из основных правил. Поэтому их называют *производными правилами*. Среди производных правил есть очень простые, представляющиеся очевидными даже без всякого обоснования — таковы правила примеров 1 и 7, разрешающие переставлять члены в конъюнкции и дизъюнкции, — другие более сложны, но все они дают формальное описание тех или иных правильных способов рассуждения. Некоторые из этих способов по тем или иным причинам представляют особый интерес, и об их смысле стоит сказать отдельно. Так, выводимости примеров 10 и 11 означают, что импликация истинна, если ложна ее посылка или истинно заключение, выводимость примера 12 — что если дизъюнкция истинна, то из ложности одного ее члена следует истинность другого. Выводимость примера 14 — это правило, известное в традиционной логике под названием modus tollens («отрицательный способ»): если истинно условное предложение, то из ложности его заключения следует ложность посылки. Некоторые выводимости, вошедшие в только что сформулированное задание, также являются важными, часто используемыми правилами: выводимость (7) выражает так называемое «правило транзитивности импликации», (8) — «правило перестановки посылок», (9) — «правило соединения посылок», (10) — «правило разъединения посылок».

8. В заключение главы займемся вопросом о связи между понятиями выводимости и доказуемой формулы, с одной стороны, и изучавшимися в главе 6 понятиями равносильности и тождественно истинной формулы — с другой.

Прежде всего, вспоминая данное в начале этой главы (пункт 2) пояснение к определению доказуемой формулы (доказуемость формулы означает, что она истинна и при этом ее истинность может быть доказана по правилам исчисления без каких бы то ни было посылок), мы можем ожидать, что *по объему* понятие доказуемости совпадает с понятием тождественной истинности. И это действительно так: формула логики предложений доказуема в исчислении естественного вывода тогда и только тогда, когда она тождественно истинна. Это утверждение называется теоремой о полноте исчисления предложений; его доказательство можно найти в курсах математической логики.

Из теоремы о полноте вытекает, в частности, что рассматриваемое нами исчисление *непротиворечиво*: не может существовать такой формулы, чтобы и и она, и ее отрицание были доказуемы в этом исчислении. В самом деле, в таком случае и сама формула, и ее отрицание были бы тождественно истинны, а это, очевидно, невозможно.

Чтобы выяснить, что отвечает в нашем исчислении понятию равносильности, введем следующее определение: две формулы называются *дедуктивно эквивалентными*, если каждая из них выводима из другой. Дедуктивно эквивалентными являются, например, формулы $\alpha \,\&\, \beta$ и $\beta \,\&\, \alpha$ (см. пример 1; ясно, что первую формулу можно вывести из второй точно так же, как вторую из первой, поскольку через α и β мы обозначаем *произвольные* формулы), $\alpha \vee \beta$ и $\beta \vee \alpha$ (пример 7), $(\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma$ и $\alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma)$ (пример 5 и выводимость (6) из задания в пункте 6), $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ и $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (пример 13 и выводимость (12) из того же задания). Во всех этих парах входящие в них формулы равносильны. Так обстоит дело и в общем случае: две формулы логики предложений дедуктивно эквивалентны в исчислении естественного вывода тогда и только тогда, когда они равносильны.[9]

В частности, для каждой из основных равносильностей, приведенных в главе 6, можно вывести ее левую часть из правой и обратно. Для двух равносильностей, выражающих коммутативность конъюнкции и дизъюнкции, мы это уже сделали, для равносильностей, выражающих ассоциативность тех же операций, сделали в одну сторону, в другую это делается аналогично. Приведем еще выводы, отвечающие дистрибутивности конъюнкции по отношению к дизъюнкции:

Пример 17. $\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma) \vdash \alpha \,\&\, \beta \vee \alpha \,\&\, \gamma$.

$$8\;\dfrac{3\;\dfrac{2\;\dfrac{1\;\dfrac{\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)}{\alpha}\,\text{УК} \qquad [\beta](8)}{\alpha \,\&\, \beta}\,\text{ВК}}{\alpha \,\&\, \beta \vee \alpha \,\&\, \gamma}\,\text{ВД} \qquad 6\;\dfrac{5\;\dfrac{4\;\dfrac{\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)}{\alpha}\,\text{УК} \qquad [\gamma](8)}{\alpha \,\&\, \gamma}\,\text{ВК}}{\alpha \,\&\, \beta \vee \alpha \,\&\, \gamma}\,\text{ВД} \qquad 7\;\dfrac{\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)}{\beta \vee \gamma}\,\text{УК}}{\alpha \,\&\, \beta \vee \alpha \,\&\, \gamma}\,\text{УД}$$

Пример 18. $\alpha \,\&\, \beta \vee \alpha \,\&\, \gamma \vdash \alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)$.

[9] Имеет место даже более общий факт: формула γ логики предложений тогда и только тогда выводима в исчислении естественного вывода из множества формул M, когда для каждого набора значений элементарных предложений, для которого все формулы из M принимают значение *И*, формула γ также принимает значение *И*. (Это утверждение можно получить в качестве довольно простого следствия из теоремы о полноте, воспользовавшись замечанием в конце пункта 5.)

$$
9\;\dfrac{4\;\dfrac{1\;\dfrac{[\alpha\,\&\,\beta](9)}{\alpha} \qquad 3\;\dfrac{2\;\dfrac{[\alpha\,\&\,\beta](9)}{\beta}}{\beta\vee\gamma}}{\alpha\,\&\,(\beta\vee\gamma)} \qquad 8\;\dfrac{5\;\dfrac{[\alpha\,\&\,\gamma](9)}{\alpha} \qquad 7\;\dfrac{6\;\dfrac{[\alpha\,\&\,\gamma](9)}{\gamma}}{\beta\vee\gamma}}{\alpha\,\&\,(\beta\vee\gamma)} \qquad \alpha\,\&\,\beta\vee\alpha\,\&\,\gamma}{\alpha\,\&\,(\beta\vee\gamma)}
$$

Мы уже умеем, таким образом, выводить друг из друга левые и правые части первых пяти основных равносильностей группы I (см. пункт 3 главы 6). Для остальных трех равносильностей этой группы читатель может попробовать построить соответствующие выводы сам (для I_7 и I_8 это просто, а для I_6 технически довольно сложно, но принципиальных трудностей здесь нет). Нетрудно построить такие выводы и для равносильностей группы IV (см. пункт 5 главы 6; символы R и F нужно заменить при этом на $\neg Л$ и $Л$). Но для построения выводов, отвечающих равносильностям групп II и III, в ряде случаев нужны принципиально иные средства, к рассмотрению которых мы обратимся в следующей главе.

Глава 9. Конструктивные и неконструктивные выводы

1. В предыдущей главе мы подошли к изучению логических операций и образующихся с их помощью «сложных предложений» с новой точки зрения, отличающейся от той, с которой мы рассматривали их в главах 5, 6, и 7: там мы интересовались только характером зависимости истинностного значения сложного предложения от истинностных значений его частей, а теперь нас занимает более трудный вопрос: если мы предполагаем, что то или иное сложное предложение истинно, как убедиться, что это действительно так? Иначе говоря, мы занимаемся вопросом об *обосновании* результатов логических операций. Но этот вопрос допускает два разных понимания, одно из которых — то, которого мы придерживались в главах 5, 6, и 7 — называют обычно *классическим*, а другое — *конструктивным.* Различие между ними проявляется в тех случаях, когда исходные «простые предожения» описывают единичные факты, наличие или отсутствие которых по тем или иным причинам для нас очевидно или может быть проверено. Это могут быть, например, утверждения о целых неотрицательных числах вида $a+b=c$ и $a\cdot b=c$, где a, b, c — *конкретные числа* ($2+3=5$, $2\cdot 2=4$, $1+0=1$ и т. п.), или о конкретных исторических, географических, астрономических фактах

(«Бастилия была взята 14 июля 1789 года», «Волга впадает в Каспийское море», «Луна — спутник Земли»).[1]

Объяснение различия между классическим и конструктивным пониманием логических операций удобнее всего начать с операции постановки квантора существования, т. к. здесь это различие проявляется наиболее отчетливо. Пусть $F(x)$ — (одноместный) предикат, определенный на некотором множестве M. Тогда при классическом понимании предложение $\exists x F(x)$ считается обоснованным, если нам каким-либо способом удалось убедиться, что в множестве M имеется элемент, обладающий свойством F, причем не требуется, чтобы такой элемент был явно указан — иначе говоря, мы не обязаны уметь привести пример элемента, обладающего данным свойством. При конструктивном понимании, напротив, предложение $\exists x F(x)$ считается обоснованным лишь в том случае, когда мы можем указать в множестве M элемент, обладающий свойством F.

Возьмем, например, утверждение «“Слово о полку Игореве” является подлинным памятником древнерусской литературы» (а не написано в XVIII веке, как считали некоторые историки). Оно равносильно, очевидно, следующему утверждению: «Существовали древние рукописи “Слова о полку Игореве”». (Смысл слова «древние» для нашей цели уточнять не обязательно.) Все имеющиеся доказательства этого утверждения, сколь бы убедительны они ни были, неконструктивны: конструктивным доказательством была бы только находка древней рукописи.

Другой пример: из общих свойств многочленов — точнее, из общих свойств непрерывных функций — следует, что всякое уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами, имеет хотя бы один действительный корень; в частности, это верно для уравнения $4x^5 - x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 3x - 2 = 0$. Но такое доказательство существования корня данного уравнения

[1] Мы оставляем здесь в стороне весьма не простой вопрос о том, *почему* эти утверждения представляются нам «проверяемыми», и отвлекаемся, например, от того обстоятельства, что «очевидность» утверждения «Луна — спутник Земли» есть результат долгого развития науки и широкой популяризации ее выводов. Важно для нас здесь другое: *если* предложения, над которыми производятся логические операции, выражают «проверяемые» утверждения, то в каких случаях это будет верно и для результатов операций?

Впрочем, в случае простых арифметических утверждений «проверяемость» допускает вполне ясное истолкование: она основана здесь на том, что натуральные числа можно представлять себе как «конструктивные объекты», т. е. объекты, которые непосредственно «строятся» из одинаковых предметов, физическая природа которых несущественна (например, палочек или зарубок).

неконструктивно: оно не позволяет нам указать никакого конкретного корня. Если же мы заметим, что левая часть нашего уравнения обращается в нуль при подстановке вместо переменной x числа 1, мы тем самым получим конструктивное доказательство.

Перейдем теперь к дизъюнкции. При классическом понимании она считается обоснованной, если мы любым способом убедимся, что хотя бы один из ее членов истинен — иначе говоря, что они не могут оба одновременно быть ложными; какой именно член истинен, мы знать не обязаны, и более того — в условиях нормальной речевой коммуникации предложение «A или B» употребляется только тогда, когда говорящему неизвестны истинностные значения предложений A и B. В то же время при конструктивном понимании дизъюнкция считается обоснованной лишь при условии, что хотя бы один из ее членов мы умеем обосновать. (Естественность такого понимания станет особенно очевидной, если вспомнить, что операция дизъюнкции является по сути дела частным случаем операции постановки квантора существования: если множество, на котором определен предикат F, состоит из двух элементов a и b, то $\exists x F(x)$ означает то же, что $F(a) \vee F(b)$.)

Пусть, например, в ходе расследования некоторого преступления неопровержимо установлено, что в момент его совершения на месте преступления находились два человека — назовем их А и Б, — и больше никого там не было. Тогда можно считать обоснованной дизъюнкцию утверждений «Преступление совершил А» и «Преступление совершил Б», однако это обоснование неконструктивно. А если для того, чтобы занять какую-то должность, требуется, в числе прочего, владение немецким или французским языком, и отборочная комиссия, проэкзаменовав каждого из нескольких кандидатов по одному из этих языков, установила, что он им владеет, то дизъюнкция «Данный кандидат владеет немецким или французским языком» является для каждого из них конструктивно обоснованной.

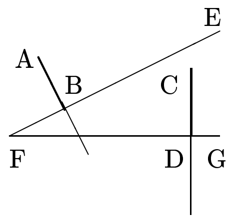
Рассмотрим, далее, операцию постановки квантора общности. При классическом понимании предложение $\forall x F(x)$, где $F(x)$ — (одноместный) предикат, определенный на некотором множестве M, считается обоснованным, если мы любым способом смогли убедиться, что все элементы множества M обладают свойством F (причем этот способ может быть косвенным: например, нам удалось привести к нелепости гипотезу, что в множестве M имеется элемент, *не* обладающий свойством F). При конструктивном же понимании это предложение считается обоснованным лишь тогда, когда у нас имеется регулярный способ (алгоритм), позволяющий для любого заданного элемента a множества M обосновать предложение $F(a)$ (причем для каждого из этих предложений обоснование также должно быть конструктивным).

Например, упомянутое выше обоснование утверждения: «Всякое уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами, имеет хотя бы один действительный корень», вытекающее из общих свойств непрерывных функций, не является конструктивым; но утверждение «Всякое уравнение вида $ax = b$, где a, b — действительные числа и $a \neq 0$, имеет действительный корень», легко обосновать конструктивно: алгоритм, позволяющий конструктивно обосновать соответствующее утверждение для любого *конкретного* уравнения такого вида — иначе говоря, найти корень этого уравнения, — состоит просто в том, чтобы разделить b на a. Пример из другой области: утверждение «Все дошедшие до нас древегреческие стихи — нерифмованные» является конструктивно обоснованным, поскольку для каждого конкретного произведения можно непосредственно убедиться, что в нем нет рифм (в этом и состоит в данном случае «регулярный способ»); но утверждение «Все древегреческие стихи были нерифмованными» конструктивного обоснования не имеет, хотя в его справедливости также никто не сомневается; оно подтверждается лишь косвенными доводами, одним из которых (но не единственным) служит справедливость предыдущего утверждения.

Обратившись теперь к конъюнкции, мы сразу увидим, что, поскольку она связана с квантором общности так же, как дизъюнкция с квантором существования (если множество, на котором определен предикат F, состоит из двух элементов a и b, то $\forall x F(x)$ означает то же, что $F(a) \,\&\, F(b)$), при классическом понимании конъюнкция должна считаться обоснованной, если мы каким-либо способом (возможно, косвенным) убедимся, что истинны оба ее члена, а при конструктивном — лишь тогда, когда каждый из них мы умеем обосновать. Если, например, утверждение, что Иван владеет немецким и французским языками, высказано на основании добросовестных экзаменов по каждому из этих языков, то его можно считать конструктивно обоснованным. Но если кто-нибудь станет обосновывать то же утверждение, говоря, что иначе Иван не мог бы преподавать оба эти языка, а он их преподает, то такое обоснование будет неконструктивным.

Импликация при классическом понимании считается обоснованной, если мы каким угодно способом убедимся, что в случае истинности ее посылки заключение также истинно, а при конструктивном — лишь тогда, когда у нас имеется регулярный способ (алгоритм), позволяющий по любому обоснованию посылки построить обоснование заключения.

Для примера рассмотрим следующее доказательство утверждения: «Две прямые, соответственно перпендикулярные к двум пересекающимся прямым, также пересекаются» (приведенное в учебнике геометрии А. П. Киселева).



Пусть FE и FG (см. чертеж) — пересекающиеся прямые, а прямые AB и CD им перпендикулярны. Тогда, если допустить противное, т. е. что AB и CD параллельны, то прямая FG, будучи перпендикулярна к одной из параллельных прямых (к CD), была бы перпендикулярна и к другой (к AB), так что из одной точки F к прямой AB были бы проведены два различных перпендикуляра FE и FG, что невозможно.

Это вполне корректное доказательство условного утверждения (импликации) «Если прямые FE и FG пересекаются, а прямые AB и CD им перпендикулярны, то AB и CD также пересекаются.» Но это доказательство неконструктивно: оно не дает никакого способа, который позволял бы, если указана точка пересечения FE и FG, указать точку пересечения AB и CD.

Возьмем теперь арифметическое утверждение: «Если целое число делится на 6, то оно делится на 3». Вот его подробное доказательство. Пусть целое число n делится на 6, т. е. может быть представлено в виде произведения числа 6 на некоторое целое число k. Тогда, поскольку $6 = 3 \cdot 2$, число n представляется также в виде произведения числа 3 на некоторое целое число, — а именно, на $2k$, — а это и значит, что n делится на 3. Это доказательство конструктивно, т. к. дает алгоритм, позволяющий для каждого целого числа n по обоснованию утверждения «n делится на 6» построить обоснование утверждения «n делится на 3». В самом деле, обоснованием первого утверждения должно быть указание числа k, которое при умножении на 6 дает n, обоснованием второго — указание числа l, которое дает n при умножении на 3. Алгоритм сводится к правилу: «Чтобы получить l, умножь k на 2».

Что же касается отрицания, то здесь различие между классическим и конструктивным пониманием отсутствует: отрицательное предложение «Утверждение A неверно» с любой точки зрения естественно считать обоснованным в том случае, когда опровергнуто «положительное» утверждение A, причем способ опровержения не имеет значения.

2. Посмотрим теперь, какие из рассмотренных в предыдущей главе правил исчисления естественного вывода согласуются с конструктивным пониманием логических операций.

Прежде всего, сразу видно, что с ним не согласуется закон исключенного третьего. В самом деле, в силу этого закона истинна всякая дизъюнкция вида $A \vee \neg A$, где A — произвольное предложение; но при конструктивном понимании мы имеем право считать такую дизъюнкцию обоснованной лишь в том случае, когда можем обосновать либо A, либо $\neg A$ — иначе говоря, либо умеем доказать предложение A, либо умеем его опровергнуть.

Все остальные правила при конструктивном понимании логических операций сохраняют силу. Более точно это означает следующее: если некоторую формулу γ можно вывести из множества формул M с помощью правил, перечисленных в пункте 3 главы 8, но без применения закона исключенного третьего, и при этом все формулы, входящие в M, конструктивно обоснованы, то формулу γ также можно считать конструктивно обоснованной.

Постараемся убедиться, что это действительно так. Начнем с простейшего случая, когда γ выводится из M за один шаг — иначе говоря, с помощью «одноэтажного» дерева вывода. Итак, пусть весь вывод γ из M состоит из одного шага, т. е. одного применения некоторого правила. Правило это должно быть безусловным, т. к. условное правило может применяться только в «сложном» выводе, когда что-то из чего-то уже было выведено раньше. Поэтому у нас есть следующие возможности:

а) Применяемое правило есть ВК. Тогда M состоит из двух формул α и β, а формула γ есть $\alpha \,\&\, \beta$. Но конструктивное понимание конъюнкции как раз в том и состоит, что из конструктивной обоснованности ее членов вытекает конструктивная обоснованность ее самой.

б) Применяемое правило есть УК. Тогда M состоит из одной формулы $\alpha \,\&\, \beta$, а формула γ есть α или β. Но из смысла конструктивного понимания конъюнкции ясно, что если она конструктивно обоснована, то это верно и для обоих ее членов.

в) Применяемое правило есть ВД. Тогда M состоит из одной формулы α или β, а формула γ есть $\alpha \vee \beta$. Но конструктивное понимание дизъюнкции состоит именно в том, что ее конструктивная обоснованность вытекает из конструктивной обоснованности одного ее члена.

г) Применяемое правило есть УИ. Тогда M состоит из двух формул α и $\alpha \to \beta$, а формула γ есть β. Но конструктивная обоснованность импликации означает наличие регулярного способа по всякому конструктивному обоснованию ее посылки построить конструктивное обоснование заключения. Поэтому, если мы располагаем конструктивными обоснованиями формул α и $\alpha \to \beta$, то мы сумеем конструктивно обосновать и формулу β.

д) Применяемое правило есть УО. Тогда M состоит из двух формул α и $\neg\alpha$, а формула γ есть $Л$. Поэтому доказываемое условное утверждение «Если все формулы, входящие в M, конструктивно обоснованы, то формулу γ также можно считать конструктивно обоснованной» справедливо тривиальным образом — в силу ложности его посылки: ведь формулы α и $\neg\alpha$ не могут обе быть обоснованы (ни конструктивно, ни классически).

е) Аналогичным образом можно рассуждать, если применяемое правило есть ДС: в этом случае M состоит из одной формулы $Л$, которую, очевидно, невозможно обосновать.

ж) Если применяемое правило есть ТВ, то формула α входит в множество M, и доказываемое условное утверждение становится просто тавтологией.

Рассмотрим теперь случай, когда γ выводится из M с помощью «двухэтажного» дерева вывода (как в примерах 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10 из предыдущей главы). Формула γ является корнем этого дерева, а M — множеством его зеленых листьев. Если при этом на последнем шаге, т. е. на «нижнем этаже» дерева, применяется какое-либо из безусловных правил (как в примерах 1, 2, 6), то формула γ, стоящая под самой нижней чертой, получается с помощью этого правила из формул, стоящих непосредственно над ней, а каждая из этих формул конструктивно обоснована, потому что она либо является корнем одноэтажного дерева вывода, все зеленые листья которого входят в M, либо сама входит в M (как формула $\beta \to \gamma$ в примере 2). А отсюда мы можем заключить, рассуждая точно так же, как в случае «одноэтажного» дерева, что и стоящую под чертой формулу γ можно считать конструктивно обоснованной.

Если в том же случае «двухэтажного» дерева на «нижнем этаже» применяется условное правило, то имеются три возможности:

з) Это правило есть ВИ (как в примерах 8 и 10). Тогда над чертой в «нижнем этаже» стоит (единственная) формула β, являющаяся корнем одноэтажного дерева вывода, один из зеленых листьев которого есть α, а остальные входят в M. Отсюда по предыдущему следует, что при условии конструктивной обоснованности всех формул, входящих в M, из конструктивного обоснования α можно получить конструктивное обоснование β. А это как раз и значит, что конструктивно обоснована импликация $\alpha \to \beta$, которая служит корнем нашего двухэтажного дерева.

и) Правило, применяемое на «нижнем этаже», есть ВО (как в примере 9). Тогда над чертой в «нижнем этаже» стоит формула $Л$, являющаяся корнем одноэтажного дерева вывода, один из зеленых листьев которого есть α, а остальные входят в M. Отсюда следует (см. сноску 9 в предыдущей главе), что для всякого набора значений переменных, для которого все формулы из M и формула α принимали бы значение *И*, формула *Л* тоже должна была бы принять значение *И* — что, очевидно, невозможно. Поэтому всякий раз, когда все формулы, входящие в M, принимают значение *И*, формула α принимает значение *Л*. А это значит, что если мы сумеем обосновать все формулы из M, то формула α будет опровергнута. Но опровержение этой формулы как раз и является обоснованием формулы $\neg\alpha$, которая служит корнем нашего двухэтажного дерева.

к) Правило, применяемое на «нижнем этаже», есть УД (как в примере 7). Тогда над чертой в «нижнем этаже» дважды записана формула γ, и она же записана под чертой. Одна из двух «верхних» γ является корнем одноэтажного дерева вывода, один из зеленых листьев которого есть α, а остальные входят в M, другая — корнем другого одноэтажного дерева вывода, один из зеленых листьев которого есть β, а остальные входят в M. По предыдущему отсюда следует, что при условии конструктивной обоснованности всех формул, входящих в M, из конструктивного обоснования α или из конструктивного обоснования β можно получить конструктивное обоснование γ. Следовательно, его при том же условии можно получить и из конструктивного обоснования дизъюнкции $\alpha \vee \beta$, которая тоже записана над чертой. (В примере 7 множество M пусто, роль γ играет $\beta \vee \alpha$, роль α играет сама α, роль β — сама β.)

Далее мы можем точно так же рассуждать в случае трехэтажного дерева вывода (как в примерах 3, 4, 11, 12, 14 из предыдущей главы), с тем лишь различием, что теперь над самой нижней чертой имеется хотя бы одно двухэтажное дерево, — а для двухэтажных деревьев нужный факт уже установлен. Затем таким же образом можно рассмотреть случай четырехэтажного дерева, и т. д.

3. Выводы, в которых не используется закон исключенного третьего — т. е. те, которые согласуются с конструктивным пониманием логических операций, — называются *конструктивными выводами*. Все выводы, проведенные в предыдущей главе, были конструктивными. Рассмотрим теперь пример неконструктивного вывода. (Все неконструктивные примеры мы будем отмечать звездочками.)

Пример 1*. $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

$$5\ \cfrac{1\ \cfrac{\neg\neg\alpha \qquad [\alpha](5)}{\alpha}\,\text{ТВ} \qquad 3\ \cfrac{2\ \cfrac{\neg\neg\alpha \qquad [\neg\alpha](5)}{\textit{Л}}\,\text{УО}}{\alpha}\,\text{ДС} \qquad 4\ \cfrac{}{\alpha \vee \neg\alpha}\,\text{ИТ}}{\alpha}\,\text{УД}$$

Вернемся теперь к одной из основных равносильностей логики предложений, рассмотренных в гл. 6, — равносильности II_1, которую мы назвали там «правилом снятия двойного отрицания». Мы показали сейчас, что ее левую часть можно вывести в исчислении естественного вывода из правой. Ранее (глава 8, пример 9) мы видели, что верно и обратное — ее правую часть можно вывести из левой. При переходе от равносильности к двум выводимостям естественно назвать *правилом снятия двойного отрицания* ту из них, которая установлена только что, а другой скорее подойдет название *правила постановки двойного отрицания*; впредь мы так и будем их называть.

Неконструктивный характер правила снятия двойного отрицания легче всего уяснить себе на примере случая, когда α есть утверждение о существовании объекта с теми или иными свойствами. При конструктивном понимании такое утверждение считается обоснованным лишь тогда, когда указан конкретный пример объекта с нужными свойствами; а его двойное отрицание означает только то, что опровергнуто утверждение о несуществовании такого объекта,— но такое опровержение не обязательно дает возможность построить пример. (В то же время построение примера само по себе служит опровержением утверждения о несуществовании нужного объекта; в этом и состоит смысл конструктивности правила постановки двойного отрицания.)

На правиле снятия двойного отрицания основано *доказательство от противного*. Оно состоит в следующем: желая доказать утверждение A, мы принимаем гипотезу, что оно неверно — иначе говоря, что истинно его отрицание, — и пытаемся привести эту гипотезу к нелепости, т. е. вывести из нее два противоположных друг другу утверждения — скажем, B и «не B».[2] Если это удалось, то мы можем заключить, пользуясь правилом введения отрицания, что гипотеза неверна, т. е. что справедливо утверждение «Неверно, что A неверно», откуда по правилу снятия двойного отрицания следует, что A истинно. Таким образом, доказательство от противного сложнее, чем приведение к нелепости, и в отличие от него неконструктивно. Приведением к нелепости мы лишь опровергаем некоторую гипотезу, а от противного доказывается «положительное» утверждение.

В математических рассуждениях доказательства от противного используются весьма часто; примером может служить приведенное выше

[2] В роли B часто оказывается само A. Тогда утверждение «не B» вытекает из гипотезы тривиальным образом, т. к. совпадает с ней (формально — выводится из нее по правилу тривиальной выводимости).

доказательство утверждения: «Две прямые, соответственно перпендикулярные к двум пересекающимся прямым, также пересекаются». Но и вне математики нередко приходится иметь дело с этим приемом доказательства. Например, все имеющиеся доказательства подлинности «Слова о полку Игореве» суть доказательства от противного; то же можно сказать едва ли не обо всех мыслимых доказательствах утверждения, что «Илиада» и «Одиссея» — произведения одного автора (независимо от степени их убедительности). Читатель легко сможет найти и другие подобные примеры.

Следует, впрочем, иметь в виду, что в современных учебниках математики о «доказательстве от противного» нередко говорят и в тех случаях, когда в действительности используется всего лишь приведение к нелепости. Это бывает в случаях, когда доказывается отрицательное утверждение. Таково, например, доказательство упоминавшегося выше утверждения. что из одной точки нельзя провести больше одного перпендикуляра к одной и той же прямой.

Вопрос. В течение многих веков в качестве пособия для изучения греческого языка использовался сборник писем, приписывавшихся жившему в VI в. до н. э. Фалариду, тирану сицилийского города Акраганта. В 1696 г. английский филолог Р. Бентли (Richard Bentley, 1662—1742) доказал неподлинность этих писем, приведя ряд аргументов, одним из которых было упоминание в них городов, основанных в более позднее время. Что представляет собой этот аргумент — доказательство от противного или приведение к нелепости?

4. Следующие четыре выводимости отвечают законам Де Моргана:

Пример 2. $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$.

Пример 3. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$.

Пример 4. $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \,\&\, \beta)$.

Пример 5*. $\neg(\alpha \,\&\, \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Первые три выводимости мы докажем приведением к нелепости:

$$5\,\cfrac{2\,\cfrac{1\,\cfrac{\neg\alpha \,\&\, \neg\beta}{\neg\alpha}\,\text{УК} \qquad [\alpha](5)}{\textit{Л}}\,\text{УО} \qquad 4\,\cfrac{3\,\cfrac{\neg\alpha \,\&\, \neg\beta}{\neg\beta}\,\text{УК} \qquad [\beta](5)}{\textit{Л}}\,\text{УО} \qquad [\alpha \vee \beta](6)}{6\,\cfrac{\textit{Л}}{\neg(\alpha \vee \beta)}\,\text{ВО}}\,\text{УД}$$

$$7\,\dfrac{3\,\dfrac{2\,\dfrac{1\,\dfrac{[\alpha](3)}{\alpha\vee\beta} \qquad \neg(\alpha\vee\beta)}{\text{Л}}}{\neg\alpha} \qquad 6\,\dfrac{5\,\dfrac{4\,\dfrac{[\beta](6)}{\alpha\vee\beta} \qquad \neg(\alpha\vee\beta)}{\text{Л}}}{\neg\beta}}{\neg\alpha\,\&\,\neg\beta}$$

$$7\,\dfrac{3\,\dfrac{2\,\dfrac{1\,\dfrac{[\alpha\,\&\,\beta](3)}{\alpha} \qquad [\neg\alpha](7)}{\text{Л}}}{\neg(\alpha\,\&\,\beta)} \qquad 6\,\dfrac{5\,\dfrac{4\,\dfrac{[\alpha\,\&\,\beta](6)}{\beta} \qquad [\neg\beta](7)}{\text{Л}}}{\neg(\alpha\,\&\,\beta)} \qquad \neg\alpha\vee\neg\beta}{\neg(\alpha\,\&\,\beta)}$$

Содержательный смысл этих выводов понятен. Например, выводя $\neg(\alpha\,\&\,\beta)$ из $\neg\alpha\vee\neg\beta$, мы рассматриваем два случая: $\neg\alpha$ и $\neg\beta$, и в каждом из них приводим к противоречию (т. е. к нелепости) гипотезу $\alpha\,\&\,\beta$. Обратный вывод (доказательство выводимости примера 5) мы также проведем разбором случаев, но теперь это будут случаи β и $\neg\beta$, для разбора которых необходим закон исключенного третьего. В случае β мы введем еще одну промежуточную гипотезу α, которую уже имеющиеся гипотезы $\neg(\alpha\,\&\,\beta)$ (основная) и β (промежуточная) позволяют легко привести к нелепости, т. е. доказать $\neg\alpha$, откуда уже сразу выводится $\neg\alpha\vee\neg\beta$. В случае $\neg\beta$ вывод дизъюнкции $\neg\alpha\vee\neg\beta$ очевиден. Формальный вывод выглядит так:

$$7\,\dfrac{4\,\dfrac{3\,\dfrac{2\,\dfrac{1\,\dfrac{[\alpha](3) \qquad [\beta](7)}{\alpha\,\&\,\beta} \qquad \neg(\alpha\,\&\,\beta)}{\text{Л}}}{\neg\alpha}}{\neg\alpha\vee\neg\beta} \qquad 5\,\dfrac{[\neg\beta](7)}{\neg\alpha\vee\neg\beta} \qquad 6\,\dfrac{}{\beta\vee\neg\beta}}{\neg\alpha\vee\neg\beta}$$

Итак, «три четверти» законов Де Моргана удается доказать конструктивно. Неконструктивность последней «четверти» означает, что если мы умеем опровергнуть конъюнкцию $\alpha\,\&\,\beta$, отсюда еще не вытекает, что мы умеем опровергнуть один из ее членов. Проиллюстрируем это следующим примером. Обозначим через α предложение «Всякое четное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел» и через β предложение «Существует четное число, большее двух, которое нельзя представить в виде суммы двух простых чисел». Предложение α — это знаменитая гипотеза Гольдбаха—Эйлера, возникшая в 1742 г. в ходе переписки между двумя математиками, Леонардом Эйлером и Христианом Гольдбахом, и до сих пор, несмотря на простоту формулировки, не доказанная и не опровергнутая. Поскольку предложение β равносильно $\neg\alpha$, конъюнкция $\alpha \,\&\, \beta$ опровергается очевидным образом. Но опровержение одного из ее членов было бы доказательством другого, то есть решением задачи, вот уже два с половиной столетия не поддающейся настойчивым усилиям математиков!

5. Следующие шесть выводимостей отвечают основным равносильностям группы III из гл. 8:

Пример 6. $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$.

Пример 7*. $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$.

Пример 8*. $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \to \beta$.

Пример 9. $\alpha \to \beta \vdash \neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$.

Пример 10. $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (закон контрапозиции).

Пример 11*. $\neg\beta \to \neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$ (обратный закон контрапозиции).

Деревьев вывода для этих примеров мы не будем выписывать; ограничимся указаниями, по которым нетрудно их построить. В примере 6 достаточно вывести β из $\neg\alpha \vee \beta$ и α (чтобы можно было воспользоваться правилом ВИ), а это легко сделать разбором случаев. В примере 7 правая часть очевидным образом выводится из левой с добавлением одной из гипотез α, $\neg\alpha$; далее пользуемся правилом ИТ. В примере 8 достаточно из $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и α вывести β; но, принимая гипотезу $\neg\beta$, из нее и из α выво́дим $\alpha \,\&\, \neg\beta$, что дает противоречие; поэтому $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$, $\alpha \vdash \neg\neg\beta$. Выводимость примера 9 легко доказать приведением к нелепости. В примере 10 достаточно вывести $\neg\alpha$ из $\alpha \to \beta$ и $\neg\beta$, а это можно сделать, приведя к нелепости гипотезу α. В точности так же из $\neg\beta \to \neg\alpha$ и α выводится $\neg\neg\beta$; отсюда, пользуясь правилом снятия двойного отрицания и введением импликации, получаем выводимость примера 11.

Неконструктивность примера 7 означает, что если у нас есть регулярный способ по всякому обоснованию посылки импликации построить обоснование ее заключения, отсюда еще не следует, что мы умеем опровергнуть посылку или обосновать заключение. Если мы, например, обозначим через α предложение «“Илиада” и “Одиссея” — произведения одного автора», а через β — конъюнкцию предложений «“Илиада” — произведение одного автора (а не нескольких или многих)» и «“Одиссея” — произведение одного автора», то из α тривиальным образом следует β, хотя ни опровергнуть α, ни обосновать β мы не умеем.

С другой стороны, если мы доказали, что α и отрицание β не могут одновременно быть истинными, это еще не дает нам способа по всякому конструктивному обоснованию α строить конструктивное обоснование β; в этом смысл неконструктивности примера 8. Примером может служить приведенное выше доказательство утверждения: «Две прямые, соответственно перпендикулярные к двум пересекающимся прямым, также пересекаются». Фактически там было доказано, что не могут одновременно быть истинными предложение $\alpha =$ «Прямые FE и FG пересекаются, а прямые AB и CD им перпендикулярны» и отрицание предложения $\beta =$ «Прямые AB и CD пересекаются»; но отсюда не получается никакого способа, который позволял бы, если указана точка пересечения FE и FG, указать точку пересечения AB и CD.

Наконец, смысл неконструктивности примера 11 состоит в том, что если мы располагаем способом по всякому опровержению предложения β строить опровержение предложения α, это еще не дает способа по всякому конструктивному обоснованию α строить конструктивное обоснование β. Пример: поскольку в «Задонщине» — древнерусской повести о Куликовской битве 1380 г. — можно обнаружить явные следы влияния «Слова о полку Игореве», из всякого опровержения подлинности «Слова» немедленно получалось бы опровержение подлинности «Задонщины». Но нет, разумеется, никакого способа, позволявшего бы предъявить древнюю рукопись «Слова» всякий раз, когда предъявлена древняя рукопись «Задонщины».[3]

Задача. Покажите. что в конструктивном варианте исчисления естественного вывода имеют место следующие выводимости:

(а) $\neg\neg\neg\alpha \vdash \neg\alpha$ («правило снятия тройного отрицания»);

(б) $\vdash \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ [*Указание.* Привести к нелепости формулу $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, воспользовавшись выводимостью примера 3];

(в) $\neg\neg Л \vdash Л$.

Попробуйте дать содержательное истолкование этих фактов.

6. Если в системе правил исчисления естественного вывода заменить правило ИТ правилом снятия двойного отрицания, то в полученном исчислении

[3] Легко понять, что это рассуждение не зависит от степени убедительности утверждения о наличии в «Задонщине» следов влияния «Слова».

можно вывести закон исключенного третьего в качестве производного правила. Для этого, очевидно, достаточно вывести в первоначальном исчислении без использования ИТ формулу $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, а это сделать нетрудно (ср. пункт (б) только что сформулированной задачи). Мы можем сказать, таким образом, что правило снятия двойного отрицания равносильно закону исключенного третьего. Можно показать также, что в том же смысле ему равносильны выводимости примеров 7, 8 и 11. В самом деле: из выводимости примера 7 получается $\alpha \to \alpha \vdash \neg\alpha \vee \alpha$, но $\alpha \to \alpha$ — доказуемая формула (см. в предыдущей главе пример 8), а из $\neg\alpha \vee \alpha$ выводится $\alpha \vee \neg\alpha$ (см. там же пример 7); из выводимости примера 8 получается $\neg(\neg\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\alpha) \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$, а отсюда легко получить правило снятия двойного отрицания, т. к. $\neg(\neg\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\alpha)$ — доказуемая формула (в чем читатель легко убедится сам); из выводтмости примера 11 также получится правило снятия двойного отрицания, если заменить в ней α на $\neg\neg\alpha$ и β на α. Что касается выводимости примера 5, то она равносильна так называемому ослабленному закону исключенного третьего: $\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$.

Важно заметить, что из всего изложенного в настоящей главе не вытекает еще, что закон исключенного третьего не зависит от остальных правил исчисления естественного вывода, т. е. не может быть выведен из них в качестве производного правила, хотя на самом деле так и есть. Этот факт нуждается в строгом доказательстве, которое мы, однако, не имеем возможности здесь привести.

Глава 10. Теория доказательства: кванторные правила

1. В этой главе мы рассмотрим исчисление естественного вывода «в полном объеме», добавив к нему правила введения и удаления кванторов. Слово «формула» будет теперь означать формулу логики предикатов, но в отличие от главы 7 мы будем рассматривать формулы, которые наряду с предикатными символами могут содержать также логическую константу *Л*. Все «старые» правила, рассматривавшиеся в главах 8 и 9, применяются к формулам логики предикатов точно так же, как к формулам логики предложений, и те деревья вывода, в которых применяются только эти правила, имеют точно такой же вид.

В новых правилах важную роль будет играть подстановка в формулу одной переменной вместо другой; поэтому нам придется сейчас остановиться на этом понятии.

Если $\alpha(x)$ — формула, содержащая свободную переменную x (и, возможно, еще какие-то переменные), мы будем обозначать через $\alpha(y)$ формулу, получаемую в результате замены в формуле $\alpha(x)$ всех свободных вхождений переменной x вхождениями переменной y. (Например, если $\alpha(x)$ есть $F(x,t) \,\&\, \forall z G(z,x)$, то $\alpha(y)$ есть $F(y,t) \,\&\, \forall z G(z,y)$.)[1] Если в формуле $\alpha(x)$ заместить все предикатные символы конкретными предикатами, она превратится в некоторый предикат от переменной x (и, возможно, еще от каких-то переменных), и естественно ожидать, что формула $\alpha(y)$ превратится тогда в тот же самый предикат, только с другим обозначением аргумента. Так оно и будет, если никакое свободное вхождение x в $\alpha(x)$ не находится в области действия квантора по переменной y. Пусть, например, $\alpha(x)$ есть $\exists z F(z,x)$. Заместив в этой формуле предикатный символ F двуместным предикатом, определенным на множестве натуральных чисел и означающим, что число, стоящее на первом месте, больше числа, стоящего на втором месте, мы получим одноместный предикат от переменной x, означающий «Существует натуральное число, которое больше x» (этот предикат, очевидно, тождественно истинен). Если мы теперь подставим в формулу $\exists z F(z,x)$ вместо переменной x переменную y и в полученной формуле $\exists z F(z,y)$ заместим предикатный символ F тем же самым двуместным предикатом, мы получим тот же одноместный предикат, что и раньше, но от переменной y. Однако если мы подставим в формулу $\exists z F(z,x)$ вместо переменной x переменную z и в полученной формуле $\exists z F(z,z)$ заместим предикатный символ F тем же двуместным предикатом, что и прежде, то получится уже не предикат, а предложение (очевидно, ложное) «Существует такое натуральное число, которое больше самого себя». Произошло это потому, что свободное вхождение заменяемой переменной x попало в область действия квантора по той переменной, на которую мы ее заменили, так что после замены свободное вхождение стало связанным.

В дальнейшем мы будем подставлять в формулу одну переменую вместо другой лишь в том случае, когда в данной формуле ни одно свободное вхождение заменяемой переменной не находится в области действия квантора по той переменной, на которую мы ее заменяем. Такую подстановку мы будем называть *корректной*.

Понятно, что если переменная y вообще не входит в формулу $\alpha(x)$, то подстановка переменной y вместо переменной x в формулу $\alpha(x)$ корректна. Для упрощения формулировок полезно также считать, что любая формула $\alpha(x)$ получается из самой себя подстанокой переменной x вместо себя самой. Такая подстановка, разумеется, корректна.

---

[1] Таким обозначением можно пользоваться и тогда, когда формула $\alpha(x)$ не содержит свободных вхождений x: в этом случае формула $\alpha(y)$ совпадает с $\alpha(x)$.

2. Теперь мы можем сформулировать новые правила, которые мы присоединим к системе правил исчисления естественного вывода:

12) Если $M \vdash \alpha(x)$ и переменная x не входит свободно ни в одну формулу из M, то $M \vdash \forall x \alpha(x)$ (*введение общности*);

13) Если подстановка переменной y вместо переменной x корректна, то $\forall x \alpha(x) \vdash \alpha(y)$ (*удаление общности*);

14) Если подстановка переменной y вместо переменной x корректна, то $\alpha(y) \vdash \exists x \alpha(x)$ (*введение существования*);

15) Если $M, \alpha(x) \vdash \gamma$ и переменная x не входит свободно ни в одну формулу из M и в формулу γ, то $M, \exists x \alpha(x) \vdash \gamma$ (*удаление существования*).

Сокращенно эти правила будут обозначаться В$\forall$, У$\forall$, В$\exists$, У$\exists$.

Правила У$\forall$ и В$\exists$ — безусловные, В$\forall$ и У$\exists$ — условные.

Пояснение. Элементарные шаги дедуктивного рассуждения, которые производятся по только что сформулированным правилам (ср. пункт 3 главы 8), состоят в следующем:

если, фиксировав *произвольный* элемент заданного множества, мы доказали, что он (при некотором условии M) обладает свойством A, то мы можем заключить, что этим свойством (при условии M) обладают *все* элементы данного множества (введение общности);[2]

из утверждения «Все элементы данного множества обладают свойством A» следует, что для любого элемента y этого множества справедливо утверждение «y обладает свойством A» (удаление общности);

из справедливости утверждения «y обладает свойством A» хотя бы для одного элемента y заданного множества вытекает утверждение «В данном множестве существует элемент, обладающий свойством A» (введение существования);

если для фиксированного, но *произвольного* элемента y заданного множества из того, что он обладает свойством A, следует (при условии M) утверждение C, то это утверждение будет следовать (при условии M) также из *существования* в данном множестве элемента, обладающего свойством A (удаление существования).

[2] Еще до появления логических исчислений выдающийся логик Дж. Ст. Милль (о нем см. ниже, в главе 12) сформулировал это правило (правда, в менее четком и менее общем виде) следующим образом: «Если на основании наблюдения и опыта мы можем заключить к одному новому случаю, то можно заключить и к неопределенному числу их».

Содержащееся в правилах В$\forall$ и У$\exists$ требование, чтобы переменная x не входила свободно в формулы из M, обеспечивает произвольность элемента x: если бы какая-нибудь формула $\beta(x) \in M$ содержала свободные вхождения x, то речь шла бы уже не о произвольном x, а только о таком, который удовлетворяет условию $\beta(x)$. Понятно, почему в правиле У$\exists$ переменная x не должна входить свободно также и в γ: в противном случае выводимость $M, \exists x\alpha(x) \vdash \gamma$ будет означать только то, что если элемент x обладает свойством A, то *тот же самый* x должен обладать и свойством C. О смысле требования, чтобы в правилах У$\forall$ и В$\exists$ подстановка y вместо x была корректной, мы уже говорили: при несоблюдении этого требования $\alpha(y)$ не обязательно будет тем же предикатом, что и $\alpha(x)$.

Задача. Убедитесь, что при отказе от ограничительного требования в одном из новых правил стали бы доказуемыми (без изменения остальных правил) следующие формулы:

$\forall y(F(y) \to \forall xF(x))$ — при отказе от требования в правиле В$\forall$;
$\forall x\exists yF(x, y) \to \exists yF(y, y)$ — при отказе от требования в правиле У$\forall$;
$\forall yF(y, y) \to \exists x\forall yF(x, y)$ — при отказе от требования в правиле В$\exists$;
$\forall x(\exists xF(x) \to F(x))$ — при отказе от требования в правиле У$\exists$.

Из каждой формулы этой задачи можно получить ложное предложение, заместив предикатный символ подходящим конкретным предикатом. Заместим, например, в первой формуле предикатный символ $F(x)$ предикатом, определенным на множестве целых чисел и означающим $x = 0$. Если бы полученное предложение $\forall y(y = 0 \to \forall x(x = 0))$ было истинно, это означало бы, что предикат $y = 0 \to \forall x(x = 0)$ принимает значение *И* для каждого значения y, в том числе для $y = 0$; но импликация $0 = 0 \to \forall x(x = 0)$ очевидным образом ложна. (Истинность ее означала бы, что все целые числа равны нулю.) Аналогичные результаты можно получить, если заместить во второй формуле символ $F(x, y)$ предикатом, означающим $x < y$ (получится предложение, означающее, что существует целое число, меньшее самого себя), или в третьей заместить тот же символ предикатом, означающим $x = y$ (получится предложение, означающее, что существует целое число, равное всем целым числам), или в четвертой заместить $F(x)$ тем же предикатом, что и в первой (получится предложение, также означающее, что все целые числа равны нулю). (Все предикаты можно считать определенными на множестве целых чисел; подробности предоставляются читателю.)

Замечание. Если вспомнить, что кванторы общности и существования можно понимать как «бесконечную конъюнкцию» и «бесконечную дизъюнкцию» (см. замечание в пункте 3 главы 7), то станет ясно, что правила введения и удаления общности и существования — это, в сущности, распространенные на «бесконечный случай» правила введения и удаления конъюнкции и дизъюнкции. (Чтобы убедиться в этом для правила ВК, нужно заметить, что оно равносильно следующему условному правилу: если $M \vdash \alpha$ и $M \vdash \beta$, то $M \vdash \alpha \,\&\, \beta$.)

3. В деревьях вывода применение новых правил изображается аналогично применению старых. Именно: для безусловных правил В$\exists$ и У$\forall$ соответствующие элементарные шаги вывода изображаются точно так же, как для прочих безусловных правил; сходным образом изображается применение правила В$\forall$ — ему отвечает горизонтальная черта, сверху от которой пишется формула $\alpha(x)$ и снизу формула $\forall x\alpha(x)$, однако в отличие от безусловных правил здесь нужно следить, чтобы зеленые листья дерева с корнем $\alpha(x)$ не содержали свободных вхождений переменной x; применение правила У$\exists$ изображается аналогично применению УД — ему отвечает горизонтальная черта, снизу от которой записывается формула γ, а сверху — $\exists x\alpha(x)$ и та же формула γ, причем она должна быть корнем дерева, среди зеленых листьев которого имеются формула $\alpha(x)$ и все формулы, составляющие множество M; при «достройке» меньшего дерева до большего лист $\alpha(x)$ увядает.

Перейдем теперь к примерам выводов с применением новых правил.

Во всех примерах буквы x и y будут означать произвольные переменные.

Пример 1. $\forall x\forall y\alpha(x,y) \vdash \forall y\forall x\alpha(x,y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y\alpha(x,y)}{\forall y\alpha(x,y)}\,\text{У}\forall}{\alpha(x,y)}\,\text{У}\forall}{\forall x\alpha(x,y)}\,\text{В}\forall}{\forall y\forall x\alpha(x,y)}\,\text{В}\forall$$

Пример 2. $\exists x\exists y\alpha(x,y) \vdash \exists y\exists x\alpha(x,y)$.

$$4\;\dfrac{3\;\dfrac{2\;\dfrac{1\;\dfrac{[\alpha(x,y)](3)}{\exists x\alpha(x,y)}\,\text{В}\exists}{\exists y\exists x\alpha(x,y)}\,\text{В}\exists \qquad [\exists y\alpha(x,y)](4)}{\exists y\exists x\alpha(x,y)}\,\text{У}\exists \qquad \exists x\exists y\alpha(x,y)}{\exists y\exists x\alpha(x,y)}\,\text{У}\exists$$

Пример 3. $\forall x\neg\alpha(x) \vdash \neg\exists x\alpha(x)$.

$$4\,\dfrac{3\,\dfrac{2\,\dfrac{1\,\dfrac{\forall x\neg\alpha(x)}{\neg\alpha(x)}\,\text{У}\forall \qquad [\alpha(x)](3)}{\text{Л}}\,\text{УО} \qquad [\exists x\alpha(x)](4)}{\text{Л}}\,\text{У}\exists}{\neg\exists x\alpha(x)}\,\text{ВО}$$

Пример 4. $\neg\exists x\alpha(x) \vdash \forall x\neg\alpha(x)$.

$$4\,\dfrac{3\,\dfrac{2\,\dfrac{1\,\dfrac{[\alpha(x)](3)}{\exists x\alpha(x)} \qquad \neg\exists x\alpha(x)}{\text{Л}}}{\neg\alpha(x)}}{\forall x\neg\alpha(x)}$$

Пример 5. $\exists x\neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\alpha(x)$.

$$4\,\dfrac{3\,\dfrac{2\,\dfrac{1\,\dfrac{[\forall x\alpha(x)](3)}{\alpha(x)} \qquad [\neg\alpha(x)](4)}{\text{Л}}}{\neg\forall x\alpha(x)} \qquad \exists x\neg\alpha(x)}{\neg\forall x\alpha(x)}$$

Пример 6*. $\neg\forall x\alpha(x) \vdash \exists x\neg\alpha(x)$.

$$\begin{array}{c} k\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} 3\,\dfrac{\dfrac{1\,\dfrac{[\neg\alpha(x)](3)}{\exists x\neg\alpha(x)} \qquad [\neg\exists x\neg\alpha(x)](k)}{\text{Л}}}{\neg\neg\alpha(x)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha(x) \end{array}}{\forall x\alpha(x)} \qquad \neg\forall x\alpha(x)}{\text{Л}}}{\neg\neg\exists x\neg\alpha(x)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \exists x\neg\alpha(x) \end{array}$$

Опущенные фрагменты этого дерева (замененные пунктирными линиями) аналогичны примеру 1 из главы 9. Шагу, на котором устраняется промежуточное допущение $\neg\exists x \neg\alpha(x)$, для большей ясности приписан условный номер k.

Неконструктивность последней из доказанных выводимостей означает, что если мы доказали, что некоторым свойством не могут обладать все элементы какого-то множества, отсюда еще не вытекает, что мы можем указать пример элемента, не обладающего этим свойством. Это можно проиллюстрировать следующим примером. Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого уравнения вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Создатель теории множеств Г. Кантор (Georg Cantor, 1845—1918) дал простое и изящное доказательство того факта, что не все действительные числа — алгебраические, установив, что алгебраических чисел в некотором смысле «меньше», чем всех действительных.[3] Отсюда следует, что существуют неалгебраические числа (математики называют их трансцендентными). Но такое доказательство существования трансцендентных чисел неконструктивно: из него не получается ни одного конкретного примера трансцендентного числа. Конструктивное доказательство было дано Ж. Лиувиллем (Joseph Liouville, 1809—1882): он установил, что играющие в математике важную роль числа e и π трансцендентны. Это доказательство, однако, весьма сложно.

Другой пример: если о каком-то русском писателе мы знаем из достоверных источников, что он писал не только по-русски, но ни одно его произведение, написанное не на русском языке, не сохранилось, то мы не можем утверждать, что располагаем конструктивным доказательством существования таких произведений.

Читателю рекомендуется, учитывая замечание в конце пункта 2 этой главы, убедиться, что доказательства выводимостей примеров 3, 4 и 5 совершенно аналогичны доказательствам выводимостей примеров 2, 3 и 4 из главы 9. (Но для выводимости примера 6 мы дали доказательство, непохожее на пример 5 из главы 9 и более сложное. Полезно попытаться объяснить, почему аналогия здесь «не проходит», а также дать для примера 5 из главы 9 доказательство, аналогичное только что приведенному для примера 6.)

[3] Множество алгебраических чисел, так же как и множество всех действительных чисел, бесконечно; но бесконечные множества тоже можно сравнивать «по числу элементов» — это одна из самых глубоких идей Кантора.

Если мы вспомним теперь определение дедуктивной эквивалентности формул (глава 8, пункт 8) и основные равносильности логики предикатов (глава 7, пункт 3), то мы увидим, что в примерах 1—6 мы фактически доказали дедуктивную эквивалентность левых и правых частей основных равносильностей групп I и II.[4] То же самое можно сделать и для равносильностей групп III и IV.

Выводимости следующих восьми примеров будут отвечать равносильностям группы III. Из них выводимости примеров 8—13 имеют место лишь при условии, что формула β не содержит свободных вхождений переменной x; выводимости примеров 7 и 13 справедливы без ограничений.

Пример 7. $\forall x(\alpha(x)\,\&\,\beta) \vdash \forall x\alpha(x)\,\&\,\beta$.

Пример 8. $\forall x\alpha(x)\,\&\,\beta \vdash \forall x(\alpha(x)\,\&\,\beta)$.

Пример 9*. $\forall x(\alpha(x) \vee \beta) \vdash \forall x\alpha(x) \vee \beta$.

Пример 10. $\forall x\alpha(x) \vee \beta \vdash \forall x(\alpha(x) \vee \beta)$.

Пример 11. $\exists x(\alpha(x)\,\&\,\beta) \vdash \exists x\alpha(x)\,\&\,\beta$.

Пример 12. $\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta \vdash \exists x(\alpha(x)\,\&\,\beta)$.

Пример 13. $\exists x(\alpha(x) \vee \beta) \vdash \exists x\alpha(x) \vee \beta$.

Пример 14. $\exists x\alpha(x) \vee \beta \vdash \exists x(\alpha(x) \vee \beta)$.

Мы докажем сейчас выводимости примеров 7, 9, 11 и 12. (Остальные четыре читатель может попытаться доказать самстоятельно.)

Доказательство выводимости примера 7:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\alpha(x)\,\&\,\beta)}{\alpha(x)\,\&\,\beta}}{\alpha(x)}}{\forall x\alpha(x)} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(\alpha(x)\,\&\,\beta)}{\alpha(x)\,\&\,\beta}}{\beta}}{\forall x\alpha(x)\,\&\,\beta}$$

Доказательство выводимости примера 9:

[4] Для равносильностей группы I мы доказали выводимость только в одну сторону, но этого достаточно, т. к. переменные x и y равноправны.

$$5\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha(x)](5)\qquad[\neg\beta](11)}{\alpha(x)}\,\text{ТВ}\qquad 3\ \cfrac{2\ \cfrac{[\beta](5)[\neg\beta](11)}{\textit{Л}}\,\text{УО}}{\alpha(x)}\,\text{ДС}\qquad 4\ \cfrac{\forall x(\alpha(x)\vee\beta)}{\alpha(x)\vee\beta}\,\text{У}\forall}{\alpha(x)}\,\text{УД}$$

$$11\ \cfrac{7\ \cfrac{6\ \cfrac{\alpha(x)}{\forall x\alpha(x)}\,\text{В}\forall}{\forall x\alpha(x)\vee\beta}\,\text{ВД}\qquad 9\ \cfrac{8\ \cfrac{\forall x(\alpha(x)\vee\beta)[\beta](11)}{\beta}\,\text{ТВ}}{\forall x\alpha(x)\vee\beta}\,\text{ВД}\qquad 10\ \cfrac{}{\beta\vee\neg\beta}\,\text{ИТ}}{\forall x\alpha(x)\vee\beta}\,\text{УД}$$

Примечание. Часть последнего дерева, отвечающая шагам 6—11, по техническим причинам (для того, чтобы дерево поместилось на странице) сдвинута влево, так что под чертой, отвечающей шагу 5, оказались три формулы (на правильном рисунке там должна быть только формула $\alpha(x)$).

Доказательство выводимости примера 11:

$$5\ \cfrac{4\ \cfrac{2\ \cfrac{1\ \cfrac{[\alpha(x)\,\&\,\beta](5)}{\alpha(x)}\,\text{УК}}{\exists x\alpha(x)}\,\text{В}\exists\qquad 3\ \cfrac{[\alpha(x)\,\&\,\beta](5)}{\beta}\,\text{УК}}{\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta}\,\text{ВК}\qquad \exists x(\alpha(x)\,\&\,\beta)}{\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta}\,\text{У}\exists$$

Доказательство выводимости примера 12:

$$5\ \cfrac{3\ \cfrac{2\ \cfrac{1\ \cfrac{\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta}{\beta}\,\text{УК}\qquad [\alpha(x)](5)}{\alpha(x)\,\&\,\beta}\,\text{ВК}}{\exists x(\alpha(x)\,\&\,\beta)}\,\text{В}\exists\qquad 4\ \cfrac{\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta}{\exists x\alpha(x)}\,\text{УК}}{\exists x(\alpha(x)\,\&\,\beta)}\,\text{У}\exists$$

В примере 9 отсутствие свободных вхождений переменной x в формулу β необходимо для применимости правила В$\forall$, в примерах 11 и 12 — для применимости правила У$\exists$.

Неконструктивность выводимости примера 9 станет очевидной, если взять в качестве β предложение $\exists x\neg\alpha(x)$. В этом случае, если имеется регулярный способ, позволяющий для каждого элемента x_0 рассматриваемого нами множества M проверить, удовлетворяет ли он условию $\alpha(x_0)$, то мы можем для каждого $x_0 \in M$ конструктивно обосновать дизъюнкцию $\alpha(x_0) \vee \exists x\neg\alpha(x)$, т. е. обосновать один из ее членов: если предложение $\alpha(x_0)$ окажется истинным, будет обоснован первый член дизъюнкции, а если оно окажется ложным — второй. Тем самым будет конструктивно обосновано предложение $\forall x(\alpha(x) \vee \beta)$. Но отсюда не получается конструктивного обоснования дизъюнкции $\forall x\alpha(x) \vee \beta$. Чтобы в этом убедиться, обратимся к гипотезе Гольдбаха—Эйлера (см. пункт 4 главы 9). Пусть переменная x пробегает множество всевозможных четных чисел. бо́льших двух. Обозначим через $\alpha(x)$ предикат, означающий «Число x может быть представлено в виде суммы двух простых чисел», и через β — предложение $\exists x\neg\alpha(x)$. Для каждого натурального числа, очевидно, можно проверить, представляется ли оно в виде суммы двух простых чисел, так что предложение $\forall x(\alpha(x) \vee \beta)$ конструктивно обосновано и его конструктивное обоснование получается очень легко. Но конструктивное обоснование дизъюнкции $\forall x\alpha(x) \vee \beta$ было бы решением проблемы Гольдбаха—Эйлера!

Выводимости следующих двух примеров, отвечающие основным равносильностям группы IV, справедливы при условии, что переменная y не входит свободно в формулу $\alpha(x)$ и подстановка переменной y вместо x в формулу $\alpha(x)$ корректна:

Пример 15. $\forall x\alpha(x) \vdash \forall y\alpha(y)$.

Пример 16. $\exists x\alpha(x) \vdash \exists y\alpha(y)$.

Доказательство выводимости примера 15:

$$\cfrac{\cfrac{\forall x\alpha(x)}{\alpha(y)}\,\text{У}\forall}{\forall y\alpha(y)}\,\text{В}\forall$$

Выводимость примера 16 читатель может попытаться доказать сам.

Задача. Доказать следующие выводимости:
(1) $\forall x\alpha(x) \vdash \exists x\alpha(x)$;
(2) $\exists y\forall x\alpha(x, y) \vdash \forall x\exists y\alpha(x, y)$;
(3) $\forall x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x)) \vdash \forall x\alpha(x) \,\&\, \forall x\beta(x)$;
(4) $\forall x\alpha(x) \,\&\, \forall x\beta(x) \vdash \forall x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x))$;
(5) $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \vdash \exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x)$;
(6) $\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x) \vdash \exists x(\alpha(x) \vee \beta(x))$;
(7) $\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x) \vdash \forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$;
(8) $\exists x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x)) \vdash \exists x\alpha(x) \,\&\, \exists x\beta(x)$;
(9) $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash \forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$;
(10) $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash \exists x\alpha(x) \to \exists x\beta(x)$.

4. В пункте 8 главы 8 мы заметили, что понятие доказуемости в пропозициональном исчислении естественного вывода совпадает по объему с понятием тождественной истинности: формула логики предложений доказуема в этом исчислении тогда и только тогда, когда она тождественно истинна. Аналогичный факт имеет место и для предикатного исчисления естественного вывода: формула логики предикатов доказуема в нем тогда и только тогда, когда она всюду истинна. Это утверждение называется теоремой о полноте исчисления предикатов.[5]

Что касается связи между понятиями дедуктивной эквивалентности и равносильности, то она для предикатного исчисления естественного вывода такова же, как для пропозиционального: две формулы логики предикатов дедуктивно эквивалентны в (предикатном) исчислении естественного вывода тогда и только тогда, когда они равносильны.[6] (Для основных равносильностей логики предикатов, перечисленных в главе 7, мы доказали, что их левые и правые части дедуктивно эквивалентны.)

И последнее замечание: можно доказать, что, подобно пропозициональному, предикатное исчисление естественного вывода непротиворечиво.

Глава 11. Аристотелевская силлогистика

1. В этой главе мы познакомимся с основами традиционной теории дедуктивного рассуждения, ведущей свое начало от Аристотеля. В настоящее время эта теория представляет лишь исторический интерес, но в течение многих веков она занимала в европейской интеллектуальной культуре столь значительное место, что и сейчас всякому образованному человеку желательно иметь о ней хотя бы некоторое представление.

В традиционной теории, как и в современной, рассуждение разбивается на «элементарные шаги», именуемые в ней *силлогизмами*.[1] (Мы увидим далее, что в действительности они не столь элементарны, как представляется на первый взгляд.) Лучше всего разработано учение о так называемых простых категорических силлогизмах, созданное самим Аристотелем и являющееся ядром традиционной теории рассуждения. Этим учением мы и будем здесь заниматься.

---

[5] Эта теорема (в отличие от сравнительно простой теоремы о полноте исчисления предложений) доказывается довольно сложно. Первое ее доказательство было найдено К. Гёделем в 1930 г.

[6] Это утверждение является следствием теоремы о полноте исчисления предикатов.

[1] От греческого συλλογισμός — рассуждение, умозаключение.

2. Предложения, участвующие в простых категорических силлогизмах, называются в традиционной логике *категорическими суждениями*. Это предложения, описывающие простейшие взаимоотошения между свойствами предметов. Они разделяются, с одной стороны, на *утвердительные* и *отрицательные*, с другой — на *общие* и *частные*. Это дает четыре типа категорических суждений:

1. *Общеутвердительные*: «Все предметы, обладающие свойством S, обладают свойством P».

2. *Частноутвердительные*: «Некоторые предметы, обладающие свойством S, обладают свойством P».

3. *Общеотрицательные*: «Никакой предмет, обладающий свойством S, не обладает свойством P».

4. *Частноотрицательные*: «Некоторые предметы, обладающие свойством S, не обладают свойством P».

По давней традиции общеутвердительные и частноутвердительные суждения обозначают соответственно прописными латинскими буквами A и I (первой и второй гласными латинского слова *affirmo* — «утверждаю»), общеотрицательные и частноотрицательные — буквами E и O (первой и второй гласными латинского слова *nego* — «отрицаю»).

Обычно категорические суждения представляют с помощью *терминов* — слов или словосочетаний (как правило, существительных или именных групп), которые служат общими именами предметов, обладающих данными свойствами. Например, для свойства «быть человеком» соответствующий термин — «человек», для свойства «быть четным числом» — «четное число», для свойства «владеть немецким языком» — «человек, владеющий немецким языком». Получающиеся при этом предложения имеют следующий вид (T_S и T_P — термины, отвечающие свойствам S и P):

A: «Все T_S суть T_P» («Все млекопитающие — теплокровные животные», «Все взяточники — безнравственные люди», «Все прямоугольники — параллелограммы».

I: «Некоторые T_S суть T_P» («Некоторые выпускники этой школы — известные ученые», «Некоторые морские животные — млекопитающие», «Некоторые химические элементы — газы»).

E: «Ни одно T_S не есть T_P» («Ни одно млекопитающее, обитающее в Европе — не сумчатое», «Ни одно четное число, большее двух, не является простым числом», «Ни один порядочный человек — не ксенофоб»).

O: «Некоторые T_S не суть T_P» («Некоторые жители Парижа — не французы», «Некоторые позвоночные, обитающие в воде — не рыбы», «Некоторые параллелограммы — не прямоугольники»).

Часто используется также «комбинированный» способ, при котором первый член суждения представляется термином, а второй — названием свойства: «Все T_S обладают свойством P» и т. д. («Все люди смертны», «Некоторые бельгийцы говорят по-фламандски», «Ни одно теплокровное животное не дышит жабрами», «Некоторые птицы не умеют летать»).

Отметим, что при обоих способах представления категорического суждения с помощью терминов его первый член служит подлежащим (точнее, группой подлежащего, а второй — сказуемым (группой сказуемого). Их и называют соответственно *субъектом* и *предикатом* суждения.[2]

Относительно представления категорических суждений на естественном языке необходимо сделать еще два замечания. Во-первых, в общеутвердительных суждениях слово «все» часто опускается. Например, предложения «Бактерии размножаются делением», «У кошек острые когти» означают то же, что «Все бактерии размножаются делением», «У всех кошек острые когти». Иногда опускаются и слова «ни один» («ни одна», «ни одно») в общеотрицательных суждениях: например, предложение «Слоны — не хищные животные» означает то же, что «Ни один слон — не хищное животное».

Во-вторых, предложения, где идет речь о том, что некоторый единичный предмет обладает или не обладает каким-либо свойством («Волга впадает в Каспийское море», «Нынешний римский папа — поляк», «Углерод — не металл» и т. п.) являются общими суждениями: в этих предложениях свойство, отвечающее субъекту («быть Волгой», «быть нынешним римским папой», «быть углеродом») таково, что им обладает только один предмет. (Может случиться, что таково и свойство, отвечающее предикату — как в предложении «Москва — столица России».)

3. Посмотрим, как выражаются суждения типов A, I, E, O на символическом языке современной логики. На первый взгляд их перевод на этот язык кажется совершенно очевидным: если обозначить, как мы делали в главе 5, отвечающие свойствам S и P предикаты теми же

[2] Первоначально грамматические понятия подлежащего и сказуемого не отделялись от логических понятий субъекта и предиката. Их разделение произошло, видимо, не ранее XVII столетия.

буквами S и P, то наши четыре типа суждений будут представляться так:

$$(1)\qquad \begin{cases} A: & \forall x(S(x) \to P(x)); \\ I: & \exists x(S(x) \,\&\, P(x)); \\ E: & \forall x(S(x) \to \neg P(x)); \\ O: & \exists x(S(x) \,\&\, \neg P(x)). \end{cases}$$

Это простое представление нуждается, однако, в уточнении. Дело в том, что в отличие от современной логики, в которой существенным образом используется язык теории множеств (включающий в себя, в частности, понятие пустого множества) традиционная логика возникла и развивалась исключительно на базе естественного языка, а в естественном языке предложение, в котором идет речь о том или ином предмете, осмыслено лишь тогда, когда этот предмет существует; при произнесении такого предложения существование данного предмета *подразумевается.* Например, предложение «Жена Ивана работает на почте» подразумевает (независимо от того, истинно оно или ложно) истинность предложения «У Ивана есть жена».[3] В частности, в предложениях, в которых идет речь обо всех или некоторых предметах, обладающих тем или иным свойством, подразумевается, что предметы с данным свойством существуют; как говорят лингвисты, такие предложения содержат *пресуппозицию*[4] существования предметов с данным свойством. Поэтому и в традиционной логике при рассмотрении категорических суждений подразумевается, что свойства S и P для каких-то предметов имеют место, и предложения вроде «Все единороги живут в Гренландии» или «Некоторые единороги живут в Гренландии» в этой логике не рассматриваются (иначе говоря, считаются бессмысленными).

Впрочем, традиционная логика в своем понимании суждений также отошла от естественного языка, хотя и не так сильно, как современная. В естественном языке предложения с кванторными словами «все», «некоторые», «ни один» и т. п. содержат более сильную пресуппозицию, чем существование предметов с соответствующими свойствами: в них подразумевается, что предметов с этими свойствами имеется «достаточно много» и уж во всяком случае больше одного. Эта пресуппозиция

---

[3] Более точно это означает следующее: когда такое предложение произносится в условиях нормального речевого акта, говорящий уверен, что истинность предложения «У Ивана есть жена» не противоречит сведениям, имеющимся у слушающего.

[4] От латинского *praesuppositio* — «предположение, ожидание». В том же значении употребляется также термин *презумпция* (от латинского *praesumptio*, имеющего такой же смысл).

была отброшена уже традиционной логикой: она признает законными (и истинными) такие необычные для обиходной речи суждения, как «Все делители единицы равны единице», «Некоторые тверские князья были братьями Александра Невского»,[5] «Ни один русский царь по имени Михаил не отличался крепким здоровьем», «Некоторые острова, на которых родился Наполеон, не находятся в Тихом океане». Это, разумеется, подготовило почву для следующего шага — введения в рассмотрение предложений с кванторными словами, относящимися к «пустым» свойствам. С другой стороны, в естественном языке пресуппозиция существования относится только к так называемой *теме* предложения — «отправной точке» для развертывания сообщения, — которая в предложениях нейтрального стиля, выражающих категорические суждения, обычно совпадает с подлежащим (ср. старое школьное определение подлежащего как «того, о чем говорится в предложении»). В самом деле, предложения вроде «Карл Великий был гренландским императором» или «Некоторые киевские княгини были ведьмами» воспринимаются не как неправильные (противоречащие языковым нормам), а только как ложные, подобно предложениям «Карл Великий был китайским императором» или «Некоторые киевские княгини были уроженками острова Пасхи». Однако традиционная логика не делает в этом отношении различия между субъектом и предикатом и предполагает (хотя и неявно), что существуют как предметы, обладающие свойством S, так и обладающие свойством P.

Возвращаясь к представлению категорических суждений традиционной логики на современном символическом языке, мы можем теперь сказать, что все они содержат следующую пресуппозицию: ни один из предикатов S и P не может быть тождественно ложным. Иначе говоря, должно быть истинно предложение $\exists yS(y) \mathbin{\&} \exists zP(z)$. Присоединив это предложение конъюнктивно к каждому из предложений (1), мы и получим точное представление традиционных типов категорических суждений на современном символическом языке:

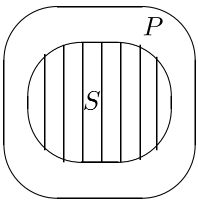
$$
(2) \qquad \begin{cases} A: & (\exists yS(y) \mathbin{\&} \exists zP(z)) \mathbin{\&} \forall x(S(x) \to P(x)); \\ I: & (\exists yS(y) \mathbin{\&} \exists zP(z)) \mathbin{\&} \exists x(S(x) \mathbin{\&} P(x)); \\ E: & (\exists yS(y) \mathbin{\&} \exists zP(z)) \mathbin{\&} \forall x(S(x) \to \neg P(x)); \\ O: & (\exists yS(y) \mathbin{\&} \exists zP(z)) \mathbin{\&} \exists x(S(x) \mathbin{\&} \neg P(x)). \end{cases}
$$

[5] На самом деле братом Александра Невского был только первый тверской князь Ярослав Ярославич.

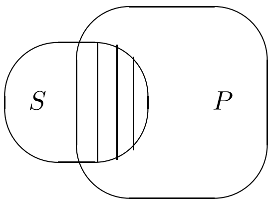
Общий для всех этих формул конъюнктивный член $\exists y S(y) \mathbin{\&} \exists z P(z)$ мы будем называть *пресуппозицией* или *подразумеваемой частью* суждения, а второй конъюнктивный член — его *основной* или *утверждаемой частью*.

Формулы (2) для частных суждений можно очевидным образом упростить: представление O равносильно $\exists z P(z) \mathbin{\&} \exists x(S(x) \mathbin{\&} \neg P(x))$, представление I — $\exists x(S(x) \mathbin{\&} P(x))$. Однако полные представления удобнее тем, что в них явно выделяются подразумеваемая и утверждаемая части.

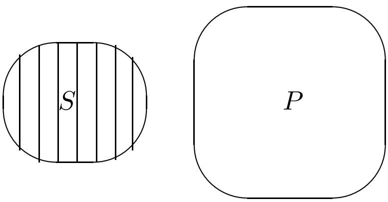
4. Если обозначить классы предметов, обладающих свойствами S и P, все теми же буквами S и P, то основная часть общеутвердительного суждения с членами S и P будет означать, что класс S содержится в классе P, частноутвердительного — что пересечение S и P не пусто, общеотрицательного — что S не пересекается с P (иначе говоря, содержится в дополнении P), и частноотрицательного — что пересечение S с дополнением P не пусто; подразумеваемая часть суждения любого типа означает, что S и P не пусты. На этом основано наглядное изображение категорических суждений с помощью так называемых диаграмм Венна (иначе — кругов Эйлера). Классы S и P изображаются при этом на чертеже кругами или иными замкнутыми фигурами, и та часть класса S, о которой идет речь в суждении (для общих суждений это весь класс S, для частноутвердительных — пересечение S с P, для частноотрицательных — пересечение S с дополнением P) выделяется штриховкой:



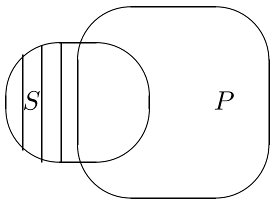
A



I



E



O

5. В традиционной логике был установлен ряд свойств категорических суждений, важнейшими из которых являются следующие два:

I. Суждения типов A и O находятся между собой в отношении противоречия, и то же верно для суждений типов I и E. Это значит, что суждение типа A с членами S и P истинно тогда и только тогда, когда суждение типа O с теми же членами ложно, и аналогично для I и E.

II. Суждения типов I и E допускают обращение, т. е. сохраняют истинность при перестановке членов.[6]

Свойство II немедленно следует из представления (2), поскольку формула $S(x)\,\&\,P(x)$ равносильна (и дедуктивно эквивалентна) формуле $P(x)\,\&\,S(x)$, и то же верно для формул $S(x) \to \neg P(x)$ и $P(x) \to \neg S(x)$. Сложнее обстоит дело со свойством I. Легко убедиться, что, например, отрицание представления (2) для типа A не равносильно соответствующему представлению для типа O. Возникает эта неравносильность из-за того, что с точки зрения современной логики предложение типа A ложно не только тогда, когда истинно предложение типа O с теми же членами, но и при нарушении пресуппозиции. (Например, если S — свойство быть натуральным числом, удовлетворяющим условию $0 < n < 1$, и P — любое свойство, то все формулы (2) дают ложные предложения.) Чтобы передать на современном символическом языке точку зрения традиционной логики, мы должны понимать отрицание суждения иначе — так, чтобы оно не затрагивало пресуппозицию. Для этого введем следующее понятие:

Пусть C — предложение одного из видов $(2)A$, $(2)I$, $(2)E$, $(2)O$. Мы будем называть *внутренним отрицанием* предложения C конъюнкцию его подразумеваемой части и отрицания его утверждаемой части.

Теперь непосредственно очевидно, что внутреннее отрицание предложения вида $(2)A$ равносильно предложению $(2)O$ с теми же членами, и то же верно при перемене местами A и O; аналогично для I и E. Тем самым свойство I обосновано.

Например, из истинности суждения «Все студенты нашей группы изучают латинский язык» следует ложность суждения «Некоторые

---

[6] В традиционной логике перестановка членов называется *простым* или *чистым* обращением (*conversio simplex*) в отличие от *обращения посредством ограничения* (*conversio per limitationem* или *per accidens*) — операции, состоящей в перестановке членов общего суждения с одновременным превращенем его в частное. Последняя операция применима к суждениям типа A (например, из истинности суждения «Все металлы — химические элементы» следует истинность суждения «Некоторые химические элементы — металлы»); это тривиальным образом вытекает из их представления в виде (2) (но не в виде (1)!).

студенты нашей группы не изучают латинский язык», и обратно; из истинности суждения «Некоторые студенты нашей группы изучают греческий язык» следует ложность суждения «Ни один студент нашей группы не изучает греческий язык», и обратно.

6. Теперь мы можем перейти к рассмотрению простых категорических силлогизмов, которые будем для краткости называть просто *силлогизмами*.

В каждом силлогизме суждение с субъектом S и предикатом P, называемое *заключением* данного силлогизма, выводится из двух суждений, называемых его *посылками*, одно из которых содержит S, а другое P. Кроме того, обе посылки содержат еще один член M (один и тот же в обеих посылках). P, S и M мы будем называть соответственно *бóльшим, меньшим* и *средним членами силлогизма*; чаще говорят, впрочем, о *большем, меньшем* и *среднем терминах*. Посылка, содержащая больший член (термин), называется *большей посылкой*, содержащая меньший — *меньшей посылкой*.

Примеры силлогизмов:

Все ученики школы №132 изучают французский язык.
Все дети Сидоровых учатся в школе №132.

Следовательно, все дети Сидоровых изучают французский язык.

Некоторые микроорганизмы не нуждаются в кислороде.
Микроорганизмы — живые существа.

Следовательно, некоторые живые существа не нуждаются в кислороде.

Бóльшая посылка может либо иметь M своим субъектом, а P — предикатом, либо, наоборот, P — субъектом и M — предикатом. Аналогичные две возможности имеются для меньшей посылки. Комбинирование этих возможностей дает четыре типа силлогизмов, или, как обычно говорят, четыре *фигуры силлогизма*:

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ MP & PM & MP & PM \\ \underline{SM} & \underline{SM} & \underline{MS} & \underline{MS} \\ SP & SP & SP & SP \end{array}$$

Здесь в каждой схеме над чертой записаны посылки, под чертой — заключение; в схематической записи каждого суждения на первом месте стоит субъект, на втором — предикат.

A priori каждое из трех суждений, входящих в силлогизм, может принадлежать к одному из четырех типов A, I, E, O. Это дает для каждой фигуры $4^3 = 64$ комбинации: $AAA, AAI, AAE, \ldots, OOO$. Всего получается, таким образом, $64 \cdot 4 = 256$ мыслимых видов, или как принято говорить, *модусов*[7] силлогизма. Но из всех этих формально возможных модусов лишь немногие *правильны*, т. е. обладают тем свойством, что из истинности обеих посылок силлогизма, построенного по данному модусу, вытекает истинность его заключения. Правильные модусы силлогизма принято обозначать специально придуманными словами из букв латинского алфавита (не имеющими собственного смысла), каждое из которых содержит три гласных; первая из них обозначает тип большей посылки, вторая — тип меньшей, третья — тип заключения. Вот списки рассматриваемых в традиционной логике правильных модусов по фигурам:

I	II	III	IV
Barbara	Cesare	Darapti	Bramantip
Celarent	Camestres	Disamis	Camenes
Darii	Festino	Datisi	Dimaris
Ferio	Baroko	Felapton	Fesapo
		Bokardo	Fresison
		Ferison	Ferison

Приведенные выше силлогизмы были построены по модусам Barbara и Bokardo.

7. Теперь наша ближайшая задача состоит в том, чтобы *обосновать* только что перечисленные модусы, т. е. убедиться, что они действительно правильны. Иначе говоря, для каждого из них нужно доказать, что если посылки построенного по этому модусу силлогизма — истинные предложения, то его заключение также истинно. Проще всего воспользоваться для этого языком классов (см. выше, пункт 4).

Классы, отвечающие большему, меньшему и среднему членам (терминам) силлогизма, мы будем обозначать соответственно через P, S и M.

Заметим прежде всего, что для любого силлогизма, независимо от модуса, подразумеваемая часть заключения очевидным образом следует из подразумеваемых частей посылок. (В самом деле, подразумеваемая часть большей посылки означает, что классы P и M не пусты, подразумеваемая часть меньшей — что S и M не пусты, подразумеваемая часть заключения — что S и P не пусты.) Поэтому нам достаточно убедиться,

[7] От латинского *modus* — «способ».

что для любого из перечисленных девятнадцати модусов из истинности посылок следует истинность основной части заключения.

Мы проведем сейчас соответствующие рассуждения для нескольких модусов, иллюстрируя их рисунками; для остальных модусов из приведенного выше списка читатель сделает это самостоятельно.

1) Модус Barbara. Основная часть большей посылки означает здесь, что класс M содержится в классе P, основная часть меньшей — что S содержится в M. Отсюда, очевидно, следует, что S содержится в P, а это и есть основная часть заключения.

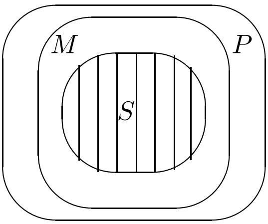
Пример был приведен выше (см. начало пункта 6).

2) Модус Celarent. Основная часть большей посылки означает, что класс M не пересекается с классом P, основная часть меньшей — что S содержится в M. Отсюда, очевидно, следует, что S не пересекается с P.

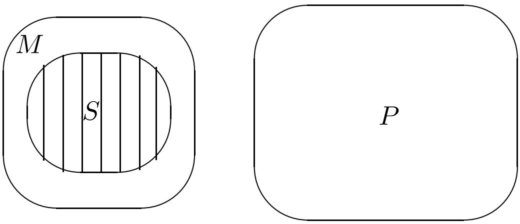
Пример.

Ни одна русская книга, напечатанная по новой орфографии, не могла быть издана до 1918 года.
Все русские книги нашей библиотеки напечатаны по новой орфографии.

Следовательно, ни одна русская книга нашей библиотеки не могла быть издана до 1918 года.



Barbara



Celarent

3) Модус Darii. Основная часть большей посылки означает, что M содержится в P, основная часть меньшей — что пересечение S с M не пусто. Отсюда следует, что пересечение S с P также не пусто, поскольку оно во всяком случае содержит пересечение S и M.

Пример.

Все выпускники школы №610 имеют хорошую математическую подготовку.
Некоторые студенты нашего факультета — выпускники школы №610.

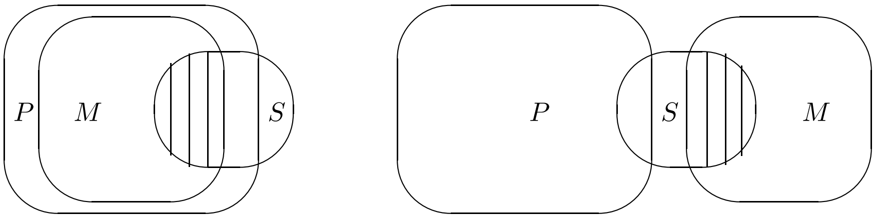
Следовательно, некоторые студенты нашего факультета имеют хорошую математическую подготовку.

4) Модус Festino. Основная часть большей посылки означает, что P не пересекается с M, основная часть меньшей — что пересечение S с M не пусто. Отсюда следует, что пересечение S с дополнением P также не пусто, поскольку оно во всяком случае содержит пересечение S и M.

Пример.

Ни один порядочный человек не злоупотребляет служебным положением.
Некоторые высокопоставленные чиновники злоупотребляют служебным положением.

Следовательно, некоторые высокопоставленные чиновники не являются порядочными людьми.



Darii Festino

5) Модус Baroko. Основная часть большей посылки означает, что P содержится в M, основная часть меньшей — что пересечение S с дополнением M не пусто. Отсюда следует, что пересечение S с дополнением P также не пусто, поскольку оно во всяком случае содержит пересечение S и дополнения M.

Пример.

Все ученые способны критически мыслить.
Некоторые люди, имеющие ученые степени, не способны критически мыслить.

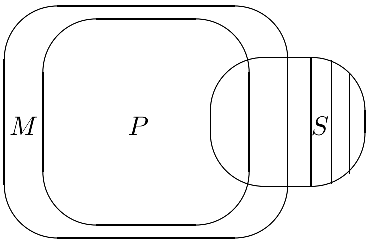
Следовательно, некоторые люди, имеющие ученые степени — не ученые.

6) Модус Disamis. Основная часть большей посылки означает, что пересечение M с P не пусто, основная часть меньшей — что M содержится в S. Отсюда следует, что пересечение S с P не пусто, поскольку оно во всяком случае содержит пересечение M и P.

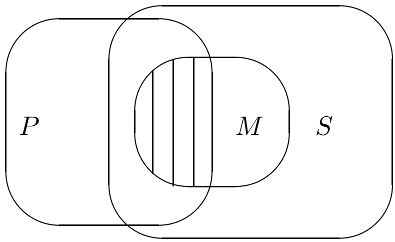
Пример.

Некоторые сотрудники Главного Методического управления — невежестенные люди.
Все сотрудники Главного Методического управления окончили высшие учебные заведения.

Следовательно, некоторые люди, окончившие высшие учебные заведения, невежественны.



Baroko



Disamis

Во всех приведенных до сих пор примерах основную часть заключения удавалось вывести из основных частей посылок, не пользуясь подразумеваемым условием непустоты классов. Но для четырех из девятнадцати модусов — Darapti, Felapton, Bramantip, Fesapo[8] — без использования этого условия обойтись нельзя. Один из них мы сейчас рассмотрим.

7) Модус Darapti. Основная часть большей посылки означает здесь, что M содержится в P, основная часть меньшей — что M содержится в S. Отсюда ввиду непустоты класса M (вытекающей как из подразумеваемой части большей посылки, так и из подразумеваемой части меньшей) следует, что пересечение S и P не пусто, поскольку оно во всяком случае содержит M.

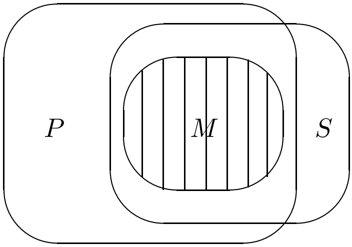
Пример.

Киты дышат легкими.
Киты — морские животные.

Следовательно, некоторые морские животные дышат легкими.

---

[8]Заметим, что это в точности те модусы, названия которых содержат букву р.



Darapti

Ясно, что условие непустоты класса M здесь существенно; отказ от него может привести к ошибочным и даже нелепым выводам. Рассмотрим, например, суждения «Все сыновья нынешнего короля Франции — брюнеты» и «Все сыновья нынешнего короля Франции — блондины». Оба они ложны ввиду ложности подразумеваемых частей (класс сыновей нынешнего короля Франции пуст). В то же время основные части обоих этих суждений истинны. (В самом деле, если обозначить через $M(x)$ и $P(x)$ предикаты, отвечающие свойствам «Быть нынешним королем Франции» и «Быть брюнетом», то основная часть первого суждения будет иметь вид $\forall x(M(x) \to P(x))$: это предложение истинно, т. к. посылка импликации $M(x) \to P(x)$ при любом x ложна. Аналогично для второго суждения.) Но если бы мы попытались сделать из них вывод по модусу Darapti (взяв, скажем, первое суждение в качестве большей посылки и второе в качестве меньшей), мы «доказали» бы, что некоторые блондины являются брюнетами.

8. Кроме перечисленных выше девятнадцати модусов, правильными являются еще пять: AAI и EAO первой фигуры, EAO и AEO второй фигуры, AEO четвертой фигуры. Их правильность тривиальным образом вытекает из правильности модусов Barbara, Celarent, Cesare, Camestres, Camenes, поскольку из истинности суждения типа A вытекает истинность суждения типа I с теми же членами (если верно, что все T_S суть T_P, то тем более верно, что некоторые T_S суть T_P), и то же справедливо для E и O.[9] Но для реальных рассуждений эти модусы

[9] В обиходной речи в условиях нормального речевого акта предложение вида «Некоторые T_S суть T_P» не может быть произнесено, если говорящий уверен, что на самом деле все T_S суть T_P. Но его можно произнести, если говорящий, будучи уверен, что хотя бы некоторые T_S суть T_P, не знает, верно ли это для всех T_S; и если потом будет установлено, что в действительности все T_S суть T_P,

никакого значения не имеют: незачем доказывать более слабое утверждение, если можно в точности так же доказать более сильное. Поэтому указанные пять модусов в традиционной логике не рассматриваются.

Остальные 232 модуса — неправильные. Убедиться в этом в принципе можно простым перебором, приведя для каждого из них противоречащий пример. (Для каждого модуса достаточно одного примера!) Рассмотрим, например, модус AAI второй фигуры. По этому модусу, если бы он был правильным, из суждений «Все T_P суть T_M» и «Все T_S суть T_M» выводилось бы суждение «Некоторые T_S суть T_P», и, в частности, из истинных суждений «Млекопитающие — теплокровные животные» и «Птицы — теплокровные животные» можно было бы вывести ложное суждение «Некоторые птицы — млекопитающие».

Само собой, подбор противоречащих примеров для 232 модусов был бы крайне скучным и утомительным занятием. Но тот, кто захочет лично убедиться, что традиционная логика права, отвергая эти модусы, легко заметит, что перебор можно существенно сократить. Прежде всего, поскольку из правильности модуса XYA некоторой фигуры следует правильность модуса XYI той же фигуры (этим мы пользовались выше), из неправильности модуса XYI следует неправильность модуса XYA; аналогично для XYO и XYE. Уже одно это простое соображение сокращает перебор почти вдвое. Но точно так же неправильность одного из модусов AYZ, EYZ, XAZ, XEZ той или иной фигуры влечет соответственно неправильность модуса IYZ, OYZ, XIZ или XOZ этой фигуры. Кроме того, работа существенно облегчается, если пользоваться языком классов и соответствующими рисунками. В подробности мы вдаваться не будем; такого рода работу проще и полезнее проделать самому.[10]

9. Вместо того, чтобы обосновывать правильные модусы на языке классов, мы могли бы для каждого из них построить вывод заключения

то предложение «Некоторые T_S суть T_P» все же не считается опровергнутым. (Ср. описание значения союза «или» в главе 5.) Такого понимания частных суждений — как не противоречащих общим, но более слабых — придерживаются и традиционная логика, и современная.

[10]Интересующийся читатель может попытаться вывести следующие закономерности строения правильных модусов, приводимые обычно в учебниках традиционной логики: обе посылки не могут быть частными; обе посылки не могут быть отрицательными; если одна из посылок частная, то и заключение должно быть частным; если одна из посылок отрицательная, то и заключение должно быть отрицательным, и обратно, если заключение отрицательное, то одна из посылок должна также быть отрицательной.

из посылок в исчислении естественного вывода. (При этом посылки и заключение должны быть представлены в виде (2).) Такой способ обоснования — если делать все подробно — значительно более громоздок, но обладает важным преимуществом: он указывает в явном виде те элементарные мыслительные операции, из которых складывается умозаключение по данному модусу силлогизма. Мы ограничимся обоснованием модуса Barbara, т. е. доказательством следующей выводимости:

$$
\begin{aligned}
&(\exists y M(y) \,\&\, \exists z P(z)) \,\&\, \forall x (M(x) \to P(x)),\\
(3) \qquad &(\exists y S(y) \,\&\, \exists z M(z)) \,\&\, \forall x (S(x) \to M(x)) \vdash\\
&\vdash (\exists y S(y) \,\&\, \exists z P(z)) \,\&\, \forall x (S(x) \to P(x)).
\end{aligned}
$$

Ясно, что если вывести подразумеваемую часть заключения из подразумеваемых частей посылок и основную часть из основных частей, то выводимость (3) легко будет получить с помощью правил удаления и введения конъюнкции. Но подразумеваемая часть заключения очевидным образом выводится из подразумеваемых частей посылок с помощью тех же двух правил. Остается вывести основную часть из основных частей, т. е. доказать выводимость

$$
(4) \qquad \forall x (M(x) \to P(x)),\ \ \forall x (S(x) \to M(x)) \vdash \forall x (S(x) \to P(x)).
$$

Мы сделаем это, построив в явном виде дерево вывода:

$$
6\,\dfrac{5\,\dfrac{4\,\dfrac{2\,\dfrac{[S(x)](5) \qquad 1\,\dfrac{\forall x (S(x) \to M(x))}{S(x) \to M(x)}\text{У}\forall}{M(x)}\text{УИ} \qquad 3\,\dfrac{\forall x (M(x) \to P(x))}{M(x) \to P(x)}\text{У}\forall}{P(x)}\text{УИ}}{S(x) \to P(x)}\text{ВИ}}{\forall x (S(x) \to P(x))}\text{В}\forall
$$

Это дерево показывает, что кажущееся совсем простым умозаключение по модусу Barbara при внимательном рассмотрении оказывается — даже если не учитывать вывода подразумеваемой части заключения — составленным из шести шагов, на каждом из которых применяется элементарная мыслительная операция, отвечающая одному из правил исчисления естественного вывода (причем на одном из этих шагов вводится промежуточное допущение, впоследствии устраняемое). Подобным же образом обстоит дело и для остальных правильных модусов (для четырех из них вывод основной части заключения заведомо будет сложнее, т. к. в нем придется использовать также и подразумеваемые части посылок).

Разумеется, в реальных рассуждениях все эти элементарные шаги производятся очень быстро и автоматически, подобно тому, как автоматически производятся комплексы движений, необходимые для ходьбы или для еды с помощью ложки. (Всякий, кто внимательно понаблюдает за ребенком, когда он учится ходить или самостоятельно есть ложкой, поймет, что это далеко не так просто, как кажется взрослому, у которого давно выработался автоматизм.)

Далеко не все дедуктивные рассуждения сводятся к простым категорическим силлогизмам, однако эти силлогизмы используются и в научных, и в обиходных рассуждениях весьма широко. Когда я, увидев утром в окно сухую улицу, заключаю из этого, что ночью не было дождя, я пользуюсь силлогизмом по модусу Camestres, посылки и заключение которого можно сформулировать приблизительно так: «Всякая ночь, в течение которой был дождь, обладает тем свойством, что наутро после нее улицы мокрые» (бóльшая посылка); «Только что прошедшая ночь этим свойством не обладает»[11] (меньшая посылка); «Следовательно, только что прошедшей ночью не было дождя». Историк, заключающий по тем или иным особенностям бумаги, на которой написан некоторый документ, что этот документ составлен не ранее XVI столетия, поскольку, как ему известно, именно в этом столетии началось производство такой бумаги, пользуется силлогизмом по модусу Celarent: «Ни один документ, написанный на бумаге данного сорта, не мог быть составлен ранее XVI столетия» (бóльшая посылка); «Рассматриваемый документ написан на бумаге данного сорта» (меньшая посылка); «Следовательно, рассматриваемый документ составлен не ранее XVI столетия». Аналогичным образом рассуждает энтомолог, решая по тем или иным признакам впервые описанного им насекомого, к какому отряду, семейству и роду следует его отнести.

В каждом конкретном случае возможность воспользоваться тем или иным модусом зависит от того, удастся ли найти подходящий средний термин. Например, при датировке документа в роли среднего члена может выступать какое-либо свойство, относящееся либо к его содержанию, либо к почерку, либо к материалу, на котором он написан, либо к месту, где он обнаружен, и т. д. Успех в нахождении такого свойства зависит, конечно, от знаний исследователя, но также — и далеко не в

[11] Это суждение — общеотрицательное (см. замечания в конце пункта 2).

последнюю очередь — от его сообразительности. (Недаром Аристотель определял сообразительность как «способность мгновенно найти средний термин».)

10.

Задачи. 1) Определить модусы силлогизмов:

(а) Ни один малограмотный не годится в учителя.
Некоторые выпускники университетов малограмотны.
___
Следовательно, некоторые выпускники университетов не годятся в учителя.

(б) Все, кто разжигает национальную рознь — бесчестные и безответственные люди.
Некоторые политики разжигают национальную рознь.
___
Следовательно, некоторые политики — бесчестные и безответственные люди.

(в) Кораллы не способны самостоятельно передвигаться.
Кораллы — животные.
___
Следовательно, некоторые животные не способны самостоятельно передвигаться.

(г) У кошек острые когти.
Кошки — млекопитающие.
___
Следовательно, у некоторых млекопитающих есть острые когти.

(д) Добросовестные студенты не получают двоек.
Всякий студент, получивший двойку, огорчается.
___
Следовательно, некоторые огорченные студенты — недобросовестные.

(е) Все заказные письма регистрируются на почте.
Некоторые письма, полученные мной сегодня — заказные.
___
Следовательно, некоторые письма, полученные мной сегодня, были зарегистрированы на почте.

(ж) Все студенты обязаны сдавать экзамены.
Мой друг Ваня не обязан сдавать экзамены.
___
Следовательно, мой друг Ваня — не студент.

(з) Инертные газы не вступают в химические соединения.
Гелий — инертный газ.
___
Следовательно, гелий не вступает в химические соединения.

2) Сделать выводы из данных посылок и определить модусы полученных силлогизмов:

(а) Валлоны говорят по-французски.
Валлоны — бельгийцы.

(б) Страусы не летают.
Страусы — птицы.

(в) Металлы — химические элементы.
Железо — металл.

3) Найти ошибку в следующих умозаключениях:

(а) Все ведьмы по ночам летают на метлах.
Все ведьмы — женщины.
―――――――――――――――――――――――――――
Следовательно, некоторые женщины по ночам летают на метлах.

(б) Ни один человек — не кентавр.
У всех кентавров человеческие головы.
―――――――――――――――――――――――――――
Следовательно, некоторые существа с человеческими головами — не люди.

11. Поскольку в традиционной логике требование непустоты рассматриваемых свойств не формулировалось явно, а лишь подразумевалось, можно спорить о том, какое уточнение пресуппозиции существования лучше отвечает ее (традиционной логики) духу: в виде конъюнкции $\exists y S(y) \,\&\, \exists z P(z)$ или в более простом и более адекватном с точки зрения естественного языка виде $\exists y S(y)$ (ср. выше, пункт 3). Решающий довод в пользу нашего представления подразумеваемой части суждения в виде конъюнкции состоит в том, что при представлении в виде $\exists y S(y)$ не удается обосновать все традиционные правильные модусы силлогизма. При таком представлении подразумеваемая часть заключения следует из подразумеваемых частей посылок только для тех фигур, где субъект заключения является в меньшей посылке также субъектом, т. е. для первой и второй; что же касается третьей и четвертой фигур, то там при условии, что меньшая посылка — утвердительное суждение, подразумеваемую часть заключения можно получить из этой посылки с использованием ее основной части (действительно, в этом случае меньшая посылка представляется в виде $\exists y M(y) \,\&\, \forall x(M(x) \to S(x))$ или $\exists y M(y) \,\&\, \exists x(M(x) \,\&\, S(x))$; из той и другой формулы очевидным образом следует $\exists y S(y)$). Этому условию удовлетворяют все модусы третьей фигуры, а в четвертой все, кроме одного — Camenes. В нем при «одночленном» представлении пресуппозиций подразумеваемая часть заключения не следует из посылок, и по этому модусу из суждений с «непустыми» субъектами можно вывести суждение с «пустым» субъектом, например:

Тигры — хищные животные.
Ни одно хищное животное — не единорог.
―――――――――――――――――――――――――――――――――
Следовательно, ни один единорог — не тигр.

По-видимому, в логике, которая стремилась бы в наибольшей возможной степени остаться верной духу естественного языка, модус Camenes не должен был бы считаться правильным.[12]

[12]Нельзя не вспомнить в этой связи, что многие логики считают все вообще силлогизмы четвертой фигуры искусственными и бесполезными.

Часть IV

Логика научного познания

Глава 12. Индуктивная логика Бэкона и Милля

1. Дедуктивные рассуждения, которыми мы занимались в предыдущих четырех главах, приложимы далеко не во всех тех случаях, когда из имеющихся знаний нужно получить новые; и в науке, и в обыденной жизни часто приходится пользоваться рассуждениями иных типов, не обладающими свойством абсолютной достоверности. Особенно широко используются *индуктивные*[1] рассуждения, состоящие в том, что из справедливости некоторого числа суждений о единичных фактах делается заключение о справедливости общего суждения (иначе говоря, из того, что некоторые элементы класса обладают каким-то свойством, делается заключение, что им обладают все его элементы), или из справедливости менее общего суждения делается заключение о справедливости более общего. (Примером может служить рассуждение путешественника, который, приехав в незнакомую страну и заметив, что у всех встреченных им местных жителей светлые волосы, заключает из этого, что все вообще жители этой страны светловолосы.) Индуктивные рассуждения не удается описать столь же точным и формальным образом, как дедуктивные, и вопрос об их природе и об их роли в человеческом познании до сих пор служит предметом споров. Этот вопрос — тесно связанный с вопросом о том, как вообще устроены рассуждения, используемые в научном познании мира — лучше всего рассмотреть в историческом плане.

2. В Средние века логика, основанная на трактатах Аристотеля, стала важной составной частью так называемой схоластической (т. е.

---

[1] От латинского *inductio* — «наведение».

«школьной») учености.[2] Как известно, ученые люди тех времен считали главным или даже единственным источником истинного знания божественное откровение и учения древних мудрецов, т. е. то, что написано в старых книгах, освященных авторитетом церкви и давней традицией. Правильный путь познания вещей они видели в изучении не самих этих вещей, а того, что написано о них в авторитетных книгах. Но из написанного в книгах разрешалось дедуктивным путем выводить следствия, и для этого идеальным средством представлялась аристотелевская логика, которой средневековые ученые — «схоласты» — уделяли большое внимание. Нужно сказать, что они внесли в логику определенный вклад, и их наследие оказало известное влияние на ее дальнейшее развитие.[3] Но в целом схоластическая ученость была безнадежно далека от действительности, и с наступлением Нового времени, когда начался бурный расцвет эмпирических наук, она стала казаться попросту смешной; слово «схоластика» сделалось с тех пор обозначением всякого бесплодного умствования. Средневековое представление о древней мудрости как главном источнике истины и силлогизме как единственно возможном способе рассуждения сменилось представлением, согласно которому единственный источник знания — опыт, т. е. наблюдение и эксперимент. Ученый наблюдает факты и, исходя из множества фактов, делает *обобщения* — иначе говоря, из большого числа обоснованных прямым наблюдением суждений о свойствах единичных предметов и явлений выводит суждения об общих свойствах предметов и явлений того или иного типа. Таким путем и возникают научные теории.

Первым четко сформулировал это представление английский философ Ф. Бэкон (Francis Bacon, 1561—1626) в опубликованной в 1620 г. книге «Новый Органон» («Novum Organum»).[4] «Открытия новых вещей — говорит Бэкон в этой книге — дóлжно искать от света природы, а не от мглы древности.» Но ученый не должен быть просто собирателем фактов, как не должен и заниматься чистым умозрением; его задача — на основе фактов разрабатывать теории. Эту мысль Бэкон выражает в образной форме: «Те, кто занимался наукой, были или эмпириками,

---

[2] Слова «схоластика», «схоластический» происходят от греческого σχολή — «школа». (Отсюда же и наше слово с тем же значением.)

[3] К этому наследию принадлежит, например, правило Дунса Скота, с которым мы неоднократно сталкивались в предыдущем изложении.

[4] Слово «Органон» (греческое ὄργανον — «орудие, инструмент, средство») — было общеупотребительным названием совокупности логических трактатов Аристотеля. Таким образом, прямое противопоставление новой и старой логики содержится уже в названии книги.

или догматиками. Эмпирики, подобно муравью, только собирают и довольствуются собранным. Рационалисты, подобно паукам, производят ткань из самих себя. Пчела же избирает средний способ: она извлекает материал из садовых и полевых цветов, но располагает и изменяет его по своему умению. Не отличается от этого и подлинное дело философии [то есть науки]. Ибо она не основывается только или преимущественно на силах ума и не откладывает в сознании нетронутым материал, извлеченный из естественной истории и механических опытов, но изменяет его и перерабатывает в разуме.»[5] Есть и другой яркий образ: «Ученый усердно собирает виноград с бесчисленных зрелых лоз, чтобы выжать из него вино науки.» Выжать — значит обобщить. Но при этом Бэкон предостерегает от произвольных обобщений: «Человеческий разум в силу своей склонности легко предполагает в вещах больше порядка и единообразия, чем их находит. И в то время как в природе многое единично и не имеет себе подобия, он придумывает параллели, соответствия и отношения, которых нет.»

Схоластическую формальную логику Бэкон резко критикует: «Логика, которая теперь имеется, бесполезна для открытия новых знаний.» Силлогизм, по его мысли, «не приложим к принципам знаний, $\langle\ldots\rangle$ т. к. далеко не соответствует тонкости природы. Поэтому он подчиняет себе мнения, а не предметы». «Силлогизмы состоят из предложений — говорит он в следующем афоризме,[6] — предложения из слов, а слова суть знаки понятий. Поэтому если сами понятия, составляя основу всего, спутаны и необдуманно отвлечены от вещей, то нет ничего прочного в том, что построено на них.» Между тем такие понятия, как «субстанция», «качество», «действие», «густое», «разреженное», «порождение», «разложение», «притяжение», «отталкивание» и т. п. (а именно этого рода понятиями оперировали тогда логика и физика) «вымышлены и плохо определены».

---

[5] Нельзя не вспомнить в этой связи слова, сказанные два с половиной столетия спустя А. И. Герценом: «Бакон Веруламский давным-давно уже разделил ученых на *пауков* и *пчел*. Есть эпохи, в которых пауки решительно берут верх, и тогда развивается бездна паутины — но мало собирается меду. Для меда надобны липовые рощи, цветистые поля и пуще всего крылья и общежительный образ мыслей. Для паутины достаточен тихий угол, невозмутимый досуг, много пыли и безучастие ко всему, кроме внутреннего процесса.

В обыкновенное время по пыльной дороге еще можно плестись, дремля и не обрывая паутины, но чуть пошло через кочки да целиком — беда.»

В недавнее время у нас развилась бездна паутины, потом пошло через кочки, старая паутина оборвалась — но пауки не унывают и быстро плетут новую. . .

[6] «Новый Органон» написан в форме собрания афоризмов.

Основной метод науки, по мнению Бэкона, есть *индукция* — «наведение», т. е. умозаключение от частного к общему. Правильным путем для «отыскания и открытия истины» он считает тот, который «выводит аксиомы из ощущений и частностей, поднимаясь непрерывно и постепенно, пока наконец не приходит к наиболее общим аксиомам.» «Мы извлекаем не практику из практики и опыты из опытов (как эмпирики), а причины и аксиомы из практики и опытов, и из причин и аксиом — снова практику и опыты.» При этом опыты должны быть не случайными и беспорядочными, а целенаправленно организованными: «Смутный и руководящийся лишь собой опыт $\langle\ldots\rangle$ есть чистое движение на ощупь и скорее притупляет ум людей, чем осведомляет их. Но когда опыт пойдет вперед по определенному закону последовательно и беспрерывно, то можно будет ожидать от наук чего-либо лучшего.» «Истинный $\langle\ldots\rangle$ метод опыта сначала зажигает свет, потом указывает светом дорогу: он начинает с упорядоченного и систематического опыта $\langle\ldots\rangle$ и выводит из него аксиомы, а из построенных аксиом — новые опыты.»

Этими революционными идеями Бэкон впервые вывел логику за рамки круга идей, очерченного в трудах Аристотеля, и положил начало исследованиям, в которых логика рассматривается в более широком аспекте — как *логика научного познания*. Отличительной чертой этих исследований является то, в них изучаются не только дедуктивные рассуждения, но и рассуждения более общего вида. (Более конкретно об их природе мы будем говорить в следующей главе.)

3. Одним из самых выдающихся ученых, развивавших после Бэкона логику научного познания, был его соотечественник Дж. Ст. Милль (John Stuart Mill, 1806—1873).[7] Свои воззрения на логику и результаты своих логических исследований он подытожил в фундаментальном труде «Система логики силлогистической и индуктивной. Изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования» («A system of logic, ratiocinative and inductive. Being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation»), первое издание которого вышло в свет в 1843 г.

[7] Милль был чрезвычайно разносторонним ученым и общественным деятелем. В свое время пользовались широкой известностью его труды по политической экономии. Его книги «О свободе» и «Размышления о представительном правлении» полностью сохраняют свое значение и сейчас; их должен изучить всякий, кто хочет понять, что такое действительно демократическое гражданское общество. К сожалению, эти книги в нашей стране малоизвестны (хотя существуют их русские переводы).

Как и Бэкон, Милль считает основным методом рассуждения индукцию, которую он определяет следующим образом: «Индукция есть такой умственный процесс, при помощи которого мы заключаем, что то, что нам известно за истинное в одном частном случае или в нескольких случаях, будет истинным и во всех случаях, сходных с первым в некоторых определенных отношениях. Другими словами, индукция есть процесс, при помощи которого мы заключаем, что то, что истинно относительно нескольких индивидуумов класса, истинно также и относительно всего класса, или что то, что истинно в известное время, будет истинно, при подобных же обстоятельствах, и во всякое время.» Исходя из такого понимания индукции, Милль приходит к выводу, что фактически все умозаключения являются индуктивными, т. е. производятся «от частного к частному». Способ, которым он обосновывает это положение, можно уяснить себе на следующем приводимом им примере. Рассмотрим умозаключение, считающееся обычно силлогизмом по модусу Barbara:

Все люди смертны.
Герцог Веллингтон — человек.

Следовательно, герцог Веллингтон смертен.

(Здесь подразумевается, очевидно, нынешний герцог Веллингтон, который еще жив.)

В этом типичном дедуктивном умозаключении из суждения о классе («Все люди смертны») выводится суждение об одном из представителей этого класса («Герцог Веллингтон смертен»). Но на самом деле, как полагает Милль, умозаключение было сделано уже тогда, когда из множества частных случаев мы сделали вывод, что все люди смертны. Иначе говоря, из множества известных нам частных случаев мы вывели еще один частный случай, не содержащийся среди тех, из которых был сделан вывод. Но точно таким же образом мы можем вывести и любой другой частный случай, а, значит, можем вывести и общее суждение, обобщающее все эти случаи.[8] Таким образом, все настоящие умозаключения, по Миллю, — индуктивные, а дедуктивные рассуждения служат только для проверки индукции и сами по себе нового знания не дают. Тем не менее обойтись без них нельзя, как нельзя обойтись без общих имен и предложений. «Силлогизм играет ⟨...⟩ ту роль, какую играют вообще все общие имена и предложения. Они позволяют нам делать

[8] Фактически Милль приходит здесь к правилу введения общности (ср. сноску 2 к главе 10).

наведения один раз навсегда: достаточно одного тщательного опыта, и результат его можно формулировать в виде общего предложения.»

4. Главной задачей индукции Милль считает «установление того, какие именно законы причинной связи существуют в природе, т. е. определение причин каждого следствия и следствий каждой причины». Анализируя служащие этой цели методы индуктивных рассуждений, он выделяет четыре основных метода установления причинных связей: «метод сходства» (Method of Agreement[9]), «метод различия» (Method of Difference), «метод остатков» (Method of Residues) и «метод сопутствующих изменений» (Method of Concomitant Variations). Часто используется также, как указывает Милль, «соединенный метод сходства и различия». Сущность этих методов он сформулировал в виде пяти правил. Мы приведем сейчас эти правила, сопровождая их примерами.

Первое правило (*метод сходства*). Если два или более случаев подлежащего исследованию явления имеют общим лишь одно обстоятельство, то это обстоятельство, в котором только и согласуются эти случаи, есть причина (или следствие) данного явления.

Метод сходства широко использовался и используется еще на донаучной стадии человеческого познания. Так, например, люди много раз видели, что дерево загорается, когда в него ударяет молния, и сделали отсюда вывод, что молния является причиной появления огня; заметив, что в засушливые годы на разных почвах и при разных обстоятельствах культурные растения погибают или дают плохие урожаи, земледельцы пришли к заключению, что причина неурожаев — засуха; видя, что при переохлаждении люди часто заболевают, врачи (и, надо полагать, не только они) уже очень давно решили, что переохлаждение («простуда») является в таких случаях причиной или одной из причин болезни. Постоянно пользуются этим методом дети; именно ему, по словам Милля, «мы обязаны почти всеми индуктивными заключениями, производимыми в ранний период жизни».

По сравнению с методами, рассматриваемыми ниже, метод сходства обладает, вообще говоря, меньшей достоверностью; известно немало случаев, когда сделанные с его помощью выводы оказывались ошибочными. (Например, из распространенности малярии в болотистых местностях был сделан ошибочный вывод, что причиной ее являются болотные испарения; такая точка зрения долго была в медицине обще-

[9] В литературе на русском языке встречаются также термины «метод согласия» и «метод совпадения».

принятой.) Поэтому в научных исследованиях метод сходства чаще всего используется в сочетании с методом различия.

Второе правило (*метод различия*). Если случай, в котором исследуемое явление наступает, и случай, в котором оно не наступает, сходны во всех обстоятельствах, кроме одного, встречающегося лишь в первом случае, то это обстоятельство, в котором только и разнятся эти два случая, есть следствие, или причина, или необходимая часть причины явления.

Примером применения метода различия могут служить классические опыты Л. Пастера (Louis Pasteur, 1822—1895), которыми была доказана невозможность самозарождения микроорганизмов. В этих опытах у колб с запаянными узкими горлышками, содержащих питательный бульон, после продолжительного кипячения отламывались концы горлышек, но у части колб горлышки предварительно изгибались на огне таким образом, чтобы в колбу не могла проникнуть пыль. Через некоторое время в колбах, доступных для пыли, развились микроорганизмы, между тем как в колбах с изогнутыми горлышками их не было. Отсюда был сделан вывод, что причиной появления микроорганизмов является попадание их в колбу с частицами пыли.[10]

Метод различия постоянно используется, когда нужно исследовать воздействие того или иного фактора на какие-либо организмы. Например, при испытании эффективности удобрения засевают два по возможности одинаковых во всех отношениях поля одинаковыми семенами и выращивают их с одинаковым уходом — за единственным исключением: одно поле (называемое опытным) удобряют испытываемым удобрением, а другое (контрольное) оставляют без него. Вообще, наличие опытной и контрольной групп испытуемых объектов — обязательное условие правильно поставленного эксперимента.

Третье правило (*соединенный метод сходства и различия*). Если два или более случаев возникновения явления имеют общим одно лишь обстоятельство, и два или более случаев отсутствия явления имеют общим только отсутствие того же самого обстоятельства, то это обстоятельство, в котором только и разнятся оба ряда случаев, есть или

[10] В аналогичных опытах, проводившихся столетием раньше итальянским естествоиспытателем Л. Спалланцани (Lazzaro Spallanzani, 1729—1799) колбы опытной группы (объяснение этого выражения см. в следующем абзаце) оставались запаянными. Эти опыты были подвергнуты критике в связи с предположением, что кипячение может лишить воздух способности содействовать самозарождению микроорганизмов.

следствие, или причина, или необходимая часть причины изучаемого явления.

Примером применения соединенного метода сходства и различия могут служить исследования итальянского зоолога Джованни Баттиста Грасси (Giovanni Battista Grassi, 1854—1925), в результате которых был обнаружен переносчик малярии. Изучая распространение в Италии различных видов комара и сопоставляя полученные данные с данными о заболеваемости малярией, он установил, что во всех обследованных им местностях, в которых встречались комары рода Anopheles, встречалась и малярия, а там, где не было этих комаров, малярии также не было. Отсюда он заключил, что именно комары рода Anopheles — переносчики малярии.

Другой пример: исследования Конрада Лоренца,[11] о которых он рассказал в первой главе книги «Так называемое зло». Он изучал жизнь прибрежных рыб Карибского моря в естественных условиях, спускаясь под воду с аквалангом. Некоторые из них ярко окрашены — Лоренц пишет об их расцветке: «...какие краски и какие невероятные сочетания красок! Можно подумать, что они подобраны нарочно, чтобы быть как можно заметнее на возможно большем расстоянии, как знамя или, лучше сказать, плакат!» У других окраска скромная, не бросающаяся в глаза. Наблюдая жизнь тех и других, Лоренц увидел, что все ярко окрашенные рыбы территориальны, т. е. каждая особь или пара занимает определенную территорию и охраняет ее от вторжения других особей того же вида, а все тускло или пастельно окрашенные живут стаями. Это привело его к заключению, что именно благодаря территориальности в процессе эволюции возникла яркая окраска, назначение которой — служить предостережением для «чужаков».

Стоит заметить, что соединенный метод сходства и различия использовался и на донаучной стадии познания. Так, люди постоянно наблюдали, что и в реках, и в озерах, и в лужах, и в любых сосудах, независимо от их материала и формы, вода на морозе превращается в лед, между тем как при более теплой погоде этого не происходит, и отсюда был сделан вывод, что причиной замерзания воды является холод.

Четвертое правило (*метод остатков*). Если из явления вычесть ту его часть, которая, как известно из прежних индукций, есть следствие

[11] Конрад Лоренц (Konrad Lorenz, 1903—1986) — величайший биолог и мыслитель XX столетия, основоположник этологии — науки о поведении животных.

некоторых определенных предыдущих, то остаток данного явления должен быть следствием остальных предыдущих.

Классический пример применения метода остатков — открытие планеты Нептун. Вскоре после того, как английский астроном У. Гершель (William Herschel, 1738—1822) открыл (в 1781 г.) седьмую планету солнечной системы — Уран, было замечено, что ее наблюдаемая орбита несколько отклоняется от расчетной, и была выдвинута гипотеза, что причиной этого отклонения является притяжение другой, еще неизвестной планеты, расположенной дальше от Солнца, чем Уран.[12] Исходя из этой гипотезы, в 1846 г. французский астроном У. Леверье (Urbain Jean Joseph Le Verrier, 1811—1877) вычислил орбиту новой планеты и сообщил немецкому астроному-наблюдателю И. Г. Галле (Johann Gottfried Galle, 1812—1910) координаты точки звездного неба, где ее следовало искать. Получив письмо Леверье, Галле в тот же вечер направил телескоп на указанную точку и обнаружил планету.

Другой известный пример — опыт французского физика Ж. Фуко (Jean Bernard Léon Foucault, 1819—1868), подтвердивший факт суточного вращения Земли. Фуко использовал для этой цели маятник («маятник Фуко»), представляющий собой массивный груз, подвешенный на нити, верхний конец которой укреплен таким образом, что маятник может качаться в любой вертикальной плоскости. Если отклонить этот маятник от вертикали и отпустить, то, поскольку силы, действующие на груз — сила тяжести и сила натяжения нити, — лежат все время в плоскости качания маятника, эта плоскость будет сохранять неизменное положение по отношению к звездам. Но наблюдатель, находящийся на Земле и вращающийся вместе с ней, увидит, что плоскость качания маятника поворачивается относительно поверхности Земли; отсюда следует, что Земля вращается относительно звезд. (Точно так же пассажир, увидев в окно вагона, что находящиеся на перроне предметы пришли в движение, заключает отсюда, что поезд тронулся.)

В первом из приведенных примеров «вычитаемой частью» явления была расчетная орбита Урана, остатком — отклонение наблюдаемой орбиты от расчетной. Во втором примере это были соответственно неизменность положения плоскости качания (вытекающая из законов механики) и ее видимое вращение. Роль «остальных предыдущих» в первом примере играет притяжение Нептуна, во втором — вращение Земли вокруг своей оси.

---

[12] Эту гипотезу выдвинул в 1783 г. российский астроном Андрей Иванович Лексель (1740—1784).

Пятое правило (*метод сопутствующих изменений*). Всякое явление, изменяющееся определенным образом всякий раз, когда некоторым особенным образом изменяется некоторое другое явление, есть либо причина, либо следствие данного явления, либо соединено с ним какой-либо причинной связью.

Этот метод применяется преимущественно в тех случаях, когда речь идет о количественных изменениях. Примером может служить изменение объема тел при нагревании или охлаждении, т. е. при изменении температуры. Другой пример: для подтверждения того факта, что одной из причин остановки тел, движущихся без воздействия сил, является (наряду с трением) сопротивление воздуха, были проведены опыты с качанием маятника под колпаком, из-под которого был частично выкачан воздух. Оказалось, что чем меньше давление воздуха под колпаком, тем медленнее затухают колебания.

Внимательное рассмотрение этих примеров (оба они приведены в книге Милля) показывает, что формулировка пятого правила (принадлежащая, как и приведенные выше формулировки первых четырех правил, самому Миллю) нуждается в уточнении. В самом деле, в этом правиле речь идет об изменении некоторого явления A, сопровождающемся изменением другого явления B. Но что играет роль A и B в первом примере? Если температура и объем, то, во-первых, их трудно назвать «явлениями», а во-вторых, получается явная нелепость: «Температура есть причина объема». Если же за A и B принять изменение температуры и изменение объема, то речь должна идти об «изменении изменений», а это, конечно, не то, что имел в виду Милль. Аналогично обстоит дело и во втором примере. Поэтому правильнее говорить здесь не о явлениях, а о свойствах или, лучше сказать, характеристиках явлений. (Эти характеристики чаще всего количественные, но могут быть и качественными: например, при сильном нагревании металла он плавится.) В уточненном виде пятое правило можно сформулировать так:

Если какая-либо характеристика некоторого явления изменяется определенным образом всякий раз, когда некоторым особенным образом изменяется какая-либо другая характеристика того же самого или другого явления, то изменение второй характеристики есть либо причина, либо следствие изменения первой, либо соединено с ним какой-либо причинной связью.

О «какой-либо причинной связи» говорится здесь потому, что оба изменения могут оказаться следствиями общей причины или составными частями какого-либо сложного процесса. Например, когда с наступлением утра становится светлее и одновременно или вскоре становится теплее, ни одно из этих изменений не есть причина другого, но оба они — следствия одной причины.[13]

В заключение следует сделать два замечания.

Первое. При использовании методов сходства и различия вывод редко делается на основе двух или, допустим, трех или четырех случаев (не считая детских умозаключений, которые часто поражают взрослых своей неожиданностью); обычно рассматривается много случаев, и вывод тем достовернее, чем больше их рассмотрено и чем они разнообразнее (последнее особенно существенно).

Второе. Как уже говорилось, выводы, полученные с помощью индуктивных умозаключений, не являются «абсолютно достоверными»; строго говоря, это всегда гипотезы, нуждающиеся в проверке. Например, вывод Леверье о местонахождении неизвестной планеты был проверен наблюдением Галле; Грасси сам провел ряд экспериментов для проверки своего вывода, что малярия переносится комарами рода Anopheles.

Подробнее о проверке гипотез пойдет речь в следующей главе.

Глава 13. Гипотетико-дедуктивный метод

1. В предыдущей главе мы познакомились с утвердившимся в логике со времен Бэкона представлением о процессе научного познания, которое можно кратко резюмировать следующим образом: процесс начинается с наблюдения и накопления единичных фактов, а затем в результате обобщения многочисленных утверждений о единичных фактах возникают научные теории. В XX столетии это представление было подвергнуто критике в работах К. Поппера (Karl Popper, 1902—1994).[1]

Критика Поппера исходит из двух простых соображений. Одно из них состоит в том, что все научные утверждения, не исключая утверждений о единичных фактах, содержат общие понятия и поэтому

---

[13] Подобное добавление следовало бы сделать, впрочем, и к первому правилу. Известно, например, что некоторые полезные ископаемые часто встречаются вместе с некоторыми определенными горными породами; но вывод, который делают из этого геологи, состоит не в том, что наличие данных ископаемых является следствием или причиной наличия соответствующих пород, а в том, что эти породы и залежи полезных ископаемых образовались в ходе одного и того же процесса.

[1] К. Поппер родился в Вене и жил там до 1937 г., когда он в связи с угрозой захвата Австрии фашистской Германией вынужден был эмигрировать в Новую Зеландию, а с 1946 г. жил и работал в Англии. Кроме логики научного познания, Поппер занимался политической философией; свой главный труд в этой области — книгу «Открытое общество и его враги», написанную в годы второй мировой войны — он рассматривал как вклад в борьбу против тоталитаризма.

выходят далеко за пределы данных непосредственного чувственного опыта. Например, утверждения о температуре и относительной влажности воздуха, атмосферном давлении, скорости и направлении ветра, получаемые в результате метеорологических наблюдений, содержат весьма сложные понятия температуры, относительной влажности воздуха и т. д., сформировавшиеся в длительном процессе развития науки. Более того, общие понятия содержатся и в «обыденных» утверждениях о единичных фактах; например, утверждение «Вчера я его видел» содержит не сводимое ни к каким непосредственным восприятиям понятие «вчера», которое могло сформироваться только на основе понимания закономерности смены дня и ночи, и не менее сложное понятие «видеть». И даже такое простое утверждение, как «Здесь имеется стакан воды», содержит общие понятия «стакан» и «вода», не соотносимые ни с каким специфическим чувственным опытом. «Словом *стакан* — пишет Поппер — мы ⟨...⟩ обозначаем физические тела, демонстрирующие определенное *законосообразное* поведение; то же самое справедливо и для слова *вода*.» Таким образом, сформулировать утверждение о единичном факте можно только с помощью некоторых общих понятий, которые в свою очередь возможны лишь при наличии представлений о *закономерностях*, т. е. теорий или гипотез.

Второе соображение: для того, чтобы наблюдать, нужна какая-то руководящая идея. Возможны, конечно, и совершенно случайные наблюдения, а редкие и бросающиеся в глаза явления «сами просят», чтобы их наблюдали; но для *систематических* наблюдений необходима какая-то идея о том, чтó следует наблюдать. Такая идея всегда представляет собой некоторую *догадку, гипотезу*. Именно с выдвижения гипотезы начинается научное исследование. А когда гипотеза выдвинута, мы знаем, что наблюдать и какими фактами интересоваться: нас интересуют те факты, которые могут подтвердить или опровергнуть нашу гипотезу.

Так обстояло дело и в примерах, приведенных в предыдущей главе. Опыты Спалланцани и Пастера были поставлены с целью проверки гипотезы о невозможности самозарождения микроорганизмов. У Грасси, когда он начал свои исследования, в результате которых пришел к заключению, что малярию переносят комары рода Anopheles, была уже гипотеза, что малярия переносится комарами каких-то определенных видов. Конрад Лоренц, рассказав в первой главе книги «Так называемое зло» о своих наблюдениях в прибрежных водах Карибского моря и сделанном из них выводе, начинает вторую главу с признания, что в предыдущей главе «допустил поэтическую вольность»: на самом деле он предпринял эти наблюдения для проверки ранее возникшей у него гипотезы. Точно так же и любое исследование, приводящее к созданию новой научной теории или открытию каких-либо закономерностей, начинается с выдвижения гипотезы.

Таким образом, исходной точкой научного исследования является не наблюдение и не собирание единичных фактов, а догадка, предположение, гипотеза. При этом никакого «логического метода» формирования гипотез не существует: гипотеза рождается благодаря интуиции. И только после того, как гипотеза выдвинута, наступает очередь сбора единичных фактов — таких, которые могут ее подтвердить или опровергнуть.[2] Более точно: из гипотезы *дедуктивно* выводят следствия, имеющие вид утверждений о единичных фактах (а такие утверждения, как мы видели выше, можно формулировать только с помощью общих понятий, основанных на ранее сформировавшихся теориях), и производят наблюдения (или собирают факты), которые могут подтвердить или опровергнуть эти следствия.[3] Таков основной метод опытных наук. Поппер называет его *гипотетико-дедуктивным методом*.

2. Итак, вопреки мнению Бэкона, научные теории не выжимаются, подобно вину, из винограда фактов, собранного «с бесчисленных зрелых лоз». Теория — это всегда смелая догадка, предположение. Но она всегда нуждается в проверке, которая должна ее либо *верифицировать*,[4] т. е. установить ее истинность, либо *фальсифицировать*,[5] т. е. установить ее ложность.[6]

---

[2] Это не означает, разумеется, что предположения делаются без опоры на факты. Напротив, догадка, как правило, оказывается возможной лишь при условии, что исследователю известно много фактов из соответствующей области. (На это обстоятельство, ссылаясь на свой личный опыт, обратил внимание К. Лоренц в беседе с К. Поппером в феврале 1983 г., записанной Ф. Крейцером.) Но наблюдения, в результате которых накапливаются факты, делающие возможной догадку, всегда являются наблюдениями в свете тех или иных ранее существовавших теорий. Момент, с которого начинается жизнь новой теории — это догадка.

[3] При этом должны приниматься во внимание только *воспроизводимые* факты; принципиально невоспроизводимые, уникальные события для естественных наук значения не имеют. Кроме того, все наблюдения должны быть *интерсубъективно проверяемыми*: если исследователь произвел опыт, который никому другому не удается повторить, то результат не считается достоверным, даже если сомнений в добросовестности исследователя не возникает.

[4] От лат. *verus* — истинный и *facio* — делаю.

[5] От лат. *falsus* — ложный и *facio* — делаю.

[6] Принятие предложенных Поппером терминов *фальсифицировать, фальсификация* (нем. *falsifizieren, Falsifikation*, англ. *falsify, falsification*) вызывает у носителя русского языка естественное сопротивление, т. к. в обычном употреблении слово *фальсифицировать* означает по-русски только «подделывать, искажать с целью

Однако верификация и фальсификация играют при проверке теории неодинаковую роль. Всякая теория в самом общем виде может быть описана как конъюнкция утверждений об общих закономерностях, т. е. некоторое предложение T, имеющее вид $\forall x_1 F_1(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \&\, \forall x_n F_n(x_n)$. Если из T выведено некоторое утверждение B, относящееся к какому-либо единичному факту[7] — иначе говоря, доказана импликация $T \to B$, — то в случае, если B окажется ложным, отсюда немедленно будет следовать (по правилу, которое в традиционной логике именовалось modus tollens — см. гл. 8, пункт 7), что утверждение T также ложно, и тем самым теория будет опровергнута; если же B окажется истинным, то мы можем только констатировать, что получен еще один факт, подтверждающий теорию. Чтобы доказать истинность утверждения T, нам пришлось бы для каждого члена конъюнкции проверить все утверждения вида $F_i(a)$, где a — любой элемент области определения предиката F_i, а это ни в одном сколько-нибудь интересном случае сделать нельзя. Таким образом, *окончательная* верификация теории, в отличие от фальсификации, принципиально невозможна; теория *всегда* остается гипотезой.

На чем же тогда может основываться убеждение в истинности теории? Широко распространено мнение, что самой надежной гарантией истинности утверждения об общей закономерности является многочисленность подтверждающих его фактов: если закономерность подтверждается повседневными наблюдениями, подтверждается всем, что мы видим на каждом шагу, то в справедливосити ее можно не сомневаться. Но такое мнение ошибочно. Решающее значение для проверки гипотезы имеет не количество наблюдений, а разнообразие условий, при которых они производятся. И много раз случалось, что утверждения об общих закономерностях, подтвержденные огромным количеством повседневных наблюдений и считавшиеся абсолютно достоверными, опровергались наблюдением, сделанным при необычных условиях.

Проиллюстрируем сказанное примером. Древние греки были уверены, что нет закона более непреложного, чем регулярная смена дня и ночи, чередование восхода и захода Солнца. В этом их убеждали

выдать за подлинное» (в то время как немецкое *falsifizieren* и английское *falsify* имеют также значение «доказывать ложность, опровергать»). Но заменить эти термины какими-либо другими трудно, и они уже получили распространение в литературе на русском языке.

[7] В частности, из T можно вывести — пользуясь правилами удаления конъюнкции и удаления общности — любое предложение вида $F_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$, где a — произвольный элемент области определения предиката F_i.

ежедневные наблюдения в течение множества поколений. Но в IV веке до н. э. отважный мореплаватель Пифей из Массалии — греческой колонии на месте нынешнего Марселя — рассказал, вернувшись из дальнего плавания, что доплыл до таких мест, где Солнце не заходит и описывает полный круг выше горизонта. Его ославили лжецом, но мы теперь понимаем, что он говорил правду: очевидно, ему удалось пересечь Северный полярный круг.

Другой пример: европейцы в течение многих веков были убеждены, что все лебеди белые, но потом, открыв Австралию, увидели там черных лебедей.

Оба эти примера относятся к «обыденному знанию». Но и в истории науки случалось, что утверждения, подтвержденные огромным количеством наблюдений и экспериментов и считавшиеся не подлежащими никакому сомнению, опровергались новым, необычным экспериментом (требовавшим, как правило, много труда и изобретательности). Самый известный пример этого рода — опыт американского физика А. А. Майкельсона (Albert Abraham Michelson, 1852—1931), обнаружившего в 1881 г., что закон сложения скоростей классической механики не выполняется, если одна из скоростей есть скорость света. (Впоследствии этот опыт послужил одним из главных подтверждений теории относительности Эйнштейна.)

Вообще, получать подтверждения значительно легче, чем опровержения. Подтверждений гипотезы всегда можно найти сколько угодно, особенно если их специально искать. Поэтому исследователь, выдвинувший новую гипотезу и желающий ее проверить, должен не искать для нее подтверждений, а, напротив, стараться ее опровергнуть, фальсифицировать. Он должен рисковать, должен всячески разнообразить условия наблюдений и опытов, и должен быть готов отказаться от своей гипотезы, как бы ни была она ему дорога, если она не выдержит проверки.[8] Но если гипотеза устоит перед настойчивыми попытками ее опровергнуть, это будет веским доводом в пользу признания ее истинной. Только такие подтверждения и должны приниматься во внимание: не те, что встречаются на каждом шагу, а те,

[8]Вот как говорит об этом К. Лоренц: «Вообще нет лучшей утренней гимнастики для исследователя, чем каждое утро перед завтраком расправляться с какой-нибудь своей любимой гипотезой. Это сохраняет молодость.»

Конечно, на деле далеко не каждый исследователь готов прилагать усилия для опровержения собственных гипотез. Но тогда это делают за него другие — его критики и оппоненты. Это одна из главных причин, в силу которых развитие науки невозможно без свободы критики.

которые получены в результате неудачи серьезных попыток фальсификации.

Особенно убедительные подтверждения получаются в тех случаях, когда из теории выводятся неожиданные следствия, истинность которых затем подтверждается наблюдениями — иначе говоря, когда теория позволяет обнаружить такие факты, наличия которых мы не могли бы предположить, если бы не знали этой теории. Примером может служить предсказание теорией относительности Эйнштейна отклонения светового луча в поле тяготения Солнца — явления, которого никто не мог предположить до возникновения теории относительности.[9] Для проверки этого предсказания нужно было сфотографировать звезды вблизи от Солнца, что возможно только во время полного солнечного затмения. В 1919 г. это сделал английский астрофизик А. С. Эддингтон (Arthur Stanley Eddington, 1882—1944), и предсказание подтвердилось.

3. Следует заметить, что мнение Поппера о возможности окончательного опровержения теории — или, что по существу то же самое, гипотезы — одним противоречащим ей фактом встречает возражения. К. Лоренц (см. его книгу «Восемь смертных грехов цивилизованного человечества», гл. 8) пишет по этому поводу следующее: «Иногда считают — заблуждение это распространено также и среди специалистов по теории познания, — будто теория может быть окончательно опровергнута одним или несколькими фактами, которые с ней не удается согласовать. Если бы это было так, то все существующие гипотезы были бы опровергнуты, потому что вряд ли найдется среди них хоть одна, согласная со *всеми* относящимися к ней фактами. Любое наше познание представляет собой лишь *приближение* — хотя и последовательно улучшаемое приближение — к внесубъективной действительности, которую мы стремимся познать. Гипотеза никогда не опровергается единственным противоречащим ей фактом; опровергается она лишь другой гипотезой, которой подчиняется *большее* число фактов. Итак, «истина» есть рабочая гипотеза, способная наилучшим образом проложить путь другим гипотезам, которые сумеют объяснить больше.»

Эту критику следует, по-видимому, признать справедливой. Всякое научное знание, как неоднократно подчеркивал сам Поппер, есть лишь предположительное знание, и серьезные ученые всегда отдавали себе отчет в его неполном и предположительном характере. Если

[9] Правда, ньютоновская корпускулярная теория света также предсказывала отклонение светового луча в поле тяготения, но эта теория была давно отвергнута физиками, и господствовала волновая теория Гюйгенса.

обнаруживается факт, не поддающийся объяснению в рамках какой-либо до этого хорошо «работавшей» теории, но при этом не удается сразу же предложить другую теорию, которая объясняла бы как вновь открытый факт, так и то, что умеет объяснить существующая теория, то старой теорией продолжают пользоваться как рабочим инструментом (а в этом и состоит основное назначение всякой теории — быть рабочим инструментом для исследования и практической деятельности) до тех пор, пока не появится новая, лучшая. Однако обнаружение такого факта всегда вынуждает ученых интенсивно искать выход из противоречия, а выходом может быть только создание новой теории, которая дала бы лучшее приближение к действительности. Таким образом, утверждение Поппера, что необходимо искать не верификации, а фальсификации теории, остается в силе: в случае неудачи серьезной попытки фальсификации теория получает весомое подтверждение, а в случае удачи появляется стимул для создания новой теории.

4. Выше мы видели, что хотя окончательной уверенности в истинности теории не может быть никогда, ее можно считать в высокой степени достоверной, если она успешно противостоит серьезным попыткам ее опровергнуть. Но для того, чтобы теория могла им противостоять, она должна иметь такую форму, чтобы попытки опровержения были возможны. Иначе говоря: всякая научная теория должна быть в принципе опровержимой, *фальсифицируемой*. Фальсифицируемость является, по выражению Поппера, *критерием демаркации*, отделяющим эмпирические научные теории от мифов, метафизических учений и псевдонаучных теорий, внутренняя структура которых такова, что они не допускают опровержения опытом.[10]

Первыми попытками людей объяснить явления природы были поэтические мифы. В качестве примера можно привести миф о нимфе Эхо, дошедший до нас в пересказе Овидия. В наказание за болтливость Юнона отняла у нее способность говорить первой и способность молчать, услышав чей-нибудь голос: «Теперь она только и может, что удвоять голоса, повторяя лишь то, что услышит». А потом Эхо от неразделенной

[10] Стоит заметить, впрочем, что во многих случаях серьезная проверка научной гипотезы становится возможной только после ее уточнения — иными словами, после того, как на ее основе сформулирована другая, более точная гипотеза. Так, на основе гипотезы о существовании неизвестной планеты, притяжение которой влияет на орбиту Урана (см. предыдущую главу), Леверье сформулировал более точную гипотезу, включавшую в себя математический расчет, и эта гипотеза была проверена наблюдением Галле.

любви к прекрасному юноше Нарциссу так исчахла, что от нее остался только голос. Эта «теория» абсолютно неопровержима: то обстоятельство, что нимфу Эхо никто никогда не видел, не может служить опровержением, раз у нее нет тела, зато ее голос доводилось слышать каждому. Таковы же и другие мифологические объяснения природных явлений — они построены так, что опровергнуть их в принципе невозможно.

Следующим шагом в стремлении людей понять устройство мира было возникновение умозрительных метафизических учений, не опиравшихся еще ни на какую эмпирическую базу. Таковы были, например, учения древнегреческих мыслителей Фалеса (Θαλῆς, ок. 624—547 до н. э.), Анаксимандра (Ἀναξίμανδρος, ок. 610—546 до н. э.), Анаксимена (Ἀναξιμένης, ок. 588—525 до н. э.) и Гераклита (Ἡράκλειτος, ок. 544—483 до н. э) о первооснове всего сущего, из которой происходит все многообразие вещей. Фалес считал такой первоосновой воду, Анаксимен — воздух, Гераклит — огонь, Анаксимандр — некую беспредельную и бескачественную сущность, которую он называл «апейрон» (ἄπειρον, дословно «безграничное»). Эти теории были чисто умозрительными, они не опирались на опыт и не содержали в себе описаний каких-либо конкретных механизмов, производящих все сущее, скажем, из воды. Поэтому и об их опровержении опытом не могло быть речи.

Что касается псевдонаучных (псевдоэмпирических) теорий, то они, в отличие от мифов и метафизических учений, опираются на опытные данные, но из этих данных принимают в расчет только те, которые согласуются с их выводами и предсказаниями, а на остальные не обращают внимания. Типичный пример такой псевдонауки — астрология, оперирующая данными о взаимном расположении небесных светил и ставящая их в связь с характерами и судьбами людей. Астрологи ссылаются на многочисленные случаи, когда их выводы подтверждаются и предсказания сбываются, но молчат о тех еще более многочисленных случаях, когда этого не происходит. Такая односторонность делает выводы и предсказания астрологии принципиально неопровержимыми, но одновременно и недостоверными, а саму астрологию лишает права претендовать на статус науки. Сходное явление представляет собой деятельность всевозможных «чудодейственных целителей», по большей части выводящих свои методы из некоторых «теорий». Все они много рассказывают об излечившихся больных, но не регистрируют случаи, когда лечение не помогло или даже повредило больному. (Более того, к таким больным «целители» сразу теряют интерес, и они навсегда выпадают из их поля зрения.)

Псевдонаучные теории появились раньше, чем научные. (Астрология, как известно, возникла еще в древнем Двуречье.) Их появлению и развитию благоприятствовало то свойство наивного, не подчинившего еще себя строгой дисциплине человеческого разума, о котором с большой проницательностью писал Бэкон: «Разум человека все привлекает для поддержки и согласия с тем, что он однажды принял — то ли потому, что это предмет общей веры, то ли потому, что это ему нравится. Каковы бы ни были сила и число фактов, свидетельствующих о противном, разум или не замечает их, или пренебрегает ими, или отводит или отвергает их, $\langle\ldots\rangle$ чтобы достоверность тех прежних заключений осталась ненарушенной. И потому правильно ответил тот, который, когда ему показали изображения спасшихся от кораблекрушения посредством принесения обета и при этом добивались ответа, признает ли он теперь могущество богов, спросил в свою очередь: «А где изображения тех, кто погиб, после того как принес обет?» Таково основание почти всех суеверий — в астрологии, в сновидениях, в предсказаниях и тому подобном.»

Стоит отметить еще одну черту, отличающую псевдонаучные теории от научных: для последних характерно стремление к ясности выражения мысли, в то время как создатели и пропагандисты псевдонаучных теорий предпочитают, как правило, выражаться туманно, что дает им возможность истолковывать любой факт в желательном для них духе.

5. В связи с изложенным в предыдущем пункте необходимо сделать три важных замечания.

Первое. Ненаучность метафизических учений не означает их бесполезности. Эти учения, как и научные теории, порождены стремлением человека понять, как устроен окружающий его мир и какое место в мире занимает он сам, и они не могут быть полностью устранены и заменены научными теориями. Уже сама вера в существование в природе закономерностей, без которой была бы невозможна никакая наука, носит вполне метафизический характер.

Кроме того, мифы и метафизические учения могут играть роль зерна, из которого со временем развиваются научные теории. Так, возникшее еще в древности учение об атомах — мельчайших частицах, из которых состоит вся материя — первоначально было чисто умозрительным, но впоследствии стало подлинной научной теорией. (И даже псевдонаучные теории могут готовить почву для появления научных. Та же астрология, ныне представляющая собой смешной анахронизм, в свое время способствовала началу систематических наблюдений небесных светил, благодаря которым стало возможным возникновение астрономии.)

Второе. Фальсифицируемость, являясь критерием научности теории, не является критерием ее истинности. Научная теория может оказаться ложной. Примером может служить существовавшая в XVII—XVIII вв. флогистонная теория горения, объяснявшая это явление наличием в горючих веществах особой составной части — флогистона, — которую они теряют при горении. Это была настоящая научная теория, но в конце XVIII в. она была опровергнута опытами А. Лавуазье (Antoine Laurent Lavoisier, 1743—1794) и заменена кислородной теорией горения, принятой и сейчас.

Необходимо подчеркнуть, что если теория была опровергнута, это не означает, что она не имела значения для науки. Фальсифицированные теории играют важную роль в развитии науки уже потому, что прокладывают путь другим, лучше объясняющим факты. Вообще, ошибки в процессе познания — как научного, так и донаучного, — неизбежны, и моменты обнаружения и исправления ошибки являются в этом процессе ключевыми. Не будет слишком большим преувеличением сказать, что все наше знание возникает в конечном счете из ошибок и их исправления. (Вспомним А. С. Пушкина: «И опыт, сын ошибок трудных».)

Кроме того, нередко бывает, что теория опровергается не полностью — например, выясняется, что ее утверждения справедливы не всегда, как считалось раньше, а только при некоторых условиях. (Так было с классической механикой, законы которой, по современным представлениям, справедливы лишь для макроскопических тел, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.)

Третье. Как уже было сказано (см. пункт 2 настоящей главы), всякая научная теория состоит из *универсальных утверждений*, т. е. предложений вида $\forall x F(x)$,[11] и именно поэтому научные теории фальсифицируемы. *Экзистенциальные утверждения*, т. е. предложения вида $\exists x F(x)$, не фальсифицируемы: как говорит Поппер, «мы не можем исследовать весь мир для установления того, что нечто не существует, не существовало и никогда не будет существовать». Поэтому такие утверждения не могут входить в состав научных теорий.[12] В частности, не могут иметь

[11] Поскольку каждое предложение такого вида равносильно предложению вида $\neg\exists x G(x)$ (где $G(x)$ есть $\neg F(x)$), можно сказать, что теория представляет собой систему запретов. (И «чем больше теория запрещает — замечает Поппер, — тем больше она нам говорит».) Теперь становится более ясным замечание, сделанное в самом начале книги (глава 1), о том, что законы природы всегда что-то запрещают: ведь утверждения, называемые обычно «законами природы» — это на самом деле некоторые теории или составные части теорий.

[12] Исключение составляют такие предложения вида $\exists x F(x)$, которые в силу тех или

научного статуса утверждения о существовании высшего разума — и тем более о каких-либо его свойствах — и о бессмертии души. То же относится к утверждению о существовании внеземных цивилизаций.

6. Попперовский критерий демаркации оставляет за рамками науки не только наивные учения вроде астрологии, но и некоторые более современные и более респектабельные теории. Сюда относятся, в частности, психологические теории З. Фрейда (Sigmund Freud, 1856—1939), А. Адлера (Alfred Adler, 1870—1937) и К. Юнга (Carl Gustav Jung, 1875—1961), а также теория развития общества К. Маркса. Вспоминая о впечатлении, произведенном на него в юности знакомством с теориями Маркса, Фрейда и Адлера, Поппер писал, что эти теории поражали своей способностью объяснить практически все в их областях. Каждая из них была как откровение: «Раз ваши глаза однажды были раскрыты, вы будете видеть подтверждающие примеры всюду: мир полон верификациями теории». В противоположность этому следствия теории относительности Эйнштейна, с которой Поппер познакомился тогда же, были неочевидны и подтверждались лишь с помощью тонких экспериментов. Именно сопоставление теорий Маркса, Фрейда и Адлера с теорией Эйнштейна привело Поппера к открытию критерия демаркации. Согласно этому критерию теории Фрейда и Адлера, несмотря на то, что они выражены в научной форме, не являются научными, поскольку они непроверяемы и неопровержимы. «Нельзя представить себе — говорит Поппер — человеческого поведения, которое могло бы их опровергнуть». Впрочем, он тут же добавляет: «Это не означает, что Фрейд и Адлер не сказали ничего правильного: лично я не сомневаюсь, что многое из того, что они говорили, имеет серьезное значение и может со временем сыграть свою роль в психологической науке, которая будет проверяемой.» И далее Поппер пишет: «Что же касается описания Фрейдом Эго, Суперэго и Ид, то оно по сути своей не более научно, чем истории Гомера об Олимпе. Рассматриваемые теории описывают некоторые факты, но делают это в виде мифа. Они содержат весьма интересные психологические предположения, однако выражают их в непроверяемой форме.»

иных специальных свойств предиката F равносильны каким-либо универсальным утверждениям. Примером может служить утверждение, на основании которого была открыта планета Нептун: «Существует планета, движение которой описывается таким-то уравнением». Это утверждение равносильно следующему: «Каковы бы ни были точка пространства M и момент времени t, если они удовлетворяют данному уравнению, то в точке M в момент t находится планета».

С теорией Маркса дело обстоит несколько иначе. В первоначальном варианте она давала проверяемые предсказания и впоследствии была фальсифицирована революционными событиями в России. Из учения Маркса следовало, что любая социальная революция начинается с изменения материальных условий производства «в недрах старого общества», и только после этого появляются новые производственные отношения и меняется политическая система. Между тем социальная революция в России началась с изменения политической системы, затем были изменены производственные отношения и лишь в последнюю очередь — материальные условия производства. Однако сторонники теории Маркса переформулировали ее таким образом, что она стала непроверяемой и неопровержимой. (Можно заметить, что сторонники теорий, оказавшихся несостоятельными, нередко прибегают к подобным переформулировкам, чтобы спасти их от опровержения. Но при этом теории неизбежно утрачивают научный характер.)

В этой связи можно упомянуть также о прикладных психологических теориях, используемых для теоретического обоснования новых методов обучения. Разумеется, для каждой из них вопрос о том, проверяема ли она в принципе, должен решаться отдельно. Но проводимые их сторонниками так называемые педагогические эксперименты нельзя считать подлинной проверкой. Обязательным условием научного эксперимента является наличие опытной и контрольной групп испытуемых объектов (см. главу 12, пункт 4). В применении к педагогическому эксперименту это означало бы наличие двух одинаковых групп учеников, которых учат одинаковые учителя (или, еще лучше, один и тот же учитель), но разными методами. Две более или менее одинаковые группы учеников еще можно себе представить, но двух одинаковых учителей вообразить гораздо труднее. А главное — методы, которыми пользуется учитель, не являются чем-то вроде неодушевленных орудий в его руках, они самым тесным образом связаны с его личностью.[13] Если учитель принял с энтузиазмом новый метод или сам его разработал (а именно такие учителя проводят педагогические эксперименты[14]), он уже не может работать по старому методу, а индивидуальные различия между этим учителем и его коллегой, оставшимся верным старому методу, практически всегда так велики, что если бы и удалось объективно оценить результаты их работы (что в каждом случае представляет собой отдельную и, как правило, очень трудную задачу), и они оказались бы существенно различными, все же было

[13] Исключение составляют лишь некоторые частные методы выработки технических навыков.

[14] Мы оставляем в стороне шарлатанов от педагогики с их мнимыми, но иногда широко рекламируемыми достижениями, а также бюрократические «эксперименты» недавних времен, когда учителям просто приказывали работать по новым учебникам и писать отчеты.

бы невозможно определить, в какой мере это обусловлено различием методов и в какой — различием личных качеств.

Все это не означает, конечно, что обосновываемые такими экспериментами методы непременно плохи или бесполезны (хотя значение методики в наше время сильно преувеличивается в ущерб значению личных качеств педагога, играющих в действительности гораздо более важную роль). Речь идет лишь о том, что данный способ их обоснования вряд ли может считаться убедительным.

7. В заключение главы остановимся на том, как можно оценить в свете теории Поппера изложенную в предыдущей главе более раннюю теорию Милля, и прежде всего его знаменитые правила установления причинных связей.

Взгляды этих двух философов на индукцию диаметрально противоположны: с точки зрения Милля все настоящие умозаключения являются индуктивными (см. главу 12, пункт 3), а Поппер неоднократно высказывал убеждение, что никакой индукции не существует, есть только догадки и дедуктивные умозаключения. Кто из них прав? Критика, которой Поппер подверг индуктивную логику, весьма убедительна, но представляется все же, что он не был свободен от общей почти всем авторам эпохальных открытий склонности переоценивать значение своих идей и делать из них чересчур категоричные выводы. Подчеркивая роль творческого начала в возникновении гипотез и протестуя против упрощенного представления индуктивной логики, согласно которому общие теории возникают путем обобщения множества частных случаев, причем это обобщение трактуется как некий очень простой и чуть ли не механический процесс (вспомним изречение Бэкона про вино науки, выжимаемое из винограда, собранного «с бесчисленных зрелых лоз» — лозы уже зрелые, остается только выжать сок!), Поппер впадает в другую крайность: отрицает наличие каких бы то ни было общих многим различным областям знания приемов сопоставления фактов, облегчающих догадку и появление гипотез. Между тем такие приемы есть (хотя они далеко не исчерпывают всех возможностей: Поппер совершенно прав, утверждая, что не существует никакого универсального «логического метода» формирования гипотез). К таким приемам можно отнести и методы, описанные Миллем. Впрочем, эти методы могут не только служить средством, облегчающим догадку и формирование гипотез, но и использоваться для их проверки. (Особенно часто для этой цели используется метод различия; примером могут служить опыты Пастера, упоминавшиеся в предыдущей главе.)

Еще одним широко распространенным приемом сопоставления фактов, облегчающим формирование гипотез, является *рассуждение по аналогии*, при котором сходство ряда признаков двух предметов или явлений приводит к гипотезе, что у них сходны и другие признаки. Этот прием используют, например, зоологи, когда они решают, к какому роду, семейству, отряду и классу следует отнести вновь открытый вид животных: такое решение зоолог принимает, опираясь на некоторый набор признаков животных нового вида, которые, как ему удалось установить, сходны с признаками других видов той более крупной таксономической единицы, к которой он его относит, и состоит это решение, собственно, в принятии гипотезы, что и другие, еще не исследованные признаки животных нового вида сходны с признаками других видов этой таксономической единицы. Иногда принятая гипотеза оказывается ошибочной, и решение приходится пересмотреть.

Вот как Поппер охарактеризовал «индукционизм» в беседе с Лоренцем, о которой мы упоминали в сноске 2 к настоящей главе: «Идея индукции в конечном счете следующая — и сейчас я опишу нечто, что считаю с начала до конца неверным: все знание приходит через наши органы чувств; это основная идея. И если, далее, очень долго и *очень часто* на наши органы чувств действуют одни и те же предметы (Dinge), тогда мы приходим к обобщающей гипотезе. Вот учение об индукции в психологическом аспекте. Неверно и его логическое обоснование (Ableitung). Существует «дедукция», говорит индукционист. Если даны посылки, дедукция дает тебе заключение *с уверенностью.* Здесь нет индукции. Индукция состоит в том, что у нас очень много посылок, и тогда мы получаем заключение *с вероятностью.* Это тоже неверно. ⟨...⟩ Можно показать, что при обучении мы всегда узнаем нечто *невероятное*, а не нечто вероятное. И поэтому вся идея выводов с вероятностью (der Wahrscheinlichkeitsschlusses) ошибочна. Есть дедуктивные выводы, и в теории вероятностей тоже есть только дедуктивные выводы; чем более вероятным становится что-либо в смысле теории вероятностей, тем более это становится пустым и неинтересным. *Интересно только невероятное.* Новое всегда совершенно невероятно. Гипотеза, которую мы создаем заново, имеет, так сказать, вероятность нуль. Так что нет никакой индукции, а есть рискованные новые открытия.»

Далее в этой беседе Поппер говорил, что процесс накопления знаний и приобретения опыта состоит, по существу, в том, что человек постоянно ошибается и исправляет ошибки, и подытожил свою критику в следующих словах: «Основание теории индукции таково: Мы учимся благодаря информации, приходящей извне. Основание моей критики индукционизма: мы учимся благодаря деятельности, которая является для нас врожденной, благодаря множеству структур, которые являются для нас врожденными и которые мы способны развивать: *мы учимся благодаря активности.* Вот что существенно. Индукция делает нас пассивными, повторение переносит вещи из поля зрения нашего бодрствующего духа в подсознание. Настоящее обучение не индуктивно, оно всегда состоит в попытках и блужданиях, предпринимаемых с наибольшей активностью, какая есть в нашем распоряжении.»

Если такое описание «индукционизма» верно, то эту критику трудно не признать справедливой. В то же время нельзя отрицать, что существуют приемы, позоляющие в ряде случаев придавать «блужданиям» некоторую степень упорядоченности.

Глава 14. Рассуждения, используемые в гуманитарных областях знания

1. В предыдущей главе мы видели, что основной и едва ли не единственный метод, с помощью которого создаются теории и добываются знания в эмпирических (опытных) науках — гипотетико-дедуктивный. Все приводившиеся в этой главе примеры подлинных научных теорий, за единственным исключением теории общественного развития Маркса, после фальсификации переделанной таким образом, что ее научный статус был утрачен, относились к области наук о природе. Но и в науках о человеческом обществе, человеческом духе и его творениях во всех случаях, когда удается получить объективные знания, используется тот же гипотетико-дедуктивный метод: вначале выдвигается гипотеза, из нее дедуктивным путем выводят следствия, затем ищут факты, которые могли бы эти следствия подтвердить или опровергнуть.[1] Так работают, например, психологи-экспериментаторы — достаточно вспомнить хотя бы о классических исследованиях Ж. Пиаже (Jean Piaget, 1896—1980), посвященных детскому мышлению и формированию понятий у детей. Другой, очень наглядный, пример дает дешифровка древнеегипетской письменности Ж. Ф. Шампольоном (Jean François Champollion,

[1]Заметим, что и в математике исследование всегда начинается с догадки, т. е. выдвижения гипотезы, и если доказательство этой гипотезы не является очевидным, то математик обычно пытается ее опровергнуть, выводя из нее следствия и сопоставляя их с известными ему фактами, а если эти попытки не удаются, пытается найти доказательство гипотезы. В трудных случаях попытки доказать гипотезу и попытки ее опровергнуть могут чередоваться много раз. Таким образом, метод работы математика тоже можно было бы назвать гипотетико-дедуктивным, и, пожалуй, даже с бо́льшим основанием, чем метод работы естествоиспытателя, т. к. в математике дедукция используется также и для верификации гипотез: подтверждением гипотезы признается в ней только строгое доказательство, проведенное с помощью дедуктивных рассуждений.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что объективные знания во всех науках практически *всегда* добываются с помощью гипотетико-дедуктивного метода.

1790—1832), исходившим из выдвинутой еще в XVII в. немецким ученым А. Кирхером (Athanasius Kircher, 1601—1680) гипотезы о близости древнеегипетского языка к коптскому (культовому языку египетских христиан) и принадлежащей самому Шампольону гипотезы, что древнеегипетское письмо было в своей основе фонетическим (а не идеографическим, как полагали ранее). Подтверждение этих гипотез он получил, расшифровав двуязычную надпись (на древнеегипетском и греческом языках) на так называемом Розеттском камне и установив значения отдельных знаков, т. е. построив более подробную гипотезу (теорию)[2], которая была затем убедительно подтверждена чтением множества древнеегипетских текстов.

В то же время в гуманитарной сфере особенно часто случается, что за объективное знание принимается или выдается нечто такое, что на деле объективным знанием не является. Чаще всего это связано с неправомерным пренесением в эту сферу способов рассуждений, используемых в математике и естественных науках — иначе говоря, с *подражанием* математическим и естественнонаучным рассуждениям (иногда сознательным, но чаще бессознательным). С другой стороны, как это ни парадоксально, среди специалистов по гуманитарным наукам (во всяком случае, в наше время) широко распространено убеждение, что область их интересов не имеет и не может иметь ничего общего с математикой и науками о природе, так что «гуманитарию» изучать эти науки ни к чему и едва ли не вредно. Такой взгляд, само собой, мешает разобраться в природе тех ошибок, к которым ведет упомянутое подражание. Явление это настолько важно и ведет к столь серьезным последствиям (не только в науке, но, как мы увидим, и в практической жизни!), что на нем следует остановиться подробно. Его рассмотрение и составит основное содержание настоящей главы.

2. Искусство доказательства математических истин с помощью дедуктивных рассуждений было изобретено древними греками и доведено ими до высокой степени совершенства. Непревзойденным образцом дедуктивного построения математической теории в течение более чем двух тысяч лет оставалась система геометрии, изложенная в книге жившего в III в. до н. э. греческого математика Евклида (Εὐκλείδης) «Начала» (Στοιχεῖα). Достигнутый в этой книге уровень логической

[2]Стоит подчеркнуть, что утверждение о значении каждого конкретного знака — универсальное: его точный смысл состоит в том, что всякий раз, когда данный знак встречается в тексте, он имеет данное значение. Поэтому совокупность таких утверждений с полным правом может быть названа теорией.

строгости был превзойден только во второй половине XIX в., а изложение геометрии в школе до сих пор во многом следует Евклиду. Книга Евклида начинается с определений первоначальных понятий, затем формулируются некоторые утверждения о свойствах этих понятий (постулаты и аксиомы), которые не доказываются, и из них с помощью дедуктивных рассуждений выводятся другие утверждения (теоремы). Здесь мы сразу видим несоответствие с тем, что говорилось в главе 2 о первоначальных понятиях любой науки: они могут быть только неопределяемыми. Дело в том, что в Евклидовых определениях точки, линии, поверхности, прямой линии и плоской поверхности эти простые геометрические понятия сводятся не к более простым, а к более сложным и менее ясным понятиям («Точка есть то, что не имеет частей», «Линия же — длина без ширины», и т. д.), а такие определения не могут «работать»: всякий, у кого хватит терпения внимательно проследить за ходом всех рассуждений в «Началах», может убедиться, что что ни в одном из них эти определения не используются. Зато в них используется тот *наглядный смысл*, который имеют первоначальные понятия геометрии (и который отчасти *поясняется* Евклидовыми определениями). Постулаты и аксиомы Евклида описывают в действительности не все основные свойства геометрических объектов, используемые в доказательствах теорем, но возикающие из-за этого лакуны в рассуждениях заполняются за счет наглядного смысла (обычно поясняемого с помощью чертежей). Это обстоятельство до сравнительно недавнего времени оставалось незамеченным,[3] и многие ученые, занимавшиеся изучением человеческого духа и человеческого общества, вольно или невольно брали строгую и стройную систему Евклида за образец. Но понятия, которыми они оперировали, в отличие от геометрических не имели никакого наглядного смысла и не отличались ясностью; поэтому неизбежные лакуны в рассуждениях оставались незаполненными. В результате получались доказательства, похожие на Евклидовы лишь по внешней форме. Главной отличительной чертой Евклидовых и вообще математических доказательств является *принудительность*: их правильность вынужден признать каждый человек, чей интеллект достаточно развит, чтобы он был в состоянии их понимать. Как раз этим свойством и не обладают рассуждения подражателей Евклида в гуманитарных областях (среди которых были очень глубокие и тонкие мыслители!): они никогда не убеждают всех, кому уровень интеллекта

[3] Обходиться в рассуждениях без опоры на наглядный смысл математики научились только в XIX в.

и научной подготовки позволяет понять ход мысли автора. Такие рассуждения — внешне построенные по образцу дедуктивных, но оперирующие нечеткими понятиями, не основанными на строгих определениях и не обладающими ясным наглядным смыслом — можно назвать *псевдодедуктивными*.

Едва ли не самым ярким примером такого подражания Евклиду может служить философская система Б. Спинозы (Baruch Spinoza, 1632—1677), изложенная им в книге «Ethica ordine geometrico demonstrata» («Этика, доказанная геометрическим способом»). «Геометрическим способом» означает здесь «так, как это делается в геометрии». Уже при беглом знакомстве с этой книгой бросается в глаза ее сходство с «Началами» Евклида: в ней тоже есть определения, есть принимаемые без доказательств аксиомы и есть теоремы, снабженные доказательствами; нет только чертежей. Их, разумеется, и не могло бы быть, поскольку используемые понятия («причина самого себя», «вещь, конечная в своем роде», «субстанция», «атрибут», и т. д.) не имеют наглядного смысла. Но и приводимые в книге определения этих понятий («Под причиною самого себя я разумею то, сущность чего заключает в себе существование, иными словами, то, чья природа может быть представляема не иначе, как существующая», «Конечною в своем роде называется вещь, которая может быть ограничена другой вещью той же природы», и т. д.) не делают их ясными, поскольку сводят их к понятиям, не являющимся более простыми. Кроме того, в аксиомах и теоремах наряду с понятиями, которым даны определения, встречаются и не определенные. (Так же и в «Началах», но там и в этом случае выручает наглядный смысл.) Поэтому, отдавая должное глубине мысли великого философа, приходится в то же время признать, что его доказательства содержат очень много произвольного и — вопреки претензии, заявленной в названии книги — вовсе не являются доказательствами в том смысле, в каком понимается это слово в геометрии.

Столь явную форму подражание математическим рассуждениям принимает редко; гораздо чаще оно бывает завуалированным, так что его не всегда легко распознать (особенно в случае бессознательного подражания). Но при работе с недостаточно четко определенными абстрактными понятиями, не имеющими к тому же простого наглядного смысла, такой метод доказательства всегда ведет к значительной степени произвольности. Наиболее глубоким и самостоятельным мыслителям удается заполнять лакуны в рассуждениях с помощью интуитивных прозрений. Что же касается авторов менее глубоких и менее самостоятельных, то они нередко попросту создают иллюзию доказательства, «обосновывая» с помощью псевдодедуктивных рассуждений все, что им по тем или иным причинам оказывается угодно доказать. (Вопрос о том, верят ли они сами в убедительность своих обоснований, не относится к нашему предмету.)

Одним из примеров могут служить неоднократно предпринимавшиеся попытки дедуктивного построения «науки о воспитании» — педагогики. (В действительности воспитание есть искусство, в котором, как и во всяком искусстве, ведущую роль играет интуиция, так что «общая теория воспитания» вряд ли возможна.) В XIX столетии некоторые авторы учебников педагогики умудрялись, исходя из «неизменяемого существа человеческого духа и неизменных законов его развития», обосновывать полезность телесных наказаний и вредность преподавания естественных наук; в советское время аналогичным образом обосновывалась необходимость воспитывать «беззаветную преданность идеям коммунизма» (превратившуюся впоследствии просто в безоговорочное послушание официальным толкователям этих идей). Попытки умозрительно-дедуктивного построения педагогики предпринимаются и сейчас (в некоторых современных учебниках есть даже «аксиомы педагогики»).

3. Из сказанного сейчас, разумеется, не следует, что в гуманитарных науках и связанных с ними областях человеческой деятельности невозможны настоящие дедуктивные рассуждения или что без них можно обойтись, В частности, они совершенно необходимы там, где речь идет не об отвлеченных понятиях, а о конкретных фактах — когда нужно, как бывает в исторических исследованиях и в юриспруденции, исходя из некоторых известных фактов, восстановить другие, неизвестные.[4] Но и в этих случаях дедуктивные рассуждения не дают абсолютно достоверных заключений, поскольку исходные факты могут допускать различные истолкования (в математике этого не бывает ввиду простоты и строгой формализованности ее объектов). Поэтому, в то время как для уверенности в справедливости математической теоремы достаточно найти одно ее доказательство, историки и юристы всегда стремятся, если есть возможность, найти как можно больше доказательств.

Без дедуктивных рассуждений в гуманитарных исследованиях невозможно обойтись и при работе с абстрактными понятиями. Но во всех случаях — идет ли речь об отвлеченных понятиях или о конкретных

[4]Некоторые историки считают, что искусство математического доказательства произошло из искусства судебного доказательства. Хотя это мнение разделяется не всеми специалистами, не подлежит сомнению, что то и другое возникло в греческих полисах приблизительно в одно и то же время. Стоит отметить и тот факт, что в течение многих веков юристами очень часто становились люди с тем же складом ума, который благоприятствует занятиям математикой.

фактах — вопрос о доказательности этих рассуждений решается иначе, чем в математике. Основное отличие состоит здесь в следующем. В математике, оперирующей понятиями в высшей степени формализованными, единственным критерием доказательности рассуждения является формальная правильность. Поэтому при использовании в рассуждениях того или иного математического понятия не обязательно рассматривать его «со всех сторон». Каким бы глубоким и многоплановым ни было это понятие по сути, исследователь не совершит ошибки, если будет опираться только на один из его аспектов, пусть даже не самый существенный. Доказательство не станет от этого менее убедительным, важно лишь, чтобы были соблюдены формальные правила. Образно говоря, цепочка дедуктивных умозаключений может быть сколь угодно тонкой, нисколько не теряя в прочности, лишь бы все звенья были на месте. Но при работе с понятиями, плохо поддающимися формализации, как чаще всего бывает в гуманитарных исследованиях, и тем более при осмыслении конкретных фактов формальная правильность не может быть единственным критерием доказательности рассуждения. Не менее важно здесь и то, насколько полно и всесторонне рассматриваются изучаемые явления; если не все их аспекты учтены, то никакая формальная безупречность не сможет застраховать исследователя от ошибок, а если учитывать лишь один аспект, то при подходящем его выборе можно «доказать» все, что угодно (это искусно умели делать уже древнегреческие софисты).[5] К тому же логическая безупречность рассуждений при работе с неформализованным материалом не может быть абсолютной: в таких рассуждениях приходится опираться не только на явно формулируемые посылки, но и на неявные, подразумеваемые, и никогда нет полной гарантии, что эти неявные предположения истинны. Можно сказать, таким образом, что при отсутствии формализации чем «тоньше» цепочка рассуждений, тем она менее надежна, да и никакое логическое рассуждение не дает абсолютно достоверного доказательства.

В наше время нередко случается, что за гуманитарные исследования берутся профессиональные математики. В ряде случаев им удается добиться определенных успехов и даже обогатить гуманитарную науку новыми идеями и методами, но это возможно лишь при условии, что такой исследователь

[5] Вот пример такого «одноаспектного» рассуждения. В одном из эпизодов китайского классического романа «Троецарствие» описывается «ученый спор» двух мудрецов о свойствах неба. Один из них задает другому, между прочим, такой вопрос: «Есть ли у неба фамилия?» «Есть.» — отвечает другой. «И какая же?» — «Лю.» — «Как ты это докажешь?» — «Очень просто! Ведь фамилия императора — Лю, а император — Сын Неба, значит, и фамилия неба — Лю».

почувствует ее специфику. Если же он будет рассуждать привычным ему способом, заботясь лишь о формальной правильности, то его почти наверняка ждет неудача. Если он талантлив и наделен воображением, он сможет построить эффектную цепочку умозаключений, а если к тому же начитан, сможет привести в подтверждение своей конструкции сколько угодно ссылок и цитат. Но если конструкция не основана на всестороннем анализе рассматриваемых явлений и учитывает только некоторые их аспекты, она почти неизбежно окажется несостоятельной.[6]

Замечание. В XX столетии некоторым гуманитарным наукам удалось уточнить часть своих понятий до такой степени, что появилась возможность использовать для работы с ними математичекий аппарат. Возникли, в частности, такие научные дисциплины, как математическая лингвистика и математическая экономика. Этот аппарат представляет собой часть математики, и вся работа с ним ведется с помощью обычных для математики дедуктивных рассуждений, хотя их результаты могут получать истолкование в терминах соответствующей гуманитарной науки. В подобных случаях обычно говорят об использовании в данной науке *математической модели*. Таким образом, здесь математические рассуждения производятся «внутри модели» — следовательно, в рамках математики. А вопрос об адекватности модели, т. е. о «правильности» теории, облеченной в математическую форму, решается так же, как в естественных науках — путем попыток ее фальсифицировать.

4. Не меньше, чем подражание математическим рассуждениям, распространено в гуманитарной сфере подражание методам рассуждения, используемым в физике и астрономии. На таком подражании основана методология *исторического детерминизма* (по терминологии К. Поппера — *историцизма*) — направления в социальных науках, сторонники которого считают, что исторические процессы управляются строгими закономерностями, подобными физическим законам, и общественные науки могут, открыв эти закомерности, предсказывать будущий ход истории подобно тому, как астрономия, опираясь на законы механики, предсказывает будущее движение небесных тел. Наиболее известная, но далеко не единственная форма исторического детерминизма — марксизм. Это направление заслуживает особого рассмотрения ввиду его необычайной популярности в течение более

[6] Такова, например, «новая хронология» А. Т. Фоменко, основанная на заведомо некорректной попытке применения математических методов к неформализованному материалу (а также на ряде произвольных допущений, многие из которых противоречат общеизвестным фактам).

чем двух столетий и колоссального влияния, оказанного им не только на социальные науки, но и на социальную практику.

Представление об истории человеческого общества как закономерном процессе, подобном всем другим природным явлениям, зародилось в XVIII столетии, после того, как средневековый взгляд на человека как на нечто принципиально отличное от всего остального, что есть в мире, сменился взглядом на него как на часть природы. Это представление вело к желанию открыть закономерности, управляющие человеческой историей, и перед глазами был блистательный образец: только что И. Ньютон открыл закономерности, управляющие движением небесных тел (а также перемещением в пространстве любых материальных тел вообще). Знание этих закономерностей — выраженных в математической форме — позволяло по состоянию системы тел в один данный момент времени предсказывать с полной определенностью, каково будет ее состояние в любой будущий момент. Впоследствии были построены и другие физические теории — также с использованием математического аппарата,— позволяющие предсказывать поведение систем иных типов. И именно успехи математической физики вдохновили ученых, занимавшихся социальными науками, на попытки создания теорий, имеющих предсказательную силу.

В качестве примера задачи математической физики можно взять только что упомянутую задачу о движении небесных тел. Более точно, речь идет о системе тел, размеры которых настолько малы по сравнению с расстояниями между ними, что можно этими размерами пренебречь и рассматривать тела как «материальные точки». В каждой точке пространства в каждый момент времени задана сила, которая действует на тело, если оно в данный момент оказывается в данной точке. (В этом случае говорят, что задано *силовое поле.* Например, Солнце создает в пространстве поле тяготения.) Когда мы говорим, что нам известно состояние такой системы в некоторый данный момент времени, это значит, что для каждого тела мы знаем, в какой точке пространства оно в этот момент находится и с какой скоростью движется (причем известна не только величина, но и направление скорости — вспомним, что скорость рассматривается в физике как вектор). Решить эту задачу значит по заданному состоянию системы в некоторый «начальный» момент времени (по «начальным условиям», как говорят математики) найти функции, выражающие зависимость координат и скоростей наших тел от времени. Аналогичным образом формулируются и другие задачи математической физики (хотя условия могут быть более сложными — в некоторых задачах приходится учитывать, кроме начальных, так называемые краевые условия).

Чтобы решение такой задачи можно было использовать для предсказания, необходимо, разумеется, чтобы оно (при заданных условиях) существовало и было единственным. Но есть еще одно требование, которому должна удовлетворять задача математической физики, чтобы, решив ее, можно было делать предсказания. Это требование *корректности*, состоящее в том, чтобы при очень малых изменениях условий изменение решения тоже было очень малым. Дело в том, что во всякой реальной задаче данные являются приближенными — ведь получаются они с помощью измерений, а при измерениях, даже самых точных, неизбежны погрешности. И если сколь угодно малая погрешность измерения может привести к значительному изменению решения, то никакие предсказания невозможны.

Попробуем теперь представить себе, что нам удалось построить теорию, позволяющую подобным образом (пусть и без использования математического аппарата) предсказывать ход истории. Нетрудно понять, что и в этом случае необходимым условием правильной постановки задачи является корректность: незначительное изменение начальных условий — например, случайное стечение обстоятельств, касающееся небольшой группы людей или одного человека — не должно существенно влиять на результат. (Необходимость этого условия ясна из того, что учесть все такие стечения обстоятельств очевидным образом невозможно.) Это понимают и сторонники исторического детерминизма (или, во всяком случае, многие из них); поэтому они явно или неявно вводят в свои построения допущение, что судьба и воля отдельной личности или небольшой группы людей не могут играть в истории никакой сколько-нибудь значительной роли, а существенно только то, что происходит с большими людскими массами. Примером может служить «классовый подход» Маркса, считавшего, что «общественное бытие людей определяет их общественное сознание» и только это общественное бытие и общественное сознание имеет значение для хода истории, причем слово «общественное» означает здесь «усредненное по общественному классу».

Такое допущение также представляет собой подражание математической физике, в которой иногда используется «оператор усреднения». Действие его состоит в том, что для любой точки интересующей нас области значение исследуемой величины заменяется средним значением этой величины по некоторому малому шару с центром в данной точке.

С такими средними значениями часто удобнее работать, т. к. усреднение сглаживает случайные «скачки» при переходе от точки к точке, упрощая тем самым общую картину явления.

Но где гарантия, что такая упрощенная картина не будет очень сильно отличаться от действительной? Очевидно, мы можем быть в этом уверены лишь при условии, что любые две достаточно близкие точки — скажем, A и B — «похожи» между собой в том отношении, что тело, оказавшееся в какой-то момент времени в точке A, ведет себя «почти так же», как если бы оно в этот момент оказалось в точке B. Но даже в задачах механики иногда встречаются «особые точки», непохожие в указанном отношении ни на какие близкие к ним. Пусть, например, A — самая верхняя точка вертикально стоящего колеса, а B — другая точка на ободе этого колеса, близкая к A. Шарик, помещенный в точку B, скатится вправо, если эта точка находится справа от A, и влево, если B находится слева от A. Но если поместить шарик в точку A, то он может скатиться как вправо, так и влево, в зависимости от ничтожно малого отклонения — столь малого, что учесть его невозможно. А теперь представим себе, что в самой правой и самой левой точках колеса помещены рычаги выключателей, каждый из которых повернется, если на него натолкнется шарик, и в результате поворота правого рычага загорится красная лампочка, а в результате поворота левого — зеленая. Тогда, помещая шарик в точку B, мы можем точно предсказать, какая лампочка загорится после этого; если же мы поместим его в точку A, то такое предсказание невозможно. Таким образом, шарик, помещенный в точку A, ведет себя существенно иначе, чем помещенный в точку B, как бы ни близка была эта последняя к A. Точка A является в этой ситуации «особой».

Математическая физика считается с фактом существования «особых точек» и точно описывает случаи, когда нельзя делать предсказания. Но в возникших под ее влиянием теориях общественной жизни этот факт не принимается во внимание; а между тем в явлениях, для описания которых эти теории построены, аналоги «особых точек» встречаются очень часто — по-видимому, значительно чаще, чем в явлениях природы, изучаемых математической физикой. Примером могут служить научные открытия и технические изобретения, оказывающие влияние на ход исторических событий. Предсказывать такие открытия и изобретения невозможно: ведь предсказание открытия, настолько подробное, чтобы можно было предвидеть его практические последствия, было бы равнозначно самому открытию.[7]

Но не только открытия и изобретения являются в развитии человеческого общества аналогами «особых точек». Сходную роль могут играть события и обстоятельства, сами по себе незначительные, но волею случая совпавшие с такими моментами исторического процесса, от которых зависит его дальнейшее течение. Кто может сказать, какими путями пошло бы развитие мировой истории, если бы Александр Македонский умер раньше своего отца, или если бы Ганнибал после битвы при Каннах пошел на Рим, или если бы генерал Черемисин в октябре 1917 г. выполнил приказ Керенского — прибыл со своими частями в Петроград и предотвратил переворот? А ведь влияние случайных обстоятельств может быть и не столь очевидным, как в этих примерах: последствия могут оказаться отдаленными и тем не менее весьма значительными.

Приведем два примера этого рода, относящиеся к общеизвестным фактам.

Первый пример. В 1382 г. умер польский король Людовик I. После него не осталось сыновей, только дочери, одну из которых избрали королевой Польши. (Монархия там была избирательная, но ближайший родственник последнего короля имел подавляющее преимущество.) Вскоре польские вельможи выдали ее за Ягайла, великого князя литовского. Она сначала противилась этому браку, считая, что должна быть верна жениху, за которого просватал ее отец. Но кто-то из прелатов сумел ей внушить, что, выйдя за Ягайла, она поможет великой миссии: обращению в христианство языческого народа. В Литве тогда не было государственной религии; в основной массе литовцы были еще язычниками, но среди знати и горожан к тому времени широко распространилось православие. Был крещен в православную веру и Ягайло, его христианское имя было Яков. Но перед свадьбой его по требованию поляков перекрестили в католичество (и назвали Владиславом).

Так возникла уния Литвы и Польши. Поначалу это была только личная уния, обе части государства сохраняли свою отдельную администрацию и свои порядки. Но мало-помалу Литва начала подпадать под польское влияние; главным следствием этого было постепенное окатоличивание литовцев. Между тем в состав Великого княжества Литовского входило много русских земель; оно и называлось, собственно, Великим княжеством Литовским и Русским. После Батыева нашествия многие западные и южные русские княжества поддались Литве без серьезного сопротивления или добровольно, потому что это избавляло их от татарского ига. Никаких религиозных или иных утеснений русские в Литве не терпели и пользовались там большим влиянием; все официальные бумаги писались по-русски. Но когда литовцы стали католиками, начались гонения на православную веру; люди, ее испо-

---

[7] На то обстоятельство, что из непредсказуемости научных открытий вытекает непредсказуемость исторических процессов, впервые обратил внимание К. Поппер.

ведовавшие — то есть русские — почувствовали себя утесненными и обратили взоры на восток, к возникшему там тем временем мощному единоверному государству, населенному к тому же их единоплеменниками. Потому-то воеводы Ивана III, Василия III и Ивана IV с почти неизменным успехом отвоевывали западные русские земли; потому же и Новгород, когда его независимое существование стало невозможным, присоединился не к Литве, а к Москве: хотя там была сильная литовская партия, противостоять литовской она не смогла, так как Москва была единоверная, а Литва чужой веры. И в конце концов Московская Русь стала единственной Русью, тогда как прежде были две Руси — Московская и Западная.

А если бы у Людовика были сыновья, одного из них почти наверняка избрали бы польским королем, и все могло бы пойти совсем иначе. Трудно представить себе, что могло бы быть, если бы до Нового времени дожили два или даже три независимых русских государства, а Польша не создала себе лишних проблем угнетением украинских и белорусских крестьян. И русские были бы другие, и поляки другие, и вся история Европы и всего мира пошла бы иначе.

Второй пример. Когда в 1761 г. умерла императрица Елизавета Петровна, шла Семилетняя война, и Россия решительно брала верх над Пруссией. Восточная Пруссия была занята русскими войсками, и Россия не собиралась возвращать ее Фридриху, что он хорошо понимал. Но его поклонник Петр III сразу начал мирные переговоры и заключил мир на таких выгодных для Пруссии условиях, о каких Фридрих даже после смерти Елизавты не смел и мечтать. Петр III отказался от всех русских завоеваний, вернул Восточную Пруссию без всякой компенсации. В результате цель, которую ставили себе противники Фридриха, начиная войну, — «сократить силы» Пруссии — не была достигнута. А проживи Елизавета годом дольше или не будь Петр III таким пруссофилом — тогда Пруссия, вполне возможно, стала бы второразрядным германским государством, и не было бы ни разделов Польши, ни прусского объединения Германии. Опять-таки история Европы и всего мира сложилась бы по-другому.[8]

5. В предыдущем пункте мы убедились в ошибочности представления о сущестовании законов общественного развития, знание которых может позволить историку или социологу предсказывать исторические события подобно тому, как астроном предсказывает затмения. Методологические и логические заблуждения, лежащие в основе этого представления, были проанализированы К. Поппером в книге «Нищета историцизма». Все они так или иначе связаны с подражанием методам

[8]В настоящем пункте автор в основном следовал работе А. Б. Называева «Законы истории» (см. список литературы в конце книги).

рассуждений, используемым в естествознании. Мы остановимся сейчас на нескольких таких заблуждениях.

Прежде всего здесь следует сказать о неправильном понимании различия между статикой и динамикой. В исторической и социологической литературе и даже в газетных статьях нередко встречаются термины «статичное общество» и «динамичное общество». При этом под «статичным» понимается общество, в котором не происходит никаких существенных изменений: не изменяется распределение людей по общественным группам, значение и функции этих групп, их взаимоотношения, и все идет как бы по замкнутому кругу. А «динамичное» общество — это то, которое постоянно развивается и изменяется: сегодня оно не такое, как вчера, завтра будет не такое, как сегодня. Термины эти заимствованы из физики[9]; но физика пользуется ими в совсем другом смысле. Для нее статическая система — это система, элементы которой вообще не движутся относительно друг друга (т. е. их взаимное расположение не изменяется); все системы, элементы которых движутся, называются динамическими, а они делятся на *стационарные,* в которых характер движения остается неизменным и все циклически повторяется, и *нестационарные*, в которых характер движения постоянно изменяется. Примером стационарной динамической системы может служить Солнечная система, нестационарной — перемещающиеся под влиянием многих различных факторов воздушные массы. Общественные системы, которые принято называть статичными, аналогичны не статическим системам в смысле физики, а стационарным динамическим системам. (Настоящие статические системы в живой природе и тем более в общественной жизни людей не встречаются.) Физика и астрономия делают долгосрочные предсказания только для стационарных динамических систем; точно так же и в социальных науках если и можно в тех или иных случаях делать предсказания, то лишь в отношении стационарных систем или «стационарных аспектов» нестационарных: можно, например, предсказывать характер изменения цен на зерно в течение года. Между тем исторический детерминизм претендует на предсказание событий именно в нестационарных системах — таких, как система общественных отношений, экономической и политической жизни целой страны или даже большой группы стран в течение длительного исторического периода.

[9] Применение их к общественным явлениям восходит к французскому философу О. Конту (Auguste Compte, 1798—1857).

Другое заблуждение — смешение законов и тенденций: из того, что в обществе долгое время происходит тот или иной процесс, делается вывод, что этот процесс непременно будет продолжаться и дальше. Различие между ними имеет чисто логическую природу. *Закон* есть *универсальное утверждение*, т. е. утверждение вида $\forall x F(x)$. Иначе такое утверждение можно представить в виде $\neg\exists x G(x)$ (где $G(x)$ есть $\neg F(x)$), так что всякий закон накладывает запрет на существование некоторого явления. (Ср. сноску 11 в главе 13.) *Тенденция* есть *экзистенциальное утверждение*, т. е. утверждение вида $\exists x F(x)$. Она ничего не запрещает, и нередки случаи — они хорошо известны статистикам, — когда тенденции, сохранявшиеся сотни и даже тысячи лет, резко изменяются в течение одного десятилетия. Поэтому нельзя основывать на тенденциях исторические предсказания (как сделал, в частности, Маркс, использовавший в своих предсказаниях «закон относительного обнищания пролетариата» и «закон абсолютного обнищания пролетариата», которые в действительности были всего лишь тенденциями).

Еще одна ошибка — оперирование в социальных науках физическими понятиями. Когда называют различные изменения в обществе «движением» и говорят о его «скорости», «пути» и т. д., это не приносит вреда, пока такие слова употребляются только как метафоры. Но они становятся вредными, если несут в себе научную претензию. Совершенно неправомерно рассматривать общество как нечто подобное физическому телу, которое может, *как единое целое*, двигаться в определенном направлении по определенному пути. Приписывать абстрактным понятиям свойства реальных предметов — просто недоразумение, и именно на этом недоразумении зиждется, по словам Поппера, «надежда на то, что удастся найти “законы движения общества”, подобные Ньютоновым законам движения физических тел.»

Кардинальное отличие «скоростей», о которых говорят некоторые социологи, от рассматриваемых в физике скоростей движения тел состоит в том, что они не могут быть измерены и выражены числами. Вследствие этого никакая теория, оперирующая понятием «скорости общественных процессов» (или каким-нибудь ему подобным) в принципе не поддается проверке и поэтому не научна.

По аналогичной причине не является научной теория «прибавочной стоимости» Маркса, в основе которой лежит восходяшее к Д. Рикардо (David Ricardo, 1772—1823) понятие «естественной» стоимости товара, определяемой затраченным на его изготовление «общественно необходимым» трудом. Эта стоимость, по Марксу, измеряется рабочим временем и выражается в соответствующих единицах — часах, днях и т. п. Но никаких способов ее измерения теория Маркса не дает (и не может дать ввиду нечеткости понятия «общественно необходимого труда»), вследствие чего она (теория) оказывается непроверяемой. Как говорит А. И. Фет в книге «Инстинкты и социальное поведение», «“Стоимость” — не *величина* в смысле естествознания, а философская фикция.»[10]

И есть еще одно, что необходимо отметить — это пренебрежение фактом уникальности человеческой истории. Физика и астрономия имеют дело с повторяющимися процессами, в то время как разум человека и возникшее благодаря ему человеческое общество не имеют аналогов в известной нам части Вселенной. Столь же уникальное явление представляет собой органическая жизнь на Земле, и биологи, изучающие эволюцию живых организмов, никогда не брались предсказывать ее дальнейший ход. Не больше оснований браться за подобную задачу и у обществоведов, и те из них, кто все же это делает, выступают уже не в качестве ученых, а в качестве пророков, стремящихся увлечь за собой людские массы. В отличие от пророков старых времен они не ссылаются на откровение свыше, а оперируют «научными» доводами, потому что теперь (уже в течение не менее чем двух столетий) люди в божественное откровение не верят, но верят во всеведение и всемогущество науки (хотя субъективно очень многие из них все еще искренне считают себя приверженцами традиционных религий).

6. Главный вывод, который можно сделать из изложенного выше относительно логики исследования в гуманитарных науках, состоит в том, что необходимо иметь ясное представление о возможностях используемого понятийного аппарата и возможностях работы с наличным материалом. (Разумеется, это требование относится не только к гуманитарным наукам, но здесь оно особенно часто нарушается.) Если понятийный аппарат таков, что построенная на его основе теория нефальсифицируема, в этом нужно отдать себе отчет и честно признать, что она является мифом или метафизическим учением (что само по себе еще не лишает ее права на существование, хотя в наш век всеобщего преклонения перед наукой редкий автор отважится сделать такое признание даже перед

[10] Другая построенная Марксом экономическая теория, описывающая расширенное капиталистическое производство, является подлинной научной теорией. Впоследствии Дж. фон Нейман (John von Neumann, 1903—1957) перевел ее на математический язык, и в современных руководствах по математической экономике изложение «модели Маркса — фон Неймана», как ее теперь называют, занимает всего несколько страниц.

самим собой). Если гипотезу невозможно проверить наблюдениями или экспериментами ввиду особенностей материала (например, его слишком мало, как часто бывает при изучении прошлого, или нет совсем, как бывает всегда при попытках предсказать будущий ход истории), нужно смириться с тем, что эта гипотеза может претендовать только на статус субъективного мнения, с которым каждый волен соглашаться или не соглашаться. Не могут претендовать на полную объективность теории, относящиеся к понятиям, содержание и объем которых не очерчены с достаточной четкостью (таких, как «капитализм», «романтизм» и т. п.). И если попытаться выразить в нескольких словах, чему может научить человека, решившего испробовать свои силы в области гуманитарных наук, анализ логического аспекта гуманитарных исследований, то, может быть, самыми подходящими словами были бы такие: трезво оценивать возможности своего инструментария.

Добавление I:

О некоторых распространенных логических ошибках

С ошибками в рассуждениях приходится сталкиваться на каждом шагу, и избежать их невозможно. Больше того: как мы видели в главе 13, процесс человеческого познания состоит, в сущности, из ошибок — в том числе ошибок в рассуждениях — и их исправления. В частности, ошибки неизбежны в спорах: если двое отстаивают противоположные мнения, то в силу закона противоречия в рассуждениях по крайней мере одного из них есть ошибки. И бывает даже, что спорщик, стремящийся добиться победы любой ценой, допускает ошибки намеренно. Этим особенно славились древнегреческие софисты (буквально «знатоки» или «мудрецы»), и поэтому уже в древности намеренные ошибки в рассуждениях стали называть *софизмами* (греч. σόφισμα, буквально «мастерство, умение, искусство»). В отличие от софизмов ненамеренные ошибки в рассуждениях называют *паралогизмами* (греч. παραλογισμός, буквально «неверное умозаключение»).

По давней традиции в курсах логики рассматриваются некоторые наиболее распространенные типы «логических ошибок», под которыми понимаются прежде всего ошибки в рассуждениях. Мы также остановимся вкратце на важнейших из них.

1) *Подмена тезиса* (по-латыни *ignoratio elenchi*). Это частный случай нарушения закона тождества, состоящий в том, что доказывается не то утверждение, которое необходимо доказать, а другое, внешне на него похожее или как-то с ним связанное.

Типичный пример: обвинитель на судебном процессе вместо того, чтобы доказывать, что подсудимый действительно совершил преступление, в котором его обвиняют, говорит о том, как ужасно это преступление и какую опасность для общества представляет человек, его совершивший. Так бывает, к сожалению, нередко, и чаще всего это делается намеренно, в расчете на эмоциональное воздействие и на логическую и юридическую неграмотность тех, к кому обращена аргументация. Очень часто прибегают к подобным приемам и недобросовестные политики.

2) *Предвосхищение основания* (*petitio principii*) — частный случай нарушения закона достаточного основания, состоящий в том, что некоторое утверждение доказывается с использованием (явным или неявным) другого утверждения, которое само еще нуждается в доказательстве.

С этой ошибкой мы сталкиваемся, например, в тех случаях, когда необходимость для государства вмешиваться в политическую жизнь некоторого региона за его пределами, поддерживая какую-то из существующих там политических сил, обосновывается «геополитическими интересами» государства в этом регионе, причем наличие таких интересов считается не подлежащим сомнению, а вопрос, в чем они состоят, рассматривается как неприличный. Подобным образом часто обосновываются и другие политические требования. Нередко приходится встречаться с предвосхищением основания в сочинениях по философии, истории, литературоведению и другим гуманитарным дисциплинам.

3) *Круг в доказательстве* (*circulus in demonstrando*), или *порочный круг* (*circulus vitiosus*) — частный случай предвосхищения основания: некоторое утверждение доказывается с явным или неявным использованием другого утверждения, при обосновании которого необходимо пользоваться тем самым утверждением, которое хотят доказать.

Примерами могут служить многочисленные попытки доказать пятый постулат Евклида, предпринимавшиеся математиками до того, как после открытия Н. И. Лобачевским (1792—1856) и Я. Бояи (Bolyai János, 1802—1860) неевклидовой геометрии и доказательства ее непротиворечивости стало ясно, что сделать это невозможно. Пятым постулатом Евклида называется утверждение, которое на современном языке может быть сформулировано следующим образом: Если сумма внутренних односторонних углов, образованных двумя прямыми при пересечении их третьей, с одной из сторон от секущей меньше 180°, то эти прямые пересекаются, и притом по ту же сторону от секущей. (Нетрудно доказать, что это равносильно невозможности провести через точку, не лежащую на прямой, более одной прямой, параллельной данной.) Это одно из исходных утверждений, на которых основывается построение геометрии в «Началах» Евклида (см. гл. 14, пункт 2). Оно выглядело более сложным и менее очевидным, чем остальные исходные утверждения, и к тому же первые 26 предложений в «Началах» доказываются без его помощи. Поэтому математики уже в древности стали задаваться вопросом: нельзя ли исключить его из числа исходных утверждений, то есть доказать, опираясь на остальные постулаты и аксиомы? За много веков было предложено много доказательств пятого постулата, но в каждом из них рано или поздно обнаруживался круг: оказывалось, что среди явных или неявных посылок содержится утверждение, которое не удается доказать без использования того же пятого постулата. (Например, Прокл (Πρoκλῆς, 412—485), опирался в своем доказательстве на допущение, что расстояние между двумя непересекающимися прямыми есть ограниченная величина; впоследствии выяснилось, что это допущение равносильно пятому постулату.)

4) По традиции к логическим ошибкам относят также *argumentum ad hominem* (русский перевод — «аргумент к человеку» — употребляется редко), хотя эта весьма распространенная ошибка носит по существу не логический, а психологический характер. Состоит она в том, что суждение об истинности или ложности утверждения, высказанного каким-либо человеком, ставится в зависимость от суждения о личных качествах этого человека. В результате суждение об истинности или ложности неизбежно теряет объективность и становится субъективным. (Это происходит, собственно, всегда, когда в рассуждение вмешиваются эмоции — например, в том случае, когда человек подсознательно боится сделать выводы из известных ему фактов, потому что эти выводы были бы ему неприятны.)

Примечательно, что традиционная логика, уделившая много винимания ошибке argumentum ad hominem, «не заметила» несостоятельности близко родственного ей и также весьма распространенного способа аргументации, при котором за истину — и даже за «абсолютную истину» — принимается все, что написано в некоторых пользующихся особым авторитетом книгах (или может быть выведено из написанного там). Объясняется это, видимо, тем, что средневековые схоласты, к которым восходит классификация логических ошибок, сами свято верили в непогрешимый авторитет некоторых книг (см. выше, пункт 2 гл. 12). Излишне говорить, что эта схоластическая традиция не изжита полностью до настоящего времени.

5) Кроме ошибок в рассуждении, к логическим ошибкам должны быть отнесены ошибки в определении понятий. Мы упомянем только об одной из них, которую естественно назвать «*кругом в определении*» («*circulus in definiendo*»). Состоит она в том, что некоторое понятие определяется с использованием других понятий, в определении кото-

рых участвует то самое понятие, которое надлежит определить. (Это участие — не обязательно непосредственное; иногда круг замыкается после того, как пройдена длинная цепочка определений.)

Например, в «Советском энциклопедическом словаре» (М.: Советская энциклопедия, 1988) понятие «вывод» определяется как «переход от посылок к следствиям (заключениям) по правилам логики», а понятие «посылка» — как «высказывание (формула), из которого делается вывод или умозаключение».

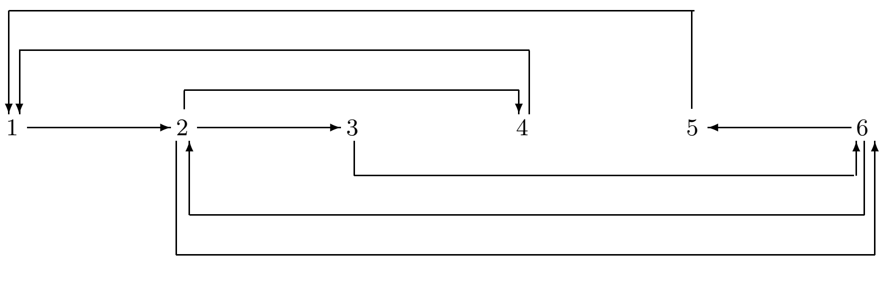
Другие, более интересные, примеры читатель найдет в следующем добавлении.

От круга в определении следует отличать нередко встречающийся в толковых словарях «круг в толковании слов», который не является ошибкой. Толковый словарь не предназначен для определения понятий, его задача — пояснять значения слов с целью облегчить их правильное употребление. А пояснение может быть полезно и при наличии круга (избежать которого не всегда удается).

Для примера приведем несколько толкований из «Словаря русского языка» С. И. Ожегова (М.: Советская энциклопедия, 1972). (В случаях, когда словарная статья содержит несколько толкований, отвечающих разным значениям слова, мы приводим только одно, отвечающее интересующему нас значению.)

1. ВЫВЕСТИ — прийти к чему-нибудь рассуждением, заключить.
2. ВЫВОД — умозаключение, то, что выведено.
3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ — утверждение, являющееся выводом из чего-нибудь.
4. ЗАКЛЮЧИТЬ — сделать вывод.
5. РАССУЖДЕНИЕ — умозаключение, ряд мыслей, изложенных в логически последовательной форме.
6. УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ — вывод, заключение из каких-нибудь суждений.

Взаимозавсимость этих толкований можно изобразить следущей схемой:



В более новом варианте этого словаря (С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова, Толковый словарь русского языка, М.: Азъ, Ltd, 1992) толкование слова ВЫВЕСТИ выглядит так: «умозаключить, прийти к чему-нибудь на основе анализа». При таком изменении — которое, впрочем, трудно признать удачным — схема также несколько видоизменяется, но «круги» в ней остаются.

Добавление II:

О логических парадоксах

Еще древние греки заметили, что рассуждения, с интуитивной точки зрения совершенно правильные, тем не менее могут иногда приводить к противоречиям. Такие рассуждения принято называть *логическими парадоксами.*[1] Интерес к ним усилился в конце XIX столетия, когда после создания Г. Кантором теории множеств выяснилось, что парадоксы возможны также и в математике. Сейчас мы остановимся на некоторых из них.

1) Самый старый и самый известный из логических парадоксов — *парадокс лжеца.* Полулегендарному поэту-прорицателю Эпимениду (Ἐπιμενίδης), жившему, по преданию, на Крите в VI в. до н. э., приписывается изречение «Все критяне лжецы». Такое высказывание в устах критянина звучит странно, потому что он обвиняет во лжи, в частности, и самого себя. Правда, здесь нет еще настоящего противоречия: даже если считать, что лжец никогда не говорит правду, то мы можем, услышав от критянина, что все критяне лжецы, заключить отсюда только, что это высказывание ложно — поскольку, если бы оно было истинно, это означало бы, что всякое высказывание всякого критянина ложно, в том числе и оно само. (К противоречию здесь приводит только предположение об истинности высказывания, но не предположение о его ложности.) Но можно видоизменить эту ситуацию так, чтобы получился настоящий парадокс: как заметил еще в IV в. до н. э. философ мегарской школы Эвбулид (Ἐυβουλίδης), если кто-либо говорит: «Предложение, которое я сейчас произношу, ложно», то из истинности этого предложения следует, что оно ложно, а из

[1] Вообще в русском языке слово «парадокс» (от греч. παράδοξος — «противоречащий установившемуся мнению, необычный, странный») означает суждение, противоречащее общепринятым мнениям. Логические парадоксы иногда называют также *антиномиями* (от греч. ἀντινομία — «противоречие в законе»).

ложности — что оно не ложно, т. е. истинно. Это и есть парадокс лжеца.

2) *Парадокс Кантора.* Г. Кантором было введено понятие мощности множества, позволяющее сравнивать произвольные множества по «количеству» элементов в них подобно тому, как это делается для конечных множеств. (Например, множество рациональных чисел имеет такую же мощность, как множество натуральных чисел, а множество действительных чисел — бо́льшую. Ср. также сноску 3 в главе 10.) Если множество A есть подмножество множества B, то мощность A не больше мощности B. Одна из самых замечательных теорем теории множеств, доказанная Кантором, состоит в том, что для произвольного множества мощность множества всех его подмножеств больше мощности его самого.

Пусть теперь M — множество всех множеств и M' — множество всех подмножеств M. Тогда мощность M' больше мощности M. Но всякое подмножество M также есть множество, так что M' есть подмножество M и, следовательно, мощность M' не больше мощности M.

3) *Парадокс Рассела* (Bertrand Arthur William Russell, 1872—1970). Назовем множество самосодержащим, если оно является своим собственным элементом (пример — множество всех множеств). Пусть R — множество всех несамосодержащих множеств. Тогда, если R — самосодержащее множество, это значит, что $R \in R$, а так как R по определению состоит из несамосодержащих множеств, то и R — несамосодержащее; если же R — несамосодержащее множество, это значит, что $R \notin R$, а так как R по определению содержит все несамосодержащие множества, то R — самосодержащее.

Этот парадокс можно сформулировать иначе, пользуясь вместо понятия множества понятием свойства. Некоторые свойства справедливы в отношении самих себя («обладают сами собой»): например, свойство «быть абстрактным» само абстрактно. Назвав такие свойства «самообладающими», мы можем, рассуждая точно так же, как выше (пусть читатель сделает это сам!), установить, что свойство «быть несамообладающим» не может быть ни самоообладающим, ни несамообладающим.

4) *Парадокс Берри* (G. G. Berry). Некоторые словосочетания русского языка служат названиями конкретных натуральных чисел. (Например, число 23 можно назвать с помощью словосочетаний «число, на единицу меньшее числа, вдвое большего двенадцати», «наименьшее простое число, большее двадцати» и т. п.) Очевидно, число натуральных чисел,

которые можно назвать с помощью словосочетаний, содержащих менее 60 слогов, конечно. Поэтому словосочетание «наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать с помощью словосочетания русского языка, содержащего менее шестидесяти слогов» называет некоторое натуральное число. Но само это словосочетание содержит всего пятьдесят один слог!

5) *Парадокс Ришара* (Jules Richard, 1862—1956). Некоторые словосочетания русского языка служат определениями функций натурального аргумента, принимающих натуральные значения. (Например, «сумма делителей данного числа», «число, на единицу большее числа, вдвое большего, чем данное число» и т. п.) Все такие словосочетания можно занумеровать натуральными числами, расположив их так, как располагают слова в словарях, и приписав тому словосочетанию, которое окажется первым, номер 1, тому, которое окажется вторым — номер 2 и т. д. Функцию, определяемую словосочетанием, имеющим номер n, будем обозначать f_n. Рассмотрим теперь словосочетание «число, на единицу большее значения функции, определяемой словосочетанием, номером которого служит данное число, при значении аргумента, равном данному числу». Это словосочетание определяет некоторую функцию натурального аргумента с натуральными значениями и, следовательно, должно получить некоторый номер n_0. По определению функции f_{n_0} имеем $f_{n_0}(n) = f_n(n) + 1$ для любого n. Но отсюда следует, в частности, что $f_{n_0}(n_0) = f_{n_0}(n_0) + 1$.

Можно заметить, что понятия, о которых идет речь в рассмотренных парадоксах, имеют общую черту: все они определяются с явным или неявным упоминанием самих определяемых понятий. Содержанием предложения, приводящего к парадоксу лжеца, является утверждение с его собственной ложности. Множество всех множеств состоит из элементов, среди которых имеется, в частности, оно само, и так же обстоит дело с любым самосодержащим множеством. В словосочетании, которое служит именем числа, дающего парадокс Берри, фактически идет речь о множестве, содержащем это число в качестве элемента. Функция, фигурирующая в парадоксе Ришара, определяется через множество всех функций натурального аргумента с натуральными значениями, одним из элементов которого является сама эта функция. Таким образом, во всех пяти случаях имеется круг в определении (см. Добавление I), и естественно предположить, что именно с этой некорректностью связано возникновение парадоксов.

Но в конце XIX столетия, когда были обнаружены парадоксы теории множеств, математика не располагала средствами, которые позволяли бы четко отграничить «законные» способы образования математических понятий и способы математических рассуждений от «незаконных». Поэтому открытие теоретико-множественных парадоксов было воспринято многими математиками как кризис, ставящий под сомнение надежность методов математики, всегда считавшейся достовернейшей из наук. Правда, в конкретных математических дисциплинах — таких, как арифметика, геометрия, дифференциальное исчисление и т. п. — не было «экзотических» понятий, подобных фигурирующим в парадоксах, и можно было надеяться, что эти дисциплины не окажутся под угрозой. Но чтобы иметь в этом уверенность, нужен был тщательный анализ логических основ математической науки, чем и занялись многие математики и философы, в том числе весьма выдающиеся. Возникла новая область научных исследований «на стыке» математики и философии — основания математики; ее главным рабочим инструментом стала математическая логика, получившая тем самым новый мощный стимул к развитию. Как всегда бывает в философии и смежных с ней областях, мнения ученых о природе кризиса и путях его преодоления были различны. В философии математики появились разные направления. Все они так или иначе способствовали развитию логики (не только математической!) и углублению знаний математиков о природе понятий и методов своей науки. Был получен ряд результатов, по большей части неожиданных, которые, хотя и не привели к общему согласию в главных вопросах оснований математики (в том числе в вопросе о происхождении и значении парадоксов), но позволили гораздо лучше, чем раньше, представить себе, что можно и чего нельзя сделать с помощью формальных математических методов.

Конструкции, аналогичные тем, на которых основаны логические парадоксы, в некоторых случаях используются в математике для доказательства (приведением к нелепости) невозможности существования объектов с теми или иными свойствами. Так доказывается, в частности, знаменитая теорема Гёделя о неполноте арифметики (см. конец пункта 1 гл. 8). В рамках этой книги мы не можем привести пример такого доказательства; можно, однако, привести простой пример нематематического рассуждения этого типа, являющегося не парадоксом, а просто доказательством невозможности. Вообразим военного парикмахера, получившего приказ брить всех тех и только тех военнослужащих своего подразделения, которые не бреются сами. Должен ли он бриться сам? Если он будет это делать, то нарушит приказ, так как брить тех, кто бреется сам, ему запрещено. Если не будет — тоже нарушит: тех, кто не бреется сам, он обязан брить. Таким образом, выполнить этот приказ невозможно.

Это рассуждение иногда называют «парадоксом парикмахера», хотя на самом деле никакого парадокса здесь нет. (По своему опыту читатель, вероятно, знает, что можно привести сколько угодно примеров не выдуманных, а действительно отдававшихся невыполнимых распоряжений.)

Литература

[1] *Аристотель.* Сочинения: В 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1978.

[2] *Асмус В. Ф.* Логика. М.: Госполитиздат, 1947.

[3] *Бэкон Ф.* Новый Органон // *Бэкон Ф.* Сочинения: В 2 т. Т. 2. М.: Мысль, 1972.

[4] *Гладкий А. В.* О значении союза *или* // Семиотика и информатика. Вып. 13. М.: ВИНИТИ, 1979. С. 196—214.

[5] *Гладкий А. В.* О значении союза *если* // Семиотика и информатика. Вып. 18. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 43—75. Перепечатка: // Семиотика и информатика. Вып. 35. М.: Изд-во «Языки русской культуры», 1997. С. 153—183.

[6] *Гладкий А. В.* Математическая логика. М.: РГГУ, 1998.

[7] *Гладкий А. В., Дрейзин Ф. А.* К семантике русского отрицания // Wiener Slawistischer Almanach. Bd. 11. Wien, 1983, S. 123—152.

[8] *Лоренц К.* Оборотная сторона зеркала. М.: Республика, 1998.

[9] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

[10] *Милль Д. С.* Система логики силлогистической и индуктивной. Изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования. М.: Изд. магазина «Книжное дело», 1900.

[11] *Называев А. Б.* Законы истории. // Современные проблемы. N 1. М., 1990. С. 5—26.

[12] *Н. Н.* Два замечания к статье А. Б. Называева «Законы истории». // Там же. С. 27—28.

[13] *Поппер К.* Логика и рост научного знания. М.: Прогресс, 1983.

[14] *Поппер К.* Нищета историцизма. М.: Прогресс, 1993.

[15] *Тимофеева И. Л.* Некоторые замечания о методе доказательства от противного. // Математика в школе, N 3, 1994. С. 36—38.

[16] *Челпанов Г. И.* Учебник логики. М., 1897.

[17] *Popper K.* The Logic of Scientific Discovery. L.: Hutchinson & Co., 1959.

[18] *Popper K.* Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge. L.: Routledge & Kegan Paul, 1963.

[19] *Popper K.* Unended Quest. An Intellectual Autobiography. L.: Routledge, 1992.

[20] *Popper K., Lorenz K.* Die Zukunft ist offen. Das Altenberger Gespräch. München—Zürich: Piper, 1985.

[21] *Scholz H.* Geschichte der Logik. Berlin: Junker u. Dunnhaupt, 1931.

Комментарии к списку литературы

В книге [1] собраны переводы логических трактатов Аристотеля.

Книги [2] и [16] можно рекомендовать тем, кто хочет познакомиться с традиционной логикой.[2]

Книга [6] — учебник математической логики для университетов и педагогических институтов.

Книга [8] содержит переводы двух главных трудов К. Лоренца — «Так называемое зло» и «Оборотная сторона зеркала» — и популярной книги «Восемь смертных грехов цивилизованного человечества».

Книгу [9] можно рекомендовать тем, кто хочет основательно изучить аристотелевскую силлогистику.

Книга [13] — перевод нескольких глав из книги [17], дополненный переводами фрагментов книги [18] и других трудов К. Поппера.

Статья [15], написанная ученицей Ф. А. Кабакова (см. Предисловие), явилась, по-видимому, первой публикацией, в которой было рассмотрено различие между приведением к нелепости и доказательством от противного.

Книги [17] и [18] — главные труды К. Поппера по логике научного познания.

Книга [19] — автобиография К. Поппера, в которой он увлекательно рассказал о возникновении и развитии своих главных идей.

Книга [20] — запись беседы К. Лоренца и К. Поппера, состоявшейся в феврале 1983 г. в Альтенберге близ Вены.

Книга [21] — очень ясно написанный очерк истории развития логики.

[2] Книга [16], использовавшаяся до революции в качестве учебника для средней школы, с 1897 по 1918 г. издавалась девять раз. Десятое, значительно сокращенное, издание вышло в 1946 г.

Предметный указатель

D

I

M

P

R

Список обозначений

Оглавление

Алексей Всеволодович Гладкий

Введение в современную логику

Вёрстка *В. Кордонского*

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 1.08.2001 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 12,5. Тираж 1500 экз. Заказ №

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Типография „Новости“».
107005, Москва, ул. Фридриха Энгельса, 46.