# ВВЕДЕНИЕ

## §1. Разрешимости и неразрешимость уравнений в конечном виде

Многочисленные неудачные попытки решения ряда алгебраических и дифференциальных уравнений “в конечном” (“в явном”) виде привели математиков к убеждению, что явных решений для этих уравнений просто не существует. Настоящая книга посвящена вопросу о неразрешимости уравнений в конечном виде (в особенности, топологическим препятствиям к такой разрешимости). Этот вопрос имеет богатую историю.

Первые доказательства неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах были найдены Абелем и Галуа. Обдумывая задачу о нахождении в явном виде неопределенного интеграла от алгебраической дифференциальной формы, Абель заложил основы теории алгебраических кривых. Лиувилль продолжил работы Абеля и доказал неэлементарность неопределенных интегралов многих алгебраических и элементарных дифференциальных форм. Неразрешимость в квадратурах ряда линейных дифференциальных уравнений тоже впервые была доказана Лиувиллем.

Еще Галуа связал вопрос о разрешимости в радикалах со свойствами некоторой конечной группы (так называемой группы Галуа алгебраического уравнения). Собственно, само понятие конечной группы было введено Галуа именно в связи с этим вопросом. Софус Ли ввел понятие непрерывной группы преобразований, пытаясь явно решать дифференциальные уравнения и приводить их к более простому виду. Пикар с каждым линейным дифференциальным уравнением связал его группу Галуа, которая является группой Ли (и, более того, является алгебраической матричной группой). Пикар и Вессио показали, что именно эта группа отвечает за разрешимость уравнений в квадратурах. Колчин развил теорию алгебраических групп, придал теории Пикара–Вессио законченный вид и обобщил ее на случай голономных систем линейных дифференциальных уравней в частных производных.

Арнольд обнаружил, что ряд классических вопросов математики неразрешим из-за топологических причин. В частности, он показал что общее алгебраическое уравнение степени $\geq 5$ не решается в радикалах именно по топологическим причинам. Развивая подход Арнольда, в начале семидесятых годов я построил одномерный вариант топологической теории Галуа. Согласно этой теории, топология расположения римановой поверхности аналитической функции над плоскостью комплексного переменного может препятствовать представимости этой функции при помощи явных формул. На этом пути получаются наиболее сильные из известных

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

результатов о непредставимости функций явными формулами. Недавно мне удалось обобщить эти топологические результаты на случай многих переменных.

В книге излагается топологическая теории Галуа: приводится полное и подробное изложение одномерного варианта теории и (более схематическое) изложение многомерного варианта. Топологическая теория тесно связана как с обычной (алгебраической), так и с дифференциальной теориями Галуа.

(Обычная) теория Галуа проста и идейно связана с топологической теорией. В "разрешительной" части топологической теории используется не только линейная алгебра, но и результаты теории Галуа. Теория Галуа и ее применения к разрешимости алгебраических уравнений в радикалах излагаются в книге со всеми доказательствами. Кроме задачи о разрешимости в радикалах рассматриваются и другие близкие задачи, например, задача о разрешимости уравнения при помощи радикалов и вспомогательных уравнений, степени, не превосходящей $k$.

Основные теоремы теории Пикара–Вессио формулируются без доказательств. Подчеркивается их аналогия с теорией Галуа. Обсуждается, почему теория Пикара–Вессио (по крайней мере, в принципе) отвечает на вопросы о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в явном виде. "Разрешительная" часть топологической теории Галуа (доказывающая, например, разрешимость в квадратурах линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с разрешимой группой монодромии) использует лишь простую, линейно-алгебраическую часть теории Пикара–Вессио. Эта линейная алгебра излагается в книге. "Запретительная" часть топологической теории Галуа (доставляющая, например, результаты о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений с неразрешимой группой монодромии) изложена со всеми подробностями. Она сильнее чем "запретительная" часть теории Пикара–Вессио.

В книге обсуждается также красивое построение Лиувилля класса элементарных функций, класса функций, представимых в квадратурах, и т.д. и его теория, оказавшая большое влияние на все дальнейшие работы в этой области.

В книге идет речь о трех вариантах теории Галуа — обычном, дифференциальном и топологическом. Эти варианты объединяет общий подход к задачам о разрешимости и неразрешимости уравнений, основанный на теории групп. Неверно, однако, что все результаты о разрешимости и неразрешимости связаны с теорией групп. Ряд ярких результатов, основанных на другом подходе, содержится в теории Лиувилля. Чтобы дать представление о теории Лиувилля, мы приводим полное доказательство его теоремы об неэлементарности некоторых неопределенных интегралов (в частности, неопределенных интегралов от ненулевых голоморфных дифференциальных форм на алгебраических кривых положительного рода).

В книге не всегда соблюдается историческая последовательность. Например, теорема Пикара–Вессио о разрешимости линейных дифферен-

циальных уравнений в квадратурах была доказана раньше, чем основная теорема дифференциальной теории Галуа. Однако теорема Пикара–Вессио является прямым следствием этой основной теоремы, и именно так она представляется в настоящей книге.

Несколько слов о литературе. Изложение метода Лиувилля можно найти в замечательной книге Ритта [Ri]. Обычная теория Галуа хорошо излагается во многих местах, например, в [Чеб1], [Чеб2]. Короткое и ясное изложение теории Пикара–Вессио содержится в книге Капланского [Ка], более современное и обстоятельное — в книге Зингера и Ван ден Пута [С3]. Теория Колчина изложена в [Ко1], [Ко2]. Имеется также интересный обзор Зингера о разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде, содержащий обширную библиографию [S1].

О нумерации: “лемма 6.4 из главы 5” означает четвертое отдельно сформулированное утверждение в параграфе шесть пятой главы. Аналогично нумеруются остальные теоремы, утверждения, следствия и леммы (если ссылка идет внутри той же главы, то номер главы не указывается). Формулы во всей книге имеет сплошную нумерацию.

Мои первые результаты по одномерной топологической теории Галуа появились в начале 70-х годов. Тогда моим научным руководителем был В.И. Арнольд, который и заинтересовал меня этой тематикой. Я бесконечно благодарен Владимиру Игоревичу. В свое время я не опубликовал полного изложения результатов: сначала не мог разобраться в сложной истории предмета, а потом занялся совсем другой математикой. Я признателен А.А.Болибруху, который побудил меня вернуться к этой теме, и моей жене Т.В. Белокриницкой, которая помогла подготовить книги к печати.

## §2. Постановка задачи о разрешимости уравнений в конечном виде

Некоторые алгебраические и дифференциальные уравнения “решаются явно”. Что это значит? Если решение предъявлено, оно само и дает ответ на этот вопрос. Обычно все же попытки явного решения уравнений оказываются безуспешными. Возникает желание доказать, что для тех или иных уравнений явных решений не существует. Тут уже просто необходимо точно определить, о чем идет речь (иначе непонятно, что, собственно, мы собираемся доказать). С современной точки зрения в классических работах недостает четких определений и формулировок теорем. Лиувилль, несомненно, точно понимал, что он доказывает. Он не только сформулировал задачи о разрешимости уравнений в элементарных функциях и квадратурах, но и алгебраизировал эти задачи. После его работ все эти понятия удалось определить над любым дифференциальным полем. Но требования к математической строгости во времена Лиувилля были не такие, как сейчас. Согласно Колчину (см. [Ко1]), даже у Пикара основные определения еще недостаточно продуманы. Работы Колчина вполне современны, но его определения с самого начала даются для абстрактных дифференциальных полей.

Все же неопределенный интеграл элементарной функции или решение линейного дифференциального уравнения являются функциями, а не элементами абстрактного дифференциального поля. В функциональных пространствах кроме дифференцирования и арифметических операций есть, например, абсолютно неалгебраическая операция суперпозиции. Вообще, в функциональных пространствах больше средств для написания "явных формул", чем в абстрактных дифференциальных полях. Кроме этого, приходится учитывать, что функции бывают многозначными, имеют особенности и т.д.

Формализовать задачу о неразрешимости уравнений в явном виде в функциональных пространствах несложно (в книге мы будем интересоваться именно этой задачей). Сделать это можно так: можно выделить тот или иной класс функций и сказать, что уравнение решается явно, если его решение принадлежит этому классу. Разные классы функций соответствуют разным понятиям разрешимости.

**2.1. Задание класса функций с помощью списков основных функций и допустимых операций.** Класс функций можно выделить, задав список *основных функций* и список *допустимых операций*. После этого класс функций определяется как множество всех функций, которые получаются из основных функций при помощи применения допустимых операций. В пункте 2.2 именно таким способом определяются классические классы функций.

Классические классы функций, фигурирующие в задачах о разрешимости в конечном виде, содержат многозначные функции. В связи с этим исходные понятия нужно уточнить. В этом пункте принимается "глобальный" вариант работы с многозначными функциями, приводящий к расширенному пониманию определения класса функций, заданного списками основных функций и допустимых операций. В глобальном варианте многозначая функция рассматривается как единый объект. Определяются операции над многозначными функциями. Результат применения этих операций тоже многозначен: результатом является некоторое множество многозначных функций, про каждую из которых говорится, что она получена применением заданной операции к заданным функциям. Класс функций определяется как множество всех (многозначных) функций, которые получаются из основных функций при помощи допустимых операций.

Определим, например, что такое сумма двух многозначных функций одной переменной.

Определение. Возьмем произвольную точку $a$ на комплексной прямой, один из ростков $f_a$ аналитической функции $f$ в точке $a$ и один из ростков $g_a$ аналитической функции $g$ в той же точке $a$. Будем говорить, что многозначная функция $\varphi$, порожденная ростком $\varphi_a = f_a + g_a$, *представима в виде суммы функций* $f$ и $g$.

Например, легко видеть, что ровно две функции представляются в виде $\sqrt{x} + \sqrt{x}$, это $f_1 = 2\sqrt{x}$ и $f_2 \equiv 0$. Абсолютно аналогично определяются и

другие операции над многозначными функциями. *Замкнутость какого-либо класса многозначных функций относительно сложения означает, что этот класс вместе с любыми двумя функциями содержит все функции, представимые в виде их суммы.* То же самое нужно сказать и про все другие операции над многозначными функциями, понимаемые в указанном выше смысле.

В приведенном выше определении важную роль играет не только сама операция сложения, но и операция аналитического продолжения, спрятанная в понятии многозначной функции. Действительно, рассмотрим следующий пример. Пусть $f_1$ — аналитическая функция, определенная в области $U$ комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, не продолжающаяся аналитически за пределы области $U$, и пусть $f_2$ — аналитическая функция в области $U$, определенная равенством $f_2 = -f_1$. Согласно данному определению, функция, тождественно равная нулю, представима в виде $f_1 + f_2$ *на всей комплексной прямой.* Согласно общепринятой точке зрения, равенство $f_1 + f_2 = 0$ справедливо только в области $U$, но не вне ее.

В глобальном варианте работы с многозначными функциями мы не настаиваем на существовании *единой области*, в которой все нужные действия производились бы над однозначными ветвями многозначных функций. Одна операция может производиться в одной области, а другая операция — в другой области над аналитическими продолжениями полученных функций. В сущности, это расширенное понимание операций эквивалентно добавлению операции аналитического продолжения к числу допустимых операций над аналитическими ростками. Для функции одной переменной удается получить топологические ограничения даже и при таком, расширенном, понимании операций над многозначными аналитическими функциями.

*Ниже при рассмотрении топологических препятствий к принадлежности функции одной переменной тому или иному классу мы будем иметь в виду глобальный вариант определения класса функций с помощью списков основных функций и допустимых операций.*

Для функций многих переменных в столь расширенной формулировке это сделать не удается и приходится принять более ограничительную формулировку (см. п. 1.1 главы 7), связанную с ростками функций, которая, впрочем, не менее (а может быть, даже более) естественна. Единственное место в книге, где мы используем эту более ограничительную формулировку, — глава 7, в которой идет речь о функциях многих переменных.

**2.2. Классические классы функций одной переменной.** В этом пункте определяются классические классы функций одной переменной (для многих переменных определения приведены в §1 главы 7). Мы будем задавать эти классы при помощи списков основных функций и допустимых операций.

Функции одной переменной, представимые в радикалах.

*Список основных функций*: все комплексные константы, независимая переменная $x$.

*Список допустимых операций*: арифметические операции и операции извлечения корня $\sqrt[n]{f}$ степени $n$, $n = 2, 3, \ldots$, из заданной функции $f$.

Функция $g(x) = \sqrt[3]{5x + 2\sqrt[2]{x} + \sqrt[7]{x^3 + 3}}$ доставляет пример функции, представимой в радикалах.

С этим классом связана знаменитая задача о разрешимости уравнений в радикалах. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \cdots + r_n = 0,$$

в котором $r_i$ — рациональные функции одной переменной. Полный ответ на вопрос о разрешимости таких уравнения в радикалах дает теория Галуа (см. главу 2).

Для определения остальных классов нам понадобится список основных элементарных функций. В этот список, в сущности, входят те функции, которые мы проходили в школе и которые часто вносят в клавиатуры калькуляторов.

Список основных элементарных функций.

1) Все комплексные константы и независимая переменная $x$.

2) Экспонента, логарифм и степенная функция $x^\alpha$, где $\alpha$ — любая комплексная константа.

3) Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс.

4) Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Перейдем теперь к списку классических операций над функциями. Здесь приводится начало списка. Он будет продолжен в §1 главы 1.

Список классических операций.

1) *Операция суперпозиции*, сопоставляющая функциям $f$, $g$ функцию $f \circ g$.

2) *Арифметические операции*, сопоставляющие функциям $f$ и $g$ функции $f + g$, $f - g$, $fg$ и $f/g$.

3) *Операция дифференцирования*, сопоставляющая функции $f$ функцию $f'$.

4) *Операция интегрирования*, сопоставляющая функции $f$ ее неопределенный интеграл $y$ (т.е. любую функцию $y$ такую, что $y' = f$; по функции $f$ функция $y$ определена с точностью до аддитивной постоянной).

5) *Операция решения алгебраического уравнения*, сопоставляющая функциям $f_1, \ldots, f_n$ функцию $y$ такую, что $y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n = 0$ (по функциям $f_1, \ldots, f_n$ функция $y$ определена не вполне однозначно, т.к. алгебраическое уравнение степени $n$ может иметь $n$ решений).

Вернемся теперь к определению классических классов функций одной переменной.

Элементарные функции одной переменной.

*Список основных функций*: основные элементарные функции.

*Список допустимых операций*: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование.

Элементарные функции записываются формулами, например, следующей:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\exp(\sin x) + \cos x\right).$$

**Функции одной переменной, представимые в квадратурах.**

*Список основных функций*: основные элементарные функции.

*Список допустимых операций*: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование, интегрирование.

Например, эллиптический интеграл

$$f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}},$$

где $P$ — кубический полином, представим в квадратурах. Но, как доказал Лиувилль, если полином $P$ не имеет кратных корней, то функция $f$ не является элементарной.

**Обобщенные элементарные функции одной переменной.** Этот класс функций определяется в точности так же, как класс элементарных функций. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

**Функции одной переменной, представимые в обобщенных квадратурах.** Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Определим еще два класса функций, близких к классическим классам.

**Функции одной переменной, представимые в $k$-радикалах.** Этот класс функций определяется в точности также, как класс функций, предствимых в радикалах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени $\leq k$.

**Функции одной переменной, представимые в $k$-квадрарурах.** Этот класс функций определяется в точности также, как класс функций, предствимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени $\leq k$.