ГЛАВА 6.
РАЗРЕШИМОСТЬ В КВАДРАТУРАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФУКСА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

В этой главе описывается "разрешительная" часть топологической теории Галуа. Она основана на следующих классических результатах: на простой линейно-алгебраической части теории Пикара–Вессио и на теореме Фробениуса (см. теорему 1.2). Для доказательства разрешимости в k-квадратурах уравнения типа Фукса, имеющего k-разрешимую группу монодромии, приходится использовать также обычную теорию Галуа.

В параграфе 1 строятся решения линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с разрешимой (почти разрешимой, k-разрешимой) группой монодромии. В параграфе 2 приводятся явные критерии для различных видов разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с достаточно маленькими коэффициентами. При постоении решений используется теория Лаппо-Данилевского. В параграфе 3 классифицируются многоугольники G, ограниченные дугами окружностей, для которых функция f_G, задающая отображение Римана верхней полуплоскости на многоугольник G, представима в явном виде.

§1. Теория Пикара–Вессио для уравнений типа Фукса

В этом параграфе показывается, что топология расположения над комплексной плоскостью римановой поверхности общего решения линейного дифференциального уравнения типа Фукса отвечает за разрешимость уравнения в явном виде.

1.1. Группа монодромии линейного дифференциального уравнения, ее связь с группой Галуа. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + r_1 y^{(n-1)} + \cdots + r_n y = 0, \tag{18}$$

где r_i — рациональные функции комплексного переменного x. Полюса рациональных функций r_i и точка ∞ называются особыми точками уравнения (18).

В окрестности неособой точки x_0 решения уравнения образуют n-мерное пространство V^n. Возьмем теперь произвольную кривую $\gamma(t)$ на комплексной плоскости, ведущую из точки x_0 в точку x_1 и не проходящую

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

через особые точки a_i. Решения уравнения будут аналитически продолжаться вдоль кривой, оставаясь при этом решениями уравнения. Поэтому каждой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений $V^n_{x_0}$ в точке x_0 в пространство решений $V^n_{x_1}$ в точке x_1.

Если пошевелить кривую γ, не задевая при этом особых точек и оставляя закрепленными концы, то отображение M_γ меняться не будет. Замкнутым кривым будет отвечать линейное преобразование пространства V^n в себя. Совокупность всех таких линейных преобразований пространства V^n образует группу, которая и называется *группой монодромии уравнения* (18). Итак, группа монодромии уравнения — это группа линейных преобразований решений, которые возникают при обходе особых точек. Группа монодромии уравнения характеризует многозначность его решений.

Лемма 1.1. *1) Группа монодромии почти каждого решения уравнения (18) изоморфна группе монодромии этого уравнения. 2) Монодромная пара каждого решения уравнения (18) почти нормальна.*

Доказательство. Второе утверждение леммы вытекает из п. 5.4 главы 5. Остановимся на доказательстве первого утверждения. Группа монодромии уравнения (18) — это матричная группа, содержащая не более чем счетное число элементов. Для каждого нетождественного элемента этой группы множество его неподвижных точек является собственным подпространством конечномерного пространства решений уравнения (18). Множество решений, остающихся неподвижными, хотя бы для одного нетождественного преобразования из группы монодромии имеет нулевую меру в пространстве решений (т.к. объединение не более чем счетного числа собственных подпространств конечномерного пространства имеет в этом пространстве нулевую меру). Группа монодромии всех остальных решений уравнения (18) изоморфна группе монодромии уравнения.

В окрестности неособой точки x_0 существуют n линейно независимых решений $y_1, \dots, y_n$ уравнения (18). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\mathcal{R}\langle y_1, \dots, y_n\rangle$, полученное присоединением к полю рациональных функций $\mathcal{R}$ всех решений y_i и всех их производных.

Каждое преобразование M_γ пространства решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего поля $\mathcal{R}\langle y_1, \dots, y_n\rangle$. Действительно, вместе с функциями $y_1, \dots, y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\mathcal{R}\langle y_1, \dots, y_n\rangle$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции и дифференцирование, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Итак, *группа монодромии уравнения (18) лежит в группе Галуа этого уравнения над полем рациональных функций.*

Поле инвариантов группы монодромии — это подполе поля $\mathcal{R}\langle y_1, \dots, y_n\rangle$, состоящее из однозначных функций. В отличии от алгебраических уравнений для дифференциальных уравнений поле инвариантов относительно

действия группы монодромии может быть больше чем поле рациональных функций.

Например, для дифференциального уравнения (18), у которого все коэффициенты $r_i(x)$ являются полиномами, все решения — целые функции. Но, конечно, решения таких уравнений далеко не всегда полиномиальны. Дело здесь в том, что решения дифференциальных уравнений могут расти при подходе к особым точкам экспоненциальным образом. Известен широкий класс линейных дифференциальных уравнений, для которых такого осложнения нет, т.е. для которых решения при подходе к каждой особой точке (вдоль любого сектора с вершиной в этой точке) растут не быстрее чем степенным образом. Дифференциальные уравнения, обладающие этим свойством, называются дифференциальными уравнениями типа Фукса (см. [Бо2], [Ай]). Для дифференциальных уравнений типа Фукса справедлива следующая теорема Фробениуса.

Теорема 1.2 (Фробениуса). *Подполе дифференциального поля $\mathcal{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, состоящее из однозначных функций, для дифференциальных уравнений типа Фукса совпадает с полем рациональных функций.*

Прежде чем доказывать теорему Фробениуса, остановимся на ее непосредственных следствиях.

Следствие 1.3. *Алгебраическое замыкание группы монодромии M (т.е. наименьшая алгебраическая группа, содержащая M) уравнения типа Фукса совпадает с группой Галуа этого уравнения над полем рациональных функций.*

Доказательство. Следствие вытекает из теоремы Фробениуса и основной теоремы дифференциальной теории Галуа (см. §3 главы 3).

Теорема 1.4. *Линейное дифференциальное уравнение типа Фукса решается в квадратурах, в k-квадратурах или в обобщенных квадратурах, если и только если его группа монодромии, соответственно, разрешима, k-разрешима или почти разрешима.*

Доказательство вытекает из теоремы Пикара–Вессио (см. §5 главы 3) и предыдущего следствия.

Дифференциальная теория Галуа доказывает тем самым два результата.

1) *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса разрешима (k-разрешима, почти разрешима), то это уравнение решается в квадратурах (в k-квадратурах, в обобщенных квадратурах).*

2) *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то это уравнение не решается в квадратурах (в k-квадратурах и в обобщенных квадратурах).*

Первый из этих результатов не требует основной теоремы теории Галуа и, по существу, относится к линейной алгебре. Дело в том, что группу автоморфизмов дифференциального поля $R\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, оставляющих на месте только поле рациональных функций, не нужно специально конструировать. Такой группой является группа монодромии. Поэтому для доказательства разрешимости в квадратурах и обобщенных квадратурах

уравнений типа Фукса с разрешимой или с почти разрешимой группой монодромии достаточно воспользоваться линейно-алгебраическими рассуждениями из § 7 главы 3. Для доказательства разрешимости в k-квадратурах уравнение типа Фукса с k-разрешимой группой монодромии этих линейно-алгебраических рассуждений недостаточно. Нужно еще воспользоваться теорией Галуа алгебраических расширений поля рациональных функций. Впрочем, теория Галуа таких расширений весьма наглядна и геометрична (см. главу 4).

Наша теория позволяет усилить отрицательный результат 2. Об этом — в пункте 2.4. А сейчас перейдем к доказательству теоремы Фробениуса.

1.2. Доказательство теоремы Фробениуса. Мы покажем, что каждая однозначная функция из дифференциального поля $\mathcal{R}\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ мероморфна на сфере Римана и, следовательно, рациональна. Пусть $p \in S$ — особая точка уравнения типа Фукса, и x — локальный параметр около этой точки, такой, что $x(p) = 0$. Согласно теории Фукса, около точки p представлено в виде конечной суммы $y = \sum f_{\alpha k} x^\alpha \ln^k x$, где $f_{\alpha k}$ — мероморфные функции около точки p. Ясно, что функции, представимые в виде $\sum f_{\alpha k} x^\alpha \ln^k x$, где функции $f_{\alpha k}$ мероморфны около точки p, образуют дифференциальное кольцо, содержащее поле функций, мероморфных около точки p. Нам нужно показать, что частное двух функций из этого дифференциального кольца является однозначной функцией около точки p, если и только если эта функция мероморфна. Доказательство этого факта основано на формулируемом ниже утверждении 1.5. Нам понадобятся следующие обозначения: $U(0,\varepsilon)$ — ε-окрестность точки 0 на комплексной плоскости; $\hat{U}(0,\varepsilon)$ — проколотая ε-окрестность точки 0, $\hat{U}(0,\varepsilon) = U(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$; $M(0,\varepsilon)$ и $\hat{M}(0,\varepsilon)$ — поля мероморфных функций в областях $U(0,\varepsilon)$ и $\hat{U}(0,\varepsilon)$.

Два мероморфных ростка f_a и g_b называются эквивалентными над областью U, $a, b \in U$, если росток g_b получается из ростка f_a при продолжении вдоль некоторой кривой, лежащей в области U.

Определим теперь кольцо $K_a(0,\varepsilon)$. Мероморфный росток f_a, заданный в точке $a \in \hat{U}(0,\varepsilon)$, принадлежит кольцу $K_a(0,\varepsilon)$, если:

1) росток f_a мероморфно продолжается вдоль всех кривых, лежащих в $\hat{U}(0,\varepsilon)$,

2) комплексное векторное пространство, натянутое на все мероморфные ростки в точке a, эквивалентные над окрестностью $\hat{U}(0,\varepsilon)$ ростку f_a, конечномерно.

Кольцо $K_a(0,\varepsilon)$ содержит поле $\hat{M}(0,\varepsilon)$ и является векторным пространством над ним.

Утверждение 1.5 (о базисе). *При любом выборе ветвей функций* $\ln x$ *и* x^α, $[\Re\alpha] = 0$, *ростки* $x_a^\alpha \ln_a^k x$, $k = 0, 1, \dots$, *образуют базис пространства* $K_a(0,\varepsilon)$ *над полем* $\hat{M}(0,\varepsilon)$.

Сначала докажем лемму.

Лемма 1.6. *Ростки* $1, \ln_a x, \dots, \ln_a^k x, \dots$ *линейно независимы над полем* $\hat{M}(0,\varepsilon)$.

Доказательство. Действительно, существование нетривиального соотношения $\sum a_k \ln_a^k x = 0,\ a_k \in \hat{M}(0,\varepsilon)$, влечет за собой конечнозначность функции $\ln x$ в окрестности нуля.

Доказательство утверждения основывается на рассмотрении оператора монодромии $A\colon K_a(0,\varepsilon) \to K_a(0,\varepsilon)$, который сопоставляет каждому ростку его продолжение вдоль замкнутой кривой, обходящей точку 0.

Лемма 1.7. *Ростки* $x_a^\alpha \ln_a^k x,\ [\Re\alpha] = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1$, *образуют базис в пространстве* $\ker(A-\lambda E)^n$, *где* λ *и* α *связаны соотношением* $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$.

Доказательство. Заметим, что пространство $\ker(A-\lambda E)$ не более чем одномерно. Действительно, если $Af_a = \lambda f_a$ и $Ag_a = \lambda g_a$, то $A(f_a/g_a) = f_a/g_a$. Следовательно, росток $\psi_a = f_a/g_a$ является ростком некоторой функции ψ из поля $\hat{M}(0,\varepsilon)$ и $f_a = \psi g_a$. Поэтому пространство $\ker(A-\lambda E)^n$ имеет размерность не выше чем n. С другой стороны, легко проверить, что в этом пространстве лежат ростки $x_a^\alpha \ln_a^k x,\ [\Re\alpha] = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1$. Согласно лемме 1.6 эти ростки линейно независимы и поэтому образуют базис пространства $\ker(A-\lambda E)^n$.

Пространства $\ker(A-\lambda E)^n$ при разных λ имеют нулевое пересечение. Поэтому все ростки $x_a^\alpha \ln_a^k x$ линейно независимы. Покажем, что всякий росток f_a из пространства $K_a(0,\varepsilon)$ можно разложить по этим функциям. По определению росток f_a лежит в некотором конечномерном пространстве V, инвариантном относительно оператора монодромии. Пусть $\tilde{A}$ — ограничение оператора A на пространстве V. Согласно линейной алгебре, пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств $\ker(\tilde{A}-\lambda E)^{n_\lambda}$, где λ — собственное значение оператора $\tilde{A}$ и n_λ — его кратность. Из леммы 1.7 вытекает, что всякий элемент пространства V раскладывается по векторoам $x_a^\alpha \ln_a^k x$.

Замечание. Выбор разных ветвей функций $\ln x$ и x^α приводит к разным базисам пространства $K_a(0,\varepsilon)$. Коэффициенты разложения векторов из таких базисов по другому базису являются комплексными числами.

Определение. 1) Мероморфный росток $f_a,\ a \in \hat{U}(0,\varepsilon)$, имеет над окрестностью $\hat{U}(0,\varepsilon)$ *целую фуксову особенность*, если $f_a \in K_a(0,\varepsilon)$ и коэффициенты разложения ростка f_a по базису $x_a^\alpha \ln_a^k x$ мероморфны, т. е. если

$$f_a = \sum f_{\alpha,k} \ln_a^k x \cdot x_a^\alpha,\ \text{где}\ f_{\alpha,k} \in M(0,\varepsilon).$$

2) Мероморфный росток $f_a,\ a \in \hat{U}(0,\varepsilon)$, имеет над окрестностью $\hat{U}(0,\varepsilon)$ *фуксову особенность*, если он представим в виде частного двух ростков $\psi_a,\ g_a$, имеющих над $\hat{U}(0,\varepsilon)$ целую фуксову особенность, $f_a = \psi_a/g_a$.

Следствие 1.8. *Росток $f_a \in K_a(0,\varepsilon)$ имеет время фуксову особенность над окрестностью $\hat{U}(0,\varepsilon)$, если и только если он имеет целую фуксову особенность над этой окрестностью.*

Доказательство. Росток $f_a \in K_a(0,\varepsilon)$, следовательно, $f_a = \sum r_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x$, где $r_{\alpha,k} \in \hat{M}(0,\varepsilon)$ — коэффициенты разложения ростка f_a по базису. Росток f_a имеет также фуксову особенность, поэтому справедливо равенство

$$\frac{\sum p_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x}{\sum q_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x} - \sum r_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x = 0,$$

где $p_{\alpha,k}$, $q_{\alpha,k}$ — некоторые элементы поля $M(0,\varepsilon)$. Умножим равенство на $\sum q_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x$, раскроем скобки и приведем, если надо, ростки $x_a^\beta \ln_a^k x$ к виду $x^n \cdot x_a^\alpha \ln_a^k x$, где n — целое и $[\Re\alpha] = 0$. Так как ростки $x_a^\alpha \ln_a^k x$ линейно независимы над полем $\hat{M}(0,\varepsilon)$, то равенство эквивалентно системе уравнений, полученной приравниванием к нулю коэффициентов при этих функциях. Полученная система представляет собой систему линейных уравнений относительно функций $r_{\alpha,k}$ с коэффициентами из поля $M(0,\varepsilon)$. Система имеет единственное решение, т. к. функции $r_{\alpha,k}$ определены однозначно. Следовательно, функции $r_{\alpha,k}$ лежат в поле $M(0,\varepsilon)$.

Следствие 1.9. *Если росток f_a мероморфной в окрестности $\hat{U}(0,\varepsilon)$ функции f имеет над этой окрестностью фуксову особенность, то функция f мероморфна в окрестности $\hat{U}(0,\varepsilon)$.*

Доказательство. Росток $f_a \in K_a(0,\varepsilon)$, и его разложение по базису имеет вид $f_a = f \cdot 1$. Согласно следствию 1 росток f_a имеет целую фуксову особенность и поэтому $f \in M(0,\varepsilon)$.

Следствие 1.9 завершает доказательство теоремы Фробениуса.

1.3. Группа монодромии систем линейных дифференциальных уравнений, ее связь с группой Галуа. Результаты из п. 1.1 автоматически переносятся на системы линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \tag{19}$$

где $\mathbf{y} = y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $\mathbf{A}(x) = a_{i,j}(x)$, $1 \le i,j \le n$, — матрица рациональных функций и x — комплексная переменная. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — полюса матрицы $\mathbf{A}(x)$. В окрестности неособой точки x_0, $x_0 \ne \infty$, $x_0 \ne a_i$, $i = 1, \ldots, k$, решения уравнения образуют n-мерное пространство V^n. Возьмем теперь произвольную кривую $\gamma(t)$ на комплексной плоскости, ведущую из точки x_0 в точку x_1 и не проходящую через особые точки a_i, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, $\gamma(t) \ne a_i$. Решения уравнения будут аналитически продолжаться вдоль кривой, оставаясь при этом решениями уравнения. Поэтому каждой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ

пространства решений $V^n_{x_0}$ в точке x_0 в пространство решений V_{x_1} в точке x_1.

Если пошевелить кривую γ, не задевая при этом особых точек и оставляя закрепленными концы, то отображение M_γ меняться не будет. Замкнутым кривым будет отвечать линейное преобразование пространства V^n в себя. Совокупность всех таких линейных преобразований пространства V^n образует группу, которая и называется *группой монодромии уравнения* (19). Итак, группа монодромии уравнения — это группа линейных преобразований решений, которые возникают при обходе особых точек. Группа монодромии уравнения характеризует многозначность его решений.

Лемма 1.10. *1) Группа монодромии почти каждого решения системы (19) совпадает с группой монодромии системы (19). 2) Монодромная пара каждой компоненты каждого решения системы (19) почти нормальна. 3) Если группа монодромии системы (19) не лежит в некотором полном классе пар групп $\mathcal{M}$, то монодромная пара одной из компонент почти каждого решения этой системы не лежит в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Первые два утверждения леммы доказываются так же, как лемма 1.1. Утверждение 3) вытекает из 1) и из леммы 6.5 главы 5.

В окрестности неособой точки x_0 существуют все решения $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ уравнения (19). В этой окрестности можно рассмотреть дифференциальное поле функций $R\langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \rangle$, полученное присоединением к полю рациональных функций R всех компонент $y_{i1}, \dots, y_{in}$ всех решений $\mathbf{y}_i$ и всех их производных $y_{ij}^{(p)}$.

Каждое преобразование M_γ пространства решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего дифференциального поля $\mathcal{R}\langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \rangle$ над полем R. Действительно, вместе с вектор-функциями $\mathbf{y}_1, \dots, y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\mathcal{R}\langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \rangle$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции и дифференцирование, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Особая точка уравнения (19) называется *регулярной*, если в любом секторе с вершиной в особой точке все решения при подходе к этой точке растут не быстрее чем степенным образом (см. [Бо2], [Ай]). Известно, что около регулярной особой точки каждая компонента каждого решения имеет целую фуксову особенность (см. определение из п. 1.2). Уравнение (19) называется регулярным, если все его особые точки (включая ∞) регулярны. Для регулярного уравнения (19) все однозначные функции из поля $\mathcal{R}\langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \rangle$ являются рациональными функциями.

Теорема 1.11. *Для регулярной системы линейных дифференциальных уравнений (19) дифференциальное поле $\mathcal{R}\langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \rangle$ является расширением Пикара–Вессио поля R. Группа Галуа этого расширения является алгебраическим замыканием группы монодромии системы уравнений (19).*

Доказательство. На дифференциальном поле $\mathcal{R}\langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \rangle$ группа монодромии действует как группа изоморфизмов с полем инвариантов R. Поле $\mathcal{R}\langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \rangle$ порождено над R конечномерным $\mathcal{C}$-линейным пространством, инвариантным относительно действия монодромии, а именно, линейным пространством, натянутым на все компоненты всех решений уравнения (19). Теперь теорема вытакает из следствия 3.2 главы 3.

Теорема 1.12. *Каждая компонента каждого решения регулярной системы линейных дифференциальных уравнений выражается в квадратурах, в k-квадратурах и в обобщенных квадратурах, если и только если группа монодромии системы, соответственно, разрешима, k-разрешима или почти разрешима.*

Доказательство вытекает из теоремы Пикара–Вессио (см. теорему 5.1 главы 3). и из предыдущей теоремы. Как и в случае уравнения типа Фукса "положительная" часть теоремы, относящаяся к разрешимости системы, доказывается, в основном, при помощи линейной алгебры (см. §7 главы 3 и п. 1.1). А отрицательную часть теоремы значительно усиливает топологическию теорию Галуа (см. п. 2.4).

§2. Теория Галуа систем линейных дифференциальных уавнений типа Фукса с малыми коэффициентами

В этом параграфе приводятся явные критерии для различных видов разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с достаточно маленькими коэффициентами [Ил]. Доказательство использует критерий Колчина (см. §8 главы 5) и теорию Лаппо-Данилевского.

2.1. Системы уравнений типа Фукса. Среди систем регулярных линейных дифференциальных уравнений выделяются системы линейных дифференциальных уравнений типа Фукса. Это уравнение вида $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$, где матрица $\mathbf{A}(x)$ не имеет кратных полюсов и обращается в ноль на бесконечности. Другими словами, это уравнения вида

$$\mathbf{y}' = \sum_{p=1}^{k} \frac{A_p}{(x - a_p)}\mathbf{y},$$

где A_p — комплексная $(n \times n)$-матрица, а $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$ — вектор в $\mathbb{C}^n$. Точки a_p называются полюсами, а матрицы A_p — матрицами-вычетами системы уравнений типа Фукса.

Для систем уравнений типа Фукса, как и для других регулярных систем дифференциальных уравнений, *алгебраическое замыкание группы монодромии совпадает с группой Галуа порожденного системой уравнений расширения Пикара–Вессио поля рациональных функций* (см. п. 1.3).

Лаппо-Данилевский развил теорию аналитических функций от матриц и применил ее к дифференциальным уравнениям [Ла]. Нам понадобятся результаты Лаппо-Данилевского относительно систем уравнений типа Фукса, которые мы будем использовать в виде следствия, приведенного в конце этого пункта.

Возьмем неособую точку $x_0 \neq a_p$. Зафиксируем k кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ так, чтобы кривая γ_p начиналась в точке x_0, подходила к полюсу a_p, обходила его и возвращалась назад в точку x_0. Кривым $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ отвечают матрицы монодромии $M_1, \dots, M_k$. Очевидно, что матрицы $M_1, \dots, M_k$ порождают группу монодромии. При фиксации кривых матрицы монодромии зависят лишь от матриц-вычетов. Эта зависимость изучалась Лаппо-Данилевским.

Во-первых, он показал, что матрицы монодромии M_p — целые функции матриц-вычетов A_j. Точнее, *существуют специальные ряды с комплексными коэффициентами*

$$M_p = E + 2\pi i A_p + \sum_{1 \leq i,j \leq k} c_{i,j} A_i A_j + \dots, \tag{20}$$

от матриц $A_1, \dots, A_k$, выражающие матрицы монодромии M_p и сходящиеся при любых матрицах $A_1, \dots, A_k$.

Хотя матрица монодромии M_p зависит от всех матриц-вычетов A_j, ее собственные числа определяются только по собственным числам матрицы-вычета A_p.

Теорема 2.1 [Бо2], [Ай]. *Пусть $\{\mu_m\}$ — набор собственных чисел матрицы A_p. Тогда $\{e^{2\pi i \mu_m}\}$ — набор собственных чисел матрицы M_p.*

Знаменитая проблема Римана–Гильберта — это вопрос о разрешимости обратной задачи, т.е. вопрос о существовании уравнений типа Фукса с заданным набором матриц монодромии. Для почти всякого набора матриц монодромии задача Римана–Гильберта разрешима. Традиционно считалось, что этот классический результат переносится на любые наборы матриц монодромии. Однако, как обнаружил А.А. Болибрух [Бо1], [Бо2], это не так. Он предъявил пример набора матриц монодромии, для которых проблема Римана–Гильберта неразрешима.

Лаппо-Данилевский показал, что в предположении малости матриц-вычетов A_j матрицы-вычеты A_j — однозначные аналитические функции матриц монодромии M_p. А именно, он показал, что если ограничиться уравнениями типа Фукса с достаточно малыми матрицами-вычететами $\|A_j\| < \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(n, a_1, \dots, a_k)$, то для достаточно близких к E матриц монодромии M_p, $\|M_p - E\| < \varepsilon$, задача Римана–Гильберта имеет единственное решение. Более того, *существуют специальные ряды с комплексными коэффициентами*

$$A_p = -\frac{1}{2\pi i} E + \frac{1}{2\pi i} M_p + \sum_{1 \leq i,j \leq k} b_{ij} M_i M_j + \dots \tag{21}$$

от матриц $M_1, \dots, M_k$, выражающие матрицы-вычеты A_p и сходящиеся при $\|M_p - E\| < \varepsilon$.

Ряды (21) получается обращением рядов (20). Этот результат является своеобразной теоремой о неявной (для аналитических отображений с некоммутативными переменными).

Теорию Лаппо-Данилевского мы будем использовать в форме следующего следствия.

Следствие 2.2. *Матрицы монодромии лежат в алгебре с единицей, натянутой на матрицы-вычеты. Обратно, если матрицы-вычеты достаточно малы и матрицы монодромии достаточно близки к E, то матрицы-вычеты лежат в алгебре с единицей, натянутой на матрицы монодромии.*

2.2. Группы, порожденные матрицами, близкими к единичной. В этом пункте доказывается аналог теоремы Ли для матричных групп, порожденных матрицами, близкими к единичным. Напомним формулировку теоремы Жордана.

Теорема Жордана. *Конечная группа G линейных преобразований n-мерного пространства обладает диагональным нормальным делителем G_d ограниченного индекса,* $\mathrm{ind}(G, G_d) \leq J(n)$*).*

Известны различные явные оценки сверху чисел $J(n)$. (Например, Шур показал, что $J(n) \leq (\sqrt{8n}+1)^{2n^2} - \sqrt{8n}-1)^{2n^2}$ (см. [S2]).)

Утверждение 2.3. *Существует целое число $T(n)$, такое, что подгруппа G в $GL(n)$ обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, если и только если она обладает треугольным нормальным делителем индекса $\leq T(n)$.*

Доказательство. Теорема Ли гарантирует существование у группы G треугольного нормального делителя G_l конечного индекса. Действительно, достаточно положить $G_l = G \cap \overline{G}_0$, где $\overline{G}_0$ — компонента связности единицы алгебраического замыкания $\overline{G}$ группы G. Однако индекс G_l может быть как угодно велик. Так, например, для группы $\mathbb{Z}_k$ корней k-степени из единицы этот индекс равен k при $n = 1$. Мы будем увеличивать нормальный делитель G_l, оставляя его треугольным. Отметим, что нам достаточно доказать существование треугольной подгруппы ограниченного индекса, т. к. подгруппа индекса k содержит нормальный делитель индекса $\leq k!$. Доказательство будем вести индукцией по размерности n. Если группа G обладает инвариантным пространством V^k размерности k, $0 < k < n$, мы сможем сделать индукционный шаг. Действительно, группа G в этом случае действует и на пространстве V^k размерности k и на фактор-пространстве V^n/V^k размерности $(n-k)$. По индукции можно считать, что группа G обладает нормальным делителем индекса $\leq T(k)T(n-k)$, который треуголен как в V^k, так и в V^n/V^k, т. е. который треуголен в V^n.

Нормальный делитель G_l приводится к треугольному виду и обладает поэтому ненулевым максимальным собственным подпространством V^k. Возникают два случая: $V^k \subset V^n$ и $V^k = V^n$. Рассмотрим первый случай: $V^k \subset V^n$. Обозначим через $\tilde{G}_l$ подгруппу G, состоящую из всех преобразований, для которых V^k инвариантно (в этом месте и происходит увеличение нормального делителя G_l). Докажем, что $\mathrm{ind}(G, \tilde{G}_l) \leq n$. Действительно, группа перестановок G переставляет максимальные собственные пространства всякого своего нормального делителя и, в частности, G_l. Однако максимальных собственных пространств не может быть больше

n. Отсюда и вытекает нужное соотношение $\mathrm{ind}(G, \tilde{G}_l) \leq n$. Для окончания доказательства достаточно применить к группе $\tilde{G}_l$ индукционный шаг. Рассмотрим второй случай: $V^k = V^n$, т. е. G_l состоит из матриц λE. Можно считать, что группа G состоит из матриц с единичным детерминантом. Действительно, в противном случае можно рассмотреть группу, составленную из матриц $(\det A)^{-1}A$. Нормальный делитель D_l при этом предположении конечен (т. к. $\lambda^n = 1$). Группа G тоже конечна, так как $\mathrm{ind}(G, G_l) < \infty$. Для окончания доказательства достаточно воспользоваться теоремой Жордана.

Утверждение 2.3′. *Существует целое число $D(n)$, такое, что подгруппа G в $GL(n)$ обладает диагональным нормальным делителем конечного индекса, если и только если она обладает диагональным нормальным делителем индекса $\leq D(n)$.*

Утверждение 2.3′ доказывается точно так же, как утверждение 2.3, и мы не будем останавливаться на его доказательстве. Числа $T(n)$ и $D(n)$ также допускают явную оценку сверху (ср. [S2]).

Лемма 2.4. *Уравнение $X^N = A$, $\|A - E\| < \varepsilon$, $\|X - E\| < \varepsilon$, в котором X и A — комплексные $n \times n$ матрицы, близкие к E, имеет единственное решение, если $\varepsilon = \varepsilon(n, N)$ достаточно мало. При этом каждое инвариантное пространство V матрицы A будет инвариантно и для матрицы X.*

Доказательство. Положим $B = A - E$ и

$$X = E + \frac{1}{N}B + \frac{1}{2}\frac{1}{N}(\frac{1}{N} - 1)B^2 + \dots.$$

При $\|B\| < 1$ ряд сходится и $X^N = A$. Выберем теперь $\varepsilon = \varepsilon(n, N)$ столь малым, чтобы теорема о неявной гарантировала бы единственность решения. Пространство V будет инвариантно относительно $B = A - E$ и, следовательно, относительно X.

Лемма 2.5. *Пусть N-е степени всех матриц из группы G лежат в некоторой алгебраической группе L, тогда группа $G \cap L)$ имеет в группе G конечный индекс.*

Доказательство. Рассмотрим алгебраическое замыкание $\overline{G}$ группы G. Легко видеть, что $X^N \in L$ при $X \in \overline{G}$. Обозначим через $\overline{G}_0$ и L_0 компоненты связности единицы групп $\overline{G}$ и L. Если A лежит в группе L_0, $A = e^M$, то уравнение $X^N = A$ имеет решение в этой же группе. Действительно, достаточно положить $X = e^{\frac{M}{N}}$. Но уравнение $X^N = A$ имеет единственное решение при матрицах A и X, близких к E. Отсюда следует, что $\overline{G}_0 \subseteq L_0 \subseteq L$. Лемма теперь вытекает из того, что $\mathrm{ind}(\overline{G}, \overline{G}_0) < \infty$.

Замечание. При $L = e$ лемма 2.5 превращается в теорему Бернсайда: *матричная группа с тождеством $X^N = e$ конечна.*

Утверждение 2.6. *Существует целое число $N(n)$, такое, что подгруппа G в $GL(n)$ обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы $A^{N(n)}$, $A \in G$, одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. В одну сторону утверждение 2.6 вытекает из утверждения 2.3, если положить $N(n) = T(n)!$. Для доказательства в другую сторону нужно применить лемму 2.5 для группы G и группы треугольных матрита L.

Аналогично доказывается следующее

Утверждение 2.6′. *Существует целое число $N(n)$, такое, что подгруппа G в $GL(n)$ обладает диагональным нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы $A^{N(n)}$, $A \in G$, одновременно приводятся к диагональному виду.*

Теорема 2.7. *Существует положительное число $\varepsilon(n) > 0$, такое, что подгруппа G в $GL(n)$, порожденная матрицами A_α, близкими к единичной, $\|E - A_\alpha\| < \varepsilon(n)$, обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы A_α одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon(n) > 0$ столь малым, что для уравнения

$$X^{N(n)} = A,$$

$\|E - X\| < \varepsilon(n)$, выполнены условия леммы 2.4. По утверждению 2.6 все матрицы $A_\alpha^{N(n)}$ должны приводиться к треугольному виду. Но по лемме 1 инвариантное пространство матриц $A_\alpha^{N(n)}$ и A_α совпадают. Поэтому матрицы A_α тоже приводятся к треугольному виду.

Аналогично доказывается следующее

Утверждение 2.8. *Существует положительное число $\varepsilon(n) > 0$, такое, что подгруппа G в $GL(n)$, порожденная матрицами A_α, близкими к единичной, $\|E - A_\alpha\| < \varepsilon(n)$, обладает диагональным нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы A_α одновременно приводятся к диагональному виду.*

Замечание. В теореме 2.7 и в утверждении 2.8 можно ослабить требование близости матриц A_α к единичной. Достаточно ограничиться близостью в топологии Зарисского. Скажем, что матрица A k-резонансна, если у нее найдутся разные собственные числа λ_1 и λ_2, связанные соотношением $\lambda_1 = \varepsilon_k \lambda_2$, $\varepsilon_k^k = 1$, $\varepsilon_k \neq 1$. Все k-резонансные матрицы образуют алгебраическое множество, не содержащее единицы. Достаточно требовать, чтобы матрицы A_α не были $N(n)$-резонансными.

2.3. Явные критерии разрешимости. Перейдем к явному критерию разрешимости. Начнем с двух простых лемм.

Лемма 2.9. *Система типа Фукса n-го порядка*

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x - a_i}\mathbf{y}$$

с достаточно малыми коэффициентами $\|A_i\| < \varepsilon = \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$ решается в обобщенных квадратурах, если и только если ее матрицы монодромии M_i треугольны.

Доказательство. Группа монодромии системы порождена матрицами монодромии M_i. Если матрицы-вычеты A_i малы, $\|A_i\| < \varepsilon$, то матрицы M_i будут близки к E. Выберем $\varepsilon = \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$ столь малым, чтобы для матриц монодромии $M_1, \ldots, M_k$ выполнялись условия теоремы 2.7. В силу этой теоремы у группы монодромии существует разрешимый нормальный делитель конечного индекса, если и только если матрицы $M_1, \ldots, M_k$ треугольны. Теперь осталось воспользоваться теоремой 1.12.

Лемма 2.10. *Для системы типа Фукса треугольность и диагональность группы Галуа эквивалентны тому же условию на матрицы монодромии $M_1, \ldots, M_k$.*

Доказательство. Группа монодромии порождена матрицами монодромии $M_1, \ldots, M_k$ и треугольна или диагональна вместе с ними. Теперь лемма вытекает из того, что для уравнения типа Фукса группа Галуа совпадает с алгебраическим замыканием группы монодромии (см. п. 1.3).

Критерий разрешимости. *По набору полюсов $a_1, \ldots, a_k$ и порядку n можно указать число $\varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$, такое, что условия разрешимости для систем n-го порядка типа Фукса*

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x - a_i}\mathbf{y}$$

с малыми коэффициентами, $\|A_i\| \leq \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$, принимают явный вид. Именно, система решается:

1) *в квадратурах или обобщенных квадратурах[1], если и только если матрицы A_i (в некотором базисе) треугольны;*
2) *в интегралах и алгебраических функциях или интегралх и радикалах[2], если и только если матрицы A_i треугольны и их собственные числа рациональны;*
3) *в интегралах, если и только если матицы A_i треугольны и их собственные числа равны нулю;*
4) *в экспонентах интегралов и в алгебраических функциях или в экспонентах интегралов[2], если и только если матрицы A_i диагональны;*
5) *в алгебраических функциях или в радикалах[2], если и только если матрицы A_i диагональны и их собственные числа рациональны;*
6) *в рациональных функциях, если и только если все матрицы A_i равны нулю.*

[1] Эти виды разрешимости различаются, если не ограничивать величины коэффициентов.

Доказательство. Выберем $\varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$ столь малым, чтобы выполнялись условия леммы 1 и чтобы матрицы-вычеты выражались через матрицы монодромии (см. п. 2.1).

Каждый из видов разрешимости влечет за собой разрешимость в обобщенных квадратурах. Разрешимость в обобщенных квадратурах в наших предположениях влечет треугольность матриц монодромии (лемма 2.9) и, следовательно, треугольность группы Галуа (лемма 2.10). Поэтому мы находимся в рамках применимости критерия, приведенного в конце § 8 главы 3. Нам нужно превратить условия на группу Галуа из этого критерия в условия на матрицы-вычеты A_i.

Условия на группу Галуа из критерия §8 главы 3 эквивалентны тем же условиям на матрицы монодромии $M_1, \ldots, M_k$. Частично мы это проверили в лемме 2.10. Остальная проверка столь же несложна.

В предположениях нашей теоремы условие принадлежности матриц монодромии $M_1, \ldots, M_k$ некоторой алгебре с единицей, например, алгебре треугольных или диагональных матриц, эквивалентно тому же условию на матрицы-вычеты $A_1, \ldots, A_k$ (следствие из п. 2.1).

Собственные числа матрицы M_i будут корнями из единицы или единицами, если и только если собственные числа матрицы A_i — рациональные или целые числа (см. п. 2.1).

Теперь наш критерий вытекает из критерия §8 главы 3.

Замечание. Незадолго до смерти Андрей Андреевич Болибрух сказал мне, что в условиях критерия разрешимости требование малости матриц A_i можно ослабить. *Достаточно лишь требовать, чтобы собственные числа этих матриц были бы малы.*

2.4. Сильная неразрешимость уравнений. Топологическая теория Галуа позволяет усилить классические результаты о неразрешимости уравнений в явном виде.

Группа монодромии алгебраической функции совпадает с группой Галуа соответствующего расширения Галуа поля рациональных функций. Поэтому, согласно теории Галуа, 1) *алгебраическая функция представима в радикалах, если и только если ее группа монодромии разрешима*; 2) *алгебраическая функция выражается через рациональные функции при помощи радикалов и решения алгебраических уравнений степени k, если и только если ее группа монодромии k-разрешима.*

Из наших результатов (см. п. 7.2 главы 5) вытекает следующее следствие.

Следствие 2.11. *1) Если группа монодромии алгебраического уравнения над полем рациональных функций неразрешима, то его решение не принадлежит классу функций, представимых при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур; 2) если группа монодромии алгебраического уравнения не k-разрешима, то его решение не принадлежит классу функций, представимых при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и k-квадратур.*

Аналогичным образом усиливаются результаты о неразрешимости в явном виде из пп. 1.1, 1.3 и 2.3.

Следствие 2.12. *Если группа монодромии линейного дифференциального уравнения над полем рациональных функций неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то общее решение уравнения не принадлежит классу функций, представимых при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур).*

Следствие 2.13. *Если группа монодромии системы линейных дифференциальных уравнений над полем рациональных функций неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то, по крайней мере, одна из компонент почти каждого решения не лежит в классе функций, представимых с помощью однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур).*

Следствие 2.14. *Если система дифференциальных уравнений типа Фукса с маленькими коэффициентами не является треугольной, то, по крайней мере, одна из компонент почти каждого решения не лежит в классе функций, представимых с помощью однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур).*

§3. Отображение полуплоскости на многоугольник, ограниченный дугами окружностей

В этом параграфе классифицируются многоугольники G, ограниченные дугами окружностей, для которых функция f_G, задающая отображение Римана верхней полуплоскости на многоугольник G, представима в явном виде. Мы пользуемся принципом симметрии Римана-Шварца и описанием конечных подгрупп группы дробно-линейных преобразований.

3.1. Применение принципа симметрии. Рассмотрим на комплексной плоскости многоугольник G, ограниченный дугами окружностей. Согласно теореме Римана существует функция f_G, отображающая верхнюю полуплоскость на многоугольник G. Это отображение изучалось Риманом, Шварцем, Кристоффелем, Клейном и другими. Напомним нужные нам классические результаты.

Обозначим через $B = \{b_j\}$ прообраз множества вершин многоугольника G при отображении f_G, через $H(G)$ — группу конформных преобразований сферы, порожденную инверсиями относительно сторон многоугольника, и через $L(G)$ — подгруппу индекса 2 группы $H(G)$, состоящую из дробно-линейных преобразований. Из принципа симметрии Римана-Шварца вытекает следующее утверждение.

Утверждение.

1) *Функция f_G мероморфно продолжается вдоль всех кривых, не пересекающих множество B.*
2) *Все ростки многозначной функции f_G в неособой точке $a \notin B$ получаются применением к фиксированному ростку f_a группы дробно-линейных преобразований $L(G)$.*

3) Группа монодромии функции f_G изоморфна группе $L(G)$.
4) Около точек b_j функция f_G имеет особенности следующего вида. Если в вершине a_j многоугольника G, соответствующей точке b_j, угол равен $\alpha_j \neq 0$, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z) = (z-b_j)^{\beta_j}\varphi(z)$, где $\beta_j = \alpha_j/2\pi$, а функция $\varphi(z)$ голоморфна около точки b_j. Если же угол $\alpha_j = 0$, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z) = \ln(z) + \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна около b_j.

Из наших результатов вытекает, что если функция f_G представима в обобщенных квадратурах, то группа $L(G)$ и вместе с ней группа $H(G)$ лежат в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$.

3.2. Группы дробно-линейных и конформных преобразований класса $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$. Пусть π — эпиморфизм группы $SL(2)$ матриц 2-го порядка с определителем 1 в группу дробно-линейных преобразований L,

$$\pi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как $\ker\pi = \mathbb{Z}_2$, группа $\tilde{L} \subseteq L$ и группа $\pi^{-1}(\tilde{L}) = \Gamma \subseteq SL(2)$ лежат в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$ одновременно. Группа Γ — матричная группа, поэтому группа Γ лежит в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, если и только если она обладает нормальным делителем Γ_0 конечного индекса, приводящимся к треугольному виду. (Этот вариант теоремы Ли верен и в многомерном пространстве и играет важную роль в дифференциальной теории Галуа. Мы подробно обсудим теоремы такого рода во второй части статьи???, посвященной разрешимости в квадратурах дифференциальных уравнений типа Фукса.) Группа Γ_0 состоит из матриц второго порядка, поэтому группа Γ_0 приводится к треугольному виду в одном из следующих трех случаев:

1) группа Γ_0 имеет единственное собственное одномерное подпространство;
2) группа Γ_0 имеет два собственных одномерных подпространства;
3) группа Γ_0 имеет двумерное собственное пространство.

Перейдем теперь к группе дробно-линейных преобразований $\tilde{L} = \pi(\Gamma)$. Группа $\tilde{L}$ дробно-линейных преобразований принадлежит классу $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, если и только если она обладает нормальным делителем $L_0 = \pi(\Gamma_0)$ конечного индекса, множество неподвижных точек которого состоит из одной точки, или из двух, или из всей сферы Римана.

Группа конформных преобразований $\tilde{H}$ обладает подгруппой $\tilde{L}$ индекса 2 (или индекса 1), состоящей из дробно-линейных преобразований. Поэтому для группы конформных преобразований $\tilde{H}$ класса $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$ справедливо аналогичное утверждение.

Лемма о конформных преобразованиях класса $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$. *Группа конформных преобразований сферы принадлежит классу $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, если и только если выполнено хотя бы одно из трех условий:*
1) группа имеет неподвижную точку;

2) группа имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек;
3) группа конечна.

Лемма вытекает из предыдущего, т. к. множество неподвижных точек нормального делителя инвариантно относительно действия группы. Хорошо известно, что *конечная группа $\tilde{L}$ дробно-линейных преобразований сферы дробно-линейной заменой координаты приводится к группе вращений.*

Несложно показать, что если произведению инверсии относительно двух разных окружностей при стереографической проекции соответствует вращение сферы, то этим окружностям соответствуют большие круги. Поэтому каждая *конечная группа $\tilde{H}$ конформных преобразований, порожденная инверсиями относительно окружностей, дробно-линейной заменой координаты приводится к группе движений сферы, порожденной отражениями.*

Хорошо известны все конечные группы движений, порожденные отражениями. Каждая такая группа есть группа движений одного из следующих тел:

1) правильной n-угольной пирамиды;
2) n-угольного диэдра, или тела, образованного двумя равными правильными n-угольными пирамидами, склеенными по общему основанию;
3) тетраэдра;
4) куба или октаэдра;
5) додекаэдра или икосаэдра.

Все эти группы движений, за исключением группы додекаэдра-икосаэдра, разрешимы. На сфере, центр которой совпадает с центром тяжести тела, плоскости симметрии тела высекают некоторую сетку больших кругов. Сетки, соответствующие перечисленным телам, будем называть конечными сетками больших кругов. Стереографические проекции конечных сеток изображены на рис. 1–5.

3.3. Интегрируемые случаи. Вернемся к вопросу о представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Рассмотрим возникающие случаи и покажем, что найденное условие на группу монодромии не только необходимы, но и достаточны для представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Первый случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет неподвижную точку. Это означает, что продолжения сторон многоугольника G пересекаются в одной точке. Переводя эту точку дробно-линейным преобразованием в бесконечность, получим многоугольник $\overline{G}$, ограниченный отрезками прямых.

Все преобразования группы $L(\overline{G})$ имеют вид $z \to az + b$. Все ростки функции $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ в неособой точке c получаются применением к фиксированному ростку $\overline{f}_c$ группы $L(\overline{G})$, $\overline{f}_c \to a\overline{f}_c + b$. Росток $R_c = \overline{f}_c''/\overline{f}_c'$ инвариантен при действии группы $L(\overline{G})$. Значит, росток R_c есть росток однозначной функции. Особые точки b_j функции R_c могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 3.1.). Поэтому функция R_c рациональна. Уравнение $\overline{f}''/\overline{f}' = R$ интегрируется в квадратурах. Этот случай ин-

тегрируемости хорошо известен. Функция $\overline{f}$ в этом случае называется интегралом Кристоффеля-Шварца.

Рис. 1. Первый случай интегрируемости

Второй случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек. Это означает существование таких двух точек, что для каждой стороны многоугольника G точки или инверсионны относитель но стороны, или лежат на ее продолжении. Переведем эти точки дробно-линейным преобразованием в ноль и в бесконечность. Мы получим многоугольник $\overline{G}$, ограниченный дугами окружностей с центрами в точке 0 и отрезками лучей, выходящих из точки 0 (см. рис. 2). Все преобразования группы $L(\overline{G})$ имеют вид $z \to az,\ z \to \frac{b}{z}$. Все ростки функции $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ в неособой точке c получается применением к фиксированному ростку $\overline{f}_c$ преобразований группы $L(\overline{G})$

$$\overline{f}_c \to a\overline{f}_c,\ \overline{f}_c \to b/\overline{f}_c.$$

Росток $R_c = (\overline{f}'_c/\overline{f}_c)^2$ инвариантен при действии группы $L(\overline{G})$ и является ростком однозначной функции R. Особенности функции R могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 3.1), поэтому функция R рациональна. Уравнение $R = (\overline{f}'/\overline{f})^2$ интегрируется в квадратурах.

Рис. 2. Второй случай интегрируемости

Третий случай интегрируемости (см. рис. 3–7). Группа $H(G)$ конечна. Это означает, что многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводятся в многоугольник $\overline{G}$, стороны которого лежат на некоторой конечной сетке больших кругов. Группа $L(G)$ конечна, и, следовательно, функция f_G конечнозначна. Так как все особенности функции f_G степенного типа (см. утверждение из п. 3.1), то функция f_G есть алгебраическя функция.

Остановимся на случае конечной разрешимой группы $H(G)$. Такой случай представляется, если и только если многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводится в многоугольник $\overline{G}$, стороны которого лежат на конечной сетке, отличной от сетки додекаэдра-икосаэдра. В этом случае группа $L(G)$ разрешима. Применяя теорию Галуа, легко показать, что в этом случае функция f_G представляется через рациональные функции при помощи арифметических операций и радикалов.

Из наших результатов (см. п. 7.2 главы 5) вытекает

Теорема о многоугольниках, ограниченных дугами окружностей. *Для любого многоугольника G, не содержащегося в перечисленных выше трех случаях интегрируемости, функция f_G не только не представима в обобщенных квадратурах, но и не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.*

Рис. 3. Сетка n-угольной пирамиды ($n = 6$)

Рис. 4. Сетка n-угольного диэдра ($n = 6$)

Рис. 5. Сетка тетраэдра

Рис. 6. Сетка куба–октаэдра

Рис. 7. Сетка додекаэдра–икосаэдра