Независимый московский университет

Московский центр непрерывного математического образования

Высший колледж математики

А. Г. Хованский

Комплексный анализ

МЦНМО, ВКМ НМУ 2004

Аскольд Георгиевич Хованский

А. Г. Хованский
Комплексный анализ. — М: МЦНМО: ВКМ НМУ, 2004. — 48 с.

Предисловие

Этот семестровый курс читался в НМУ весной 2003 года и предназначался второкурсникам. Уровень подготовки слушателей был разным. Раз в неделю была двухчасовая лекция, за которой следовал двухчасовой семинар (имеются в виду академические часы). На лекциях, с одной стороны, обсуждалась общая картина и связи комплексного анализа с другими областями математики. С другой стороны, основные теоремы разбивались на короткие, понятные сами по себе утверждения, которые объяснялись шаг за шагом. После лекции эти утверждения включались в списки задач, которые раздавались слушателям и обсуждались на семинарах. Семинары вели В. А. Кисунько, И. А. Пушкарь и С. П. Чулков. Они отдельно обсуждали с каждым студентом каждую решенную им задачу.

Экзамен состоял из теоретического зачета и письменной домашней контрольной. Зачет шел в течение всего семестра: студенты сдавали решенные ими задачи на каждом семинаре и в течение нескольких дополнительных занятий в конце курса. Задачи для письменного экзамена — рассчитанной на одну неделю домашней письменной работы — мы, в основном, заимствовали из предыдущих письменных экзаменов по комплексному анализу в НМУ.

Здесь приводятся в слегка отредактированном виде задачи, которые мы обсуждали в течение семестра и которые составляли значительную часть курса. Пункты 15, 16 и 18 написаны чуть позже и в семестре не разбирались.

О содержании курса. Первые четыре пункта посвящены теореме Коши и теореме Стокса. Теорема Коши опирается на теорему Стокса, имеющую и другие многочисленные применения в теории аналитических функций. Традиционно теорема Коши доказывается в довольно слабых предположениях, в которых классическая теорема Стокса неприменима. В пунктах 1–3 мы напоминаем теорему Стокса и доказываем ее в довольно слабых предположениях. Теорема Коши — прямое следствие этой обобщенной теоремы Стокса и простой линейной алгебры, описывающей дифференциалы аналитических отображений (см. п. 4).

Для доказательства интегральной формулы Коши, кроме теоремы Коши, нужно исследовать форму $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ и ее неопределенный интеграл. Этот интеграл интересен сам по себе: он представляет собой многозначную функцию $\ln z$, а его обращение является однозначной функцией $\exp z$ (см. п. 5).

В пункте 6 обсуждаются локальные свойства аналитических функций.

Конформные отображения сферы Римана в себя являются преобразованием Мёбиуса. Преобразования Мёбиуса определены не только на плоскости, но и в пространстве $\mathbb{R}^n$. Всякое преобразование Мёбиуса — произведение инверсий. Элементарной геометрии инверсий посвящен пункт 7. В пункте 8 эта геометрия применяется для определения сферы Римана. Там же показывается, что всякая мероморфная функция на сфере Римана является рациональной функцией.

В пункте 9 обсуждаются вычеты, принцип аргумента и основная теорема алгебры.

В пункте 10 дается представление о модели Пуанкаре пространства Лобачевского и описываются геодезические в этой модели. Это описание использует элементарную геометрию инверсий из пункта 7. Обсуждается связь геометрии Лобачевского и ТФКП, которая, в частности, приводит к инвариантной формулировке неравенства Шварца (см. задачу 10.6). Эта формулировка неравенства Шварца делает очевидным экстремальное свойство конформного отображения, фигурирующего в теореме Римана (см. задачу 10.8). В пункте 11 обсуждается критерий компактности семейства аналитических функций, который нужен для завершения доказательства теоремы Римана (см. задачу 10.17).

В пункте 12 доказывается продолжаемость отображения Римана до границы области. Доказательство основано на принципе длин и площадей и без труда переносится на случай квазиконформных отображений.

В пункте 13 определяются римановы поверхности аналитических функций. Показывается, что если риманова поверхность функции компактна, то функция алгебраическая.

В пункте 14 доказывается принцип симметрии Римана–Шварца и теорема Пикара.

Дополнение 1 посвящено гармоническим функциям и их связям с комплексным анализом. Теория гармонических функций многих переменных напоминает теорию аналитических функций (см. п. 15). Используя обобщенную формулу Стокса, можно чуть ослабить требования гладкости в определении гармонической функции в том же духе, как Гурса ослабил требования гладкости в определении аналитической функции. Гармонические функции играют большую роль в математической физике.

Аналитические функции важны для приложений, в частности, потому, что их теория сильно связана с теорией гармонических функций двух переменных. В пункте 16 обсуждается связь этих теорий и применения аналитических функций к теории гармонических функций двух переменных.

В пункте 17 гармонические и субгармонические функции двух переменных применяются к теории аналитических функций. Здесь доказывается следующая теорема единственности. *Если аналитическая функция в области G при стремлении к каждой точке некоторой дуги, лежащей на границе области, стремится к одной и той же константе, то эта функция постоянна* (см. задачи 16.10 и 16.11). Эта теорема единственности — центральный пункт доказательства из учебника Евграфова продолжаемости конформного отображения Римана до границы области. В процессе подготовки лекции выяснилось, что это доказательство ошибочно (см. задачу 12.13), и продолжаемость до границы пришлось доказывать по-другому (см. п. 12). Тем не менее, теорема единственности интересна и сама по себе. К тому же ее доказательство использует замечательную формулу Йенсена и свойства гармонических и субгармонических функций, также представляющих самостоятельный интерес.

В дополнении 2 приводится стандартный материал о сведении глобального варианта теоремы Стокса к ее локальному варианту, используя разбиение единицы (глобальный вариант теоремы Стокса использовался в курсе без доказательства).

Ниже следует более подробное введение к пунктам 1–4, 15 и 18, благодарности и посвящение.

Об обобщенной формуле Стокса и теореме Коши. Двумерная (плоская) формула Стокса утверждает, что для ограниченной области U на плоскости и формы $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ справедливо равенство

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U \mathrm{d}\omega,$$

где ∂U — проходимая «в направлении против часовой стрелки» граница области U и $\mathrm{d}\omega = \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Для справедливости формулы Стокса нужно требовать некоторую гладкость формы ω и границы ∂U. Можно, например, требовать, чтобы функции P и Q принадлежали классу C^1 в замыкании области U и чтобы граница ∂U была бы C^1-гладкой (или кусочно гладкой). Именно такие требования гладкости накладываются в классическом варианте формулы Стокса.

Гурса придал законченную форму определению аналитической функции: он показал, что для аналитичности комплекснозначных функций комплексного переменного достаточно требовать лишь существования первой производной в каждой точке области. Он использовал найденную им форму теоремы Коши с немного меньшими требованиями гладкости формы, чем обычно. С тех пор теорема Коши традиционно входит во все курсы комплексного анализа именно в этой форме. Для доказательства теоремы Коши в форме Гурса классического варианта теоремы Стокса недостаточно. Мы показываем, что формула Стокса верна, если

1) функции P и Q в каждой точке имеют дифференциалы;

2) функция $-\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывна.

Наше доказательство, фактически, совпадает с рассуждением Гурса (из него лишь изгоняется специфика комплексного анализа).

Формулировка и доказательство подобного обобщения теоремы Стокса автоматически переносятся на случай k-форм на n-мерных многообразиях. Нам понадобится (при рассмотрении гармонических функций многих переменных) лишь следующий многомерный вариант этого утверждения.

Обобщенный вариант формулы Стокса. *Пусть* U *— компактная область с гладкой границей* ∂U *в пространстве* $\mathbb{R}^n$*, пусть* $\omega = P_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n - P_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n + \ldots + (-1)^{n+1} P_n\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}$ *—* $(n-1)$*-форма, коэффициенты* P_i *которой имеют дифференциалы в замыкании области* U *и функция* $F = \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial P_n}{\partial x_n}$ *непрерывна в замыкании этой области. Тогда справедлива формула Стокса*

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U \mathrm{d}\omega, \tag{1}$$

где $\mathrm{d}\omega = F\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

В классическом варианте формулы Стокса для областей в $\mathbb{R}^n$ дополнительно предполагается, что функции $P_1, \ldots, P_n$ принадлежат классу C^1 в замыкании области U.

Обычное доказательство классического варианта формулы Стокса не проходит для доказательства обобщенного варианта этой формулы. Приведем хорошо известный пример аналогичной ситуации.

Пример (теорема Лагранжа). Для функции f на отрезке $[a, b]$ существует точка ξ такая, что $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

Для справедливости теоремы Лагранжа нужно требовать некоторую гладкость функции f. Конечно, можно требовать, чтобы функция f принадлежала классу C^1 на $[a, b]$. Но достаточно требовать, чтобы функция f была бы непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имела дифференциал в каждой внутренней точке этого отрезка. Если f' непрерывна, то, согласно формуле Ньютона–Лейбница, $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$. По теореме о среднем существует точка ξ такая, что $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f'(\xi)(b-a)$, откуда и вытекает теорема Лагранжа. Если же функция f' не непрерывна, то она может оказаться и неинтегрируемой, и это рассуждение не проходит. Здесь выручает такое соображение. Легко видеть, что существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная хорде, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Тогда $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$, где ξ — абсцисса точки касания.

Доказательство обобщенного варианта формулы Стокса соотносится с доказательством классического варианта этой формулы так же, как второе из приведенных доказательств теоремы Лагранжа соотносится с первым доказательством.

В курсе мы обсуждали лишь локальную формулу Стокса, т.е. формулу Стокса для стандартного квадрата на плоскости и для стандартного куба в многомерном пространстве. Формула Стокса для компактных областей с гладкой границей сводится к ее локальному варианту при помощи разбиения единицы (см. дополнение 2).

Благодарности. Моя жена Т. В. Белокриницкая набирала и редактировала все списки задач и все варианты этой брошюры. В. А. Кисунько, И. А. Пушкарь и С. П. Чулков весь семестр вели семинарские занятия. Они вложили в этот курс много труда. Слушатели активно решали задачи и обнаружили много неточностей и опечаток. Всем им я приношу свою благодарность.

Посвящение. Второго ноября 2003 года исполнилось 60 лет Юлию Сергеевичу Ильяшенко, с которым мы дружим без малого полвека. Эта брошюра посвящается Юлию Сергеевичу.

1. Теорема Лагранжа для функций множеств

Пусть A — некоторый класс подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Мы всегда будем считать, что для всех множеств из класса A определено понятие объема. Мы будем обозначать через $V(X)$ объем множества X.

Для дальнейшего важен следующий пример: A состоит из кубов пространства $\mathbb{R}^n$, грани которых параллельны координатным гиперплоскостям и которые лежат внутри стандартного единичного куба $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$ (особенно важен случай $n = 2$). Можно считать, что A — класс подмножеств из этого примера.

Разбиением множества $\Delta \in A$ такого, что $V(\Delta) \neq 0$, называется его представление в виде $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_i$, где

1) $\Delta_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$;

2) $V(\Delta_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$;

3) $V(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Скажем, что класс множеств A является *классом с разбиениями*, если для каждого множества $\Delta \in A$ такого, что $V(\Delta) \neq 0$, существует его разбиение $\Delta = \bigcup \Delta_i$, для которого диаметр каждого множества Δ_i не больше чем половина диаметра множества Δ.

Класс кубов в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. выше) очевидно является классом множеств с разбиениями.

Рассмотрим некоторую функцию $F\colon A \to \mathbb{R}^p$, сопоставляющую каждому множеству X из некоторого класса с разбиением A вектор $F(X)$ пространства $\mathbb{R}^p$.

Скажем, что функция F является *функцией типа меры*, если для каждого множества Δ и каждого его разбиения $\Delta = \bigcup \Delta_i$, где $\Delta, \Delta_i \in A$, справедливо равенство $F(\Delta) = \sum F(\Delta_i)$.

Задача 1.1. Пусть $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_i$ — разбиение множества Δ, и $V(\Delta) \neq 0$. Пусть выполняется равенство $F(\Delta) = \sum F(\Delta_i)$. Тогда

1) точка $\dfrac{1}{V(\Delta)}\, F(\Delta)$ пространства $\mathbb{R}^p$ лежит внутри выпуклой оболочки точек $\dfrac{1}{V(\Delta_i)}\, F(\Delta_i)$ этого пространства;

2) если в пространстве $\mathbb{R}^p$ есть скалярное произведение (или норма), то среди векторов $\dfrac{1}{V(\Delta_i)}\, F(\Delta_i)$ существует хотя бы один вектор, имеющий не меньшую длину, чем вектор $\dfrac{1}{V(\Delta)}\, F(\Delta)$.

Задача 1.2. Пусть функция $F\colon A \to \mathbb{R}^p$ является функцией типа меры. Тогда для каждого $\Delta \in A$ такого, что $V(\Delta) \neq 0$, существует последовательность вложенных множеств $\Delta \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_m \supset \ldots$ таких, что 1) $\Delta_i \in A$; 2) $V(\Delta_i) > 0$; 3) диаметр $\Delta_m \leqslant \dfrac{1}{2^m}$(диаметр Δ); 4) существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{F(\Delta_i)}{V(\Delta_i)}$; 5) $\lim\limits_{i\to\infty} \left\| \dfrac{F(\Delta_i)}{V(\Delta_i)} \right\| \geqslant \left\| \dfrac{F(\Delta)}{V(\Delta)} \right\|$. Здесь $\|a\|$ обозначает длину вектора a в пространстве $\mathbb{R}^p$.

Определение 1. Скажем, что последовательность множеств $\Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_m, \ldots$ *сходится к точке* a (обозначение: $\lim\limits_{i\to\infty} \Delta_i = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что все множества Δ_i при $i > N$ лежат в ε-окрестности точки a.

Определение 2. Пусть $F\colon A \to \mathbb{R}^p$ — функция типа меры. Скажем, что F *имеет производную* $F'_A(a) \in \mathbb{R}^p$ по A в точке a, если для любой такой последовательности множеств $\Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_m \supset \ldots$ из A, что

$V(\Delta_i) \neq 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \Delta_i = a$, справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F(\Delta_i)}{V(\Delta_i)} = F'_A(a).$$

Задача 1.3. Пусть A — класс множеств области U пространства $\mathbb{R}^n$, для которых определено понятие объема. Пусть f — непрерывная функция на A со значениями в пространстве $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим функцию F на A, сопоставляющую каждому $\Delta \in A$ вектор $F(\Delta) = \int_\Delta f(x)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$. Тогда

1) F является функцией типа меры;

2) в каждой точке $a \in U$ существует $F'_A(a)$, причем $F'_A(a) = f(a)$.

Задача 1.4. 1) («Теорема Лагранжа».) Пусть функция $F\colon A \to \mathbb{R}^p$ является функцией типа меры и имеет производную по A в каждой точке a, причем $F'_A(a) = 0$. Тогда для каждого $\Delta \in A$ справедливо равенство $F(\Delta) = 0$.

2) Пусть функции типа меры $F\colon A \to \mathbb{R}^p$ и $G\colon A \to \mathbb{R}^p$ имеют производные по A в каждой точке a, причем $F'_A(a) \equiv G'_A(a)$. Тогда функции F и G совпадают, т. е. для каждого множества $\Delta \in A$ справедливо равенство $F(\Delta) = G(\Delta)$.

3) («Формула Ньютона–Лейбница».) Если F'_A — непрерывная функция, то

$$F(\Delta) = \int_\Delta F'_A \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Задача 1.5. Пусть A — класс отрезков на прямой, лежащих внутри фиксированного отрезка $[a, b]$, и пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^p$ — произвольная функция. Определим функцию $F\colon A \to \mathbb{R}$ формулой $F([c, d]) = f(d) - f(c)$. Показать, что

1) функция F является функцией типа меры;

2) существование производной $F'_A(a)$ эквивалентно дифференцируемости функции f в точке a, причем $F'_A(a) = f'(a)$;

3) если функция f дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, причем $f' \equiv 0$, то $f(a) = f(b)$ (см. задачу 1.4, п. 1);

4) если функция f дифференцируема в каждой точке отрезка и f' непрерывна на отрезке, то $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ (см. задачу 1.4, п. 3).

2. Формула Стокса для линейных форм в единичном кубе

Начнем с двумерного случая. Обозначим через Δ стандартный квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ на плоскости.

Задача 2.1. Пусть функция $Q\colon \Delta \to \mathbb{R}^p$ обладает следующими свойствами. Во-первых, функции Q_0 и Q_1 от переменной y, определенные при $0 \leqslant y \leqslant 1$ соотношениями $Q_0(y) = Q(0, y)$, $Q_1(y) = Q(1, y)$, являются интегрируемыми функциями. Во-вторых, выполняется тождество $Q_1 - Q_0 \equiv C$, где C — постоянный вектор. Тогда $\int_{\partial\Delta} Q\,\mathrm{d}y = C$. Аналогично, если функции P_0 и P_1, определенные при $0 \leqslant x \leqslant 1$ соотношениями $P_0(x) = P(x, 0)$ и $P_1(x) = P(x, 1)$, интегрируемы и $P_1 - P_0 = C$, то $\int_{\partial\Delta} P\,\mathrm{d}x = -C$.

Задача 2.2. Для любых постоянных векторов A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 пространства $\mathbb{R}^p$ справедливо равенство

$$\int_{\partial\Delta} (A_1 + A_2x + A_3y)\,\mathrm{d}x + (B_1 + B_2x + B_3y)\,\mathrm{d}y = (B_2 - A_3).$$

Задача 2.3. Пусть P и Q — непрерывные функции в области Δ на плоскости со значениями в $\mathbb{R}^p$, причем $\|P\| < M$ и $\|Q\| < M$. Тогда для всякого контура γ на плоскости, длина которого равна L, справедлива оценка

$$\left\| \int_{\gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \right\| \leqslant 2ML.$$

Перейдем к многомерной ситуации. Обозначим через Δ стандартный куб $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Задача 2.4. Пусть $\omega = P_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n - P_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n + \ldots$ $\ldots + (-1)^{n+1} P_n\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, где P_i — линейные неоднородные функции, т. е. $P_i = A_i + A_{i,1}x_1 + \ldots + A_{i,n}x_n$, где A_i и $A_{i,j}$ — постоянные векторы в пространстве $\mathbb{R}^p$. Тогда $\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} \mathrm{d}\omega$, т. е. $\int_{\partial\Delta} \omega = A_{1,1} + \ldots$ $\ldots + A_{n,n}$.

Следующие две задачи в дальнейшем не понадобятся.

Задача 2.5. Пусть P_1 — функция класса C^1 на Δ. Тогда для куба Δ и формы $\omega = P_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ справедлива формула Стокса, т. е.

$$\int_{\partial\Delta} P_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{\Delta} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Указание. Проинтегрировать функцию $\dfrac{\partial P_1}{\partial x_1}$ по переменной x_1 и воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница.

Замечание. При доказательстве обобщенной формулы Стокса мы не используем формулы Ньютона–Лейбница, но доказываем ее многомерное обобщение (ср. задачу 1.4, п. 3).

Задача 2.6. Доказать формулу Стокса в кубе Δ для формы ω с коэффициентами класса C^1. Почему это доказательство не проходит для доказательства обобщенной формулы Стокса в кубе Δ?

3. Обобщенная формула Стокса в единичном кубе

Задача 3.1. Пусть A — класс квадратов на плоскости, лежащих внутри стандартного единичного квадрата Δ, стороны которых параллельны координатным осям. Пусть P и Q — непрерывные функции на квадрате Δ со значениями в $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим функцию на A, сопоставляющую каждому квадрату $\Delta_0 \in A$ вектор $F(\Delta_0)$, равный $\int_{\partial\Delta_0} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Тогда

1) функция $F\colon A \to \mathbb{R}^p$ является функцией типа меры;

2) если функции P и Q имеют дифференциал в точке a, то функция F дифференцируема по A в точке a, причем $F'_A(a) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(a) + \dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

Указание. См. задачи 2.2 и 2.3.

Задача 3.2 (обобщенная формула Стокса для квадрата). Пусть 1) функции P и Q, принимающие значения в $\mathbb{R}^p$, непрерывны в квадрате Δ, 2) в каждой точке квадрата Δ каждая из этих функций имеет дифференциал, 3) функция $-\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывна в Δ. Тогда $\int_{\partial\Delta} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\Delta}\left(-\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. В частности, если $-\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$, то $\int_{\partial\Delta} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$.

Указание. См. задачу 3.1 и п. 3 в задаче 1.4.

Задача 3.3 (обобщенная формула Стокса для куба). Пусть $\omega = P_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n - P_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n + \ldots + (-1)^{n+1} P_n\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}$, где P_i — непрерывные функции в кубе Δ пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть функции $P_1, \ldots, P_n$ имеют дифференциалы в каждой точке куба Δ, причем функция $F = \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial P_n}{\partial x_n}$ непрерывна в Δ. Тогда $\int_{\partial\Delta}\omega = \int_{\Delta} F\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

Ниже мы используем обобщенную формулу Стокса не только для кубов, но и для компактных областей пространства $\mathbb{R}^n$, имеющих гладкую границу (в основном, нам важен случай $n = 2$). Переход от куба к области с гладкой границей совершенно стандартен и делается при помощи разбиения единицы. Для полноты картины мы приводим это рассуждение в пункте 18 (дополнение 2).

Напомним формулу Стокса для 1-форм на гладких кривых.

Задача 3.4. Пусть $\omega = P_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\,\mathrm{d}x_n$, где $P_1, \ldots, P_n$ — непрерывные функции в области U пространства $\mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^p$. Допустим, что для любого замкнутого пути γ в области U справедливо равенство $\int_\gamma \omega = 0$. Фиксируем точку $x_0 \in U$. Определим функцию F в области U следующим равенством: $F(a) = \int_\gamma \omega$, где

γ — любая кривая в области U, начинающаяся в точке x_0 и заканчивающаяся в точке a. Доказать, что

1) функция F определена корректно, т.е. не зависит от выбора γ;

2) функция F в каждой точке имеет дифференциал dF и выполнено равенство

$$\mathrm{d}F = P_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\,\mathrm{d}x_n.$$

Задача 3.5. Пусть F — функция в области U со значениями в пространстве $\mathbb{R}^p$, имеющая непрерывные частные производные $P_1, \ldots, P_n$, и $\mathrm{d}F = P_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\,\mathrm{d}x_n$. Тогда $\int_\gamma P_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\,\mathrm{d}x_n = F(b) - F(a)$, где b и a — конец и начало кривой $\gamma \in U$.

4. Линейная алгебра и теорема Коши

В этом пункте мы будем отождествлять плоскость $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью (синоним: «комплексная прямая»), сопоставляя точке (x, y) комплексное число $z = x + iy$. Рассмотрим вещественно линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ из вещественной плоскости в себя.

Задача 4.1. Отображение $A(x, y) = P_1 x + P_2 y$, где $P_1, P_2 \in \mathbb{C}$, единственным образом записывается в виде $A(x, y) = Q_1 z + Q_2 \overline{z}$. При этом $Q_1 = \dfrac{1}{2}(P_1 - iP_2)$, $Q_2 = \dfrac{1}{2}(P_1 + iP_2)$. Определитель матрицы отображения A положителен, если $|Q_1| > |Q_2|$, отрицателен, если $|Q_1| < |Q_2|$, и равен нулю, если $|Q_1| = |Q_2|$. Если $|Q_1| = |Q_2| \neq 0$, то отображение A переводит в нуль прямую $z = \lambda z_0$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, а $z_0 = \sqrt{-\dfrac{Q_1}{Q_2}}$.

Обозначения. Пусть U — область на плоскости и $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ — дифференцируемое отображение (т.е. у отображения f в каждой точке существует дифференциал), и $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ — его дифференциал. Имеем: $\mathrm{d}f = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}z + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}\overline{z}$. Число $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$ обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, а число $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$ обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$. По определению $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}$.

Производной $f'(a)$ комплекснозначной функции f в точке $a \in \mathbb{C}$ называется число $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(a + z) - f(a)}{z}$.

Задача 4.2. 1) Если отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ имеет дифференциал в точке a и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$, то, во-первых, дифференциал является поворотом (на некоторый угол α) с растяжением (в λ раз, где λ — некоторое неотрицательное число), во-вторых, у комплекснозначной функции f существует производная $f'(a)$. При этом $f'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$, $\arg f'(a) = \alpha$, $|f'(a)| = \lambda$.

2) Обратно, если производная существует, то отображение f имеет дифференциал в точке a. При этом, во-первых, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = f'(a)$ и, во-вторых, дифференциал этого отображения — поворот (на угол $\arg f'(a)$) с растяжением (в $|f'(a)|$ раз).

Задача 4.2 доказывает эквивалентность следующих двух определений.

Определение 1 (аналитическая функция по Гурса). Функция f называется *аналитической в области* U, если в каждой точке области U у функции f существует комплексная производная.

Определение 2. Функция f называется *аналитической в области* U, если в каждой точке области U отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ дифференцируемо, причем $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} \equiv 0$ (т. е. дифференциал отображения — поворот с растяжением).

Задача 4.3. Функция f аналитична в области U, если и только если у формы $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z = f(z)\,\mathrm{d}x + if(z)\,\mathrm{d}y$ коэффициенты имеют первые дифференциалы и $\mathrm{d}\omega \equiv 0$.

Задача 4.4. Функция $f = u + iv$ аналитична в области U, если и только если функции u, v имеют первые дифференциалы в каждой точке области и выполняются *соотношения Коши–Римана* $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Определение 3. Функция f называется *аналитической вплоть до границы* области U, если функция f определена и аналитична в некоторой большей области V, содержащей замыкание области U.

Задача 4.5 (Теорема Коши). Для всякой функции f, аналитической вплоть до границы ограниченной области U с гладкой границей ∂U, справедливо тождество

$$\int_{\partial U} f\,\mathrm{d}z = 0.$$

Указание. Воспользоваться задачей 4.3 и обобщенной формулой Стокса для областей с гладкой границей.

Задача 4.6. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области U. Проверить, что функция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ определена корректно и аналитична. Здесь $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ — это интеграл функции f по любой лежащей в области U гладкой кривой, начинающейся в точке z_0 и заканчивающейся в точке z. Доказать, что $F'(z) = f(z)$.

Указание. Воспользоваться теоремой Коши и задачей 3.4.

5. Форма $\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ и интегральная формула Коши

Задача 5.1. 1) Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$, $g\colon U \to \mathbb{C}$ — любые гладкие комплекснозначные функции на области $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\dfrac{\mathrm{d}(fg)}{fg} = \dfrac{\mathrm{d}f}{f} + \dfrac{\mathrm{d}g}{g}$.

2) Применить 1) к функциям $f = |z|$ и $g = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и доказать соотношение $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \dfrac{\mathrm{d}|z|}{|z|} + i\,\mathrm{d}\varphi$, где $\varphi = \arg z$.

Задача 5.2. 1) Пусть область U на плоскости не охватывает точку 0 и содержит точку 1, и пусть $\arg\colon U \to \mathbb{R}$ — однозначная ветвь аргумента на области U (для которой $\arg 1 = 0$). Тогда

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z| + i\arg z \quad (\text{при } z \in U).$$

2) Интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ по контуру γ, один раз обходящему точку нуль (например, по границе $\gamma = \partial U$ выпуклой области U, содержащей точку нуль), равен $2\pi i$.

Мы вернемся к интегралу $\displaystyle\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z}$ в задачах 5.12–5.14. А сейчас перейдем к интегральной формуле Коши.

Задача 5.3 (интегральная формула Коши). Пусть f — функция, аналитическая вплоть до границы ограниченной области U, имеющей гладкую границу ∂U. Тогда справедлива следующая интегральная формула Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0).$$

Указание. Представить область U в виде объединения малого замкнутого круга B с центром в точке z_0 и области $V = U \setminus B$. Тогда

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{\partial V} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z - z_0)} + \int_{\partial B} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется при помощи теоремы Коши. Второй интеграл мало отличается от интеграла $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{f(z_0)\,\mathrm{d}z}{z - z_0}$, который вычислен в задаче 5.2.

Задача 5.4. Пусть Δ — комплексное число, причем $|\Delta| < |z - z_0|$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{z - z_0 - \Delta} = \Big(1 + \frac{\Delta}{z - z_0} + \ldots + \frac{\Delta^n}{(z - z_0)^n} + \ldots\Big)\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно в каждой области $|z - z_0| > |\Delta| + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$.

Задача 5.5. В условиях задачи 5.3 доказать равенство

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Указание. См. задачу 5.3.

Задача 5.6. Пусть, в условиях задачи 5.3, R — расстояние от точки z_0 до границы области. Доказать, что при $|\Delta| < R$ справедливо равенство

$$f(z_0 + \Delta) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\Delta^n + \ldots.$$

Показать, что ряд сходится равномерно в области $|\Delta| < R - \varepsilon$, где ε — любое положительное число.

Указание. См. задачи 5.3 и 5.4.

Задача 5.7. Показать, что производная аналитической функции является аналитической функцией.

Указание. См. задачу 5.5.

Задача 5.8 (теорема Морера). Пусть $f(z)$ — непрерывная комплекснозначная функция в области U, причем интеграл формы $f(z)\,\mathrm{d}z$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области U, равен нулю. Тогда функция f аналитична в области U.

Указание. См. задачи 3.4 и 5.7.

Задача 5.9. Пусть f — равномерный предел аналитических функций в области U. Тогда f — аналитическая функция в области U.

Указание. Воспользоваться теоремой Морера.

Задача 5.10 (оценки производных с потерей области). Пусть функция f аналитична в области U, L — длина границы области U, и M — максимум модуля функции f в $\overline{U}$. Тогда справедлива оценка $\|f^{(k)}(z)\| \leqslant \dfrac{k!\,ML}{2\pi r(z)^{k+1}}$, где $r(z)$ — расстояние от точки z до границы области.

Указание. См. задачу 5.5.

Задача 5.11 (теорема Лиувилля). Функция, аналитическая на всём $\mathbb{C}$, модуль которой ограничен, является константой.

Указание. См. задачу 5.10 для $k = 1$.

Задача 5.12. Многозначная аналитическая функция $\ln z = \int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z| + i\arg z$ (функция $\arg z$ определена с точностью до слагаемого $2k\pi$) имеет однозначную обратную функцию: если $\ln z = u = u_1 + iu_2$, то $z = e^{u_1}(\cos u_2 + i\sin u_2)$. Эта функция называется *экспонентой.*

Задача 5.13. Из задачи 6.1 будет следовать, что функция $y = \exp z$ аналитична (во всей комплексной плоскости). Проверить, что $y' = y$ и что $y^{(n)} = y$ для всех n. Ряд Тейлора $\exp z$ сходится к $\exp z$ во всей комплексной области (см. задачу 5.6). Поэтому

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots .$$

Задача 5.14. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to (\mathbb{C} \setminus 0)$ — кривая на комплексной плоскости, не проходящая через нуль. Рассмотрим новую кривую $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, где $\gamma_1 = a\gamma$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Доказать, что $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

Задача 5.15. Пусть $\gamma_1\colon [0,1] \to (\mathbb{C} \setminus 0)$ и $\gamma_2\colon [0,1] \to (\mathbb{C} \setminus 0)$ — пути на проколотой комплексной прямой, начинающиеся в точке 1 и кончающиеся в точках a и b соответственно, $\partial\gamma_1 = a - 1$, $\partial\gamma_2 = b - 1$. Рассмотрим кривую γ, являющуюся объединением кривых γ_1 и $a\gamma_2$. Кривая γ связна. Она начинается в точке 1 и заканчивается в точке ab. Проверить, что $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, т. е. что для некоторых ветвей функции $\ln z$ справедливы равенства $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Вывести отсюда равенство $\exp(a+b) = \exp a \, \exp b$.

6. Локальные свойства аналитических отображений

Задача 6.1 (теорема об обратной функции). Пусть f — аналитическая функция в окрестности точки a, причем $f'(a) \neq 0$. Тогда f взаимно однозначно отображает окрестность точки a на окрестность точки $f(a)$, причем обратное отображение является аналитической функцией.

Указание. Воспользоваться теоремой об обратной функции для отображения f, рассматриваемого как гладкое отображение плоскости в плоскость.

Задача 6.2. Многозначная функция $f(z) = z^{1/n}$ (определенная равенством $(f(z))^n = z$) удовлетворяет следующим соотношениям:

1) $z^{1/n} = |z|^{1/n}\Bigl(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\Bigr)$, где $\varphi = \arg z + 2k\pi$;

2) $z^{1/n} = \exp\Bigl(\frac{1}{n}\ln z\Bigr)$

Задача 6.3. 1) Пусть $f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Если Δ достаточно мало, то $f(z_0 + \Delta) = f(z_0) + \Delta^k\varphi(z_0 + \Delta)$, где φ — аналитическая функция, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

2) Существует аналитическая функция g такая, что $f(z_0) + (g(z))^k = f(z)$, причем $g'(z_0) \neq 0$ (область определения функции g может быть меньше, чем область определения функции f).

3) Доказать, что если в условиях п. 1) аналитическая функция f непостоянна, то в окрестности точки z_0 существует такая голоморфная замена переменной $u = u(z)$, $z = z(u)$, что выполняется равенство $f(z(u)) = u^k + f(z_0)$. (Вопрос п. 3 — переформулировка вопроса п. 2.)

Задача 6.4. Пусть U — связная область на плоскости, и $f\colon U\to\mathbb{C}$ — непостоянная аналитическая функция. Тогда

1) f сохраняет области (т. е. образ $f(U_1)$ каждого открытого множества $U_1\subset U$ является открытым множеством);

2) прообраз $f^{-1}(a)$ каждого значения a состоит из изолированных точек.

Задача 6.5. Если непостоянная аналитическая в связной ограниченной области U функция f непрерывна вплоть до границы ∂U, то функция $|f|$ достигает максимума на границе ∂U области U. Если f не обращается в нуль ни в какой точке $z_0\in U$, то функция $|f|$ достигает минимума на границе области.

Указание. См. задачу 6.4.

Задача 6.6. Используя задачу 6.5, доказать основную теорему алгебры: всякий полином положительной степени имеет корень.

7. Инверсия

Инверсией в пространстве $\mathbb{R}^n$ относительно сферы радиуса R с центром в точке A называется преобразование, переводящее точку $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{y}$ такую, что

1) луч из точки A, проходящий через точку $\boldsymbol{x}$, содержит точку $\boldsymbol{y}$;

2) произведение $\rho(A,\boldsymbol{x})\cdot\rho(A,\boldsymbol{y})$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние между двумя точками, равно R^2.

Преобразование инверсии определено в любой точке $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, отличной от A.

Задача 7.1. 1) Для всякой инверсии τ справедливо равенство $\tau\circ\tau=\mathrm{id}$, где id — тождественное преобразование.

2) Пусть τ_1 и τ_2 — инверсии относительно сфер радиусов R_1 и R_2 с центром в точке нуль. Доказать, что $\tau_2=\Gamma\circ\tau_1$, где Γ — гомотетия с коэффициентом $(R_2/R_1)^2$.

3) Инверсия относительно сферы оставляет эту сферу на месте. В каждой точке a сферы дифференциал инверсии — отражение относительно гиперплоскости, касательной к сфере в точке a.

4) Дифференциал инверсии в произвольной точке — композиция отражения относительно гиперплоскости (какой?) и растяжения (во сколько раз?). В частности, инверсия сохраняет углы между любыми кривыми.

Задача 7.2 («квадратный трехчлен» в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$). Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и уравнение

$$a\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\rangle+c=0,\tag{1}$$

где a, c — данные числа, $\boldsymbol{b}$ — данный вектор в $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}$ — неизвестный вектор в $\mathbb{R}^n$ и $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение.

1) Если $a = 0$, но $\boldsymbol{b} \neq 0$, то уравнение (1) определяет гиперплоскость.

2) Если $c = 0$, то множество решений содержит нулевой вектор.

3) Пусть $a \neq 0$. Если «дискриминант» $D = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle - 4ac$ отрицателен, то уравнение (1) несовместно. Если $D \geqslant 0$, то решением $\boldsymbol{x}$ уравнения (1) является любая точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, находящаяся на расстоянии $\dfrac{\sqrt{D}}{2a}$ от точки $\boldsymbol{x}_0 = \dfrac{-\boldsymbol{b}}{2a}$. В частности, общее решение уравнения (1) — это сфера.

Задача 7.3. Рассмотрим инверсию относительно сферы радиуса 1 с центром в нуле.

1) Эта инверсия задается формулой $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}/\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$. Обратное преобразование задается формулой $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}/\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$. На комплексной плоскости в комплексных обозначениях эти преобразования описываются формулами $u = 1/\overline{x}$, $x = 1/\overline{u}$.

2) Эта инверсия переводит решение уравнения $a\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle + c = 0$ в решение уравнения $c\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u} \rangle + a = 0$.

3) При этой инверсии: сферы, не проходящие через нуль, переходят в сферы, не проходящие через нуль; сферы, проходящие через нуль, переходят в гиперплоскости, не проходящие через нуль, и наоборот.

4) Прямые и окружности в $\mathbb{R}^3$ переходят в прямые и окружности. (Когда окружность переходит в прямую?)

Задача 7.4 (задача Кокстера). Пусть сферы S_1, S_2, S_3 и S_4 в трехмерном пространстве лежат вне друг друга и касаются друг друга. Построим сферу S_5, касающуюся сфер S_1, S_2, S_3 и S_4. Затем построим сферу S_6, касающуюся сфер S_1, S_2, S_3 и S_5 такую, что $S_6 \neq S_4$. Затем построим сферу S_7, касающуюся сфер S_1, S_2, S_3 и S_6 такую, что $S_7 \neq S_5$, и т. д. Доказать, что всегда $S_{10} = S_4$.

Задача 7.5. Стереографическая проекция сферы на плоскость — ограничение на сферу некоторой инверсии пространства $\mathbb{R}^3$ (какой?). Поэтому стереографическая проекция переводит окружности на сфере в окружности и прямые на плоскости и сохраняет углы между кривыми.

Задача 7.6. Фиксируем на сфере S в $\mathbb{R}^3$ ориентацию, противоположную обычной, т. е. такую, что вектор внутренней нормали и пара правильно ориентированных на сфере касательных векторов в точке $a \in S$ образуют тройку положительно ориентированных векторов в $\mathbb{R}^3$.

1) Стереографическая проекция из «северного полюса» на сфере на горизонтальную плоскость (предполагается, что сфера лежит на горизонтальной плоскости и что горизонтальная плоскость ориентирована стандартным способом) сохраняет ориентацию.

2) Стереографическая проекция из «южного полюса» на сфере на

горизонтальную плоскость (предполагается, что горизонтальная плоскость сферы лежит на сфере и что горизонтальная плоскость ориентирована стандартным способом) меняет ориентацию.

3) Отождествим верхнюю и нижнюю касательные плоскости к сфере при помощи параллельного переноса на вертикальный вектор (по длине равный диаметру сферы). Доказать, что после этого отождествления стереографическая проекция $x(a)$ точки a, описанная в п. 1), и стереографическая проекция $y(a)$ той же точки a, описанная в п. 2), связаны между собой преобразованием инверсии. Относительно какой окружности?

4) В комплексных обозначениях точки $x(a)$ и $y(a)$ из п. 3) связаны соотношением $y(a) = 1/\overline{x}(a)$. (При условии, что диаметр сферы равен единице.)

Преобразование Мёбиуса — это отображение плоскости, пополненной бесконечно удаленной точкой, в себя, переводящее прямые и окружности в прямые и окружности и сохраняющее углы между кривыми (но не обязательно сохраняющее ориентацию).

Аналогично определяется преобразование Мёбиуса сферы в $\mathbb{R}^3$ в себя.

Задача 7.7. 1) На плоскости $\mathbb{R}^2$ всякий поворот и всякий параллельный перенос можно представить в виде произведения двух симметрий относительно прямых. Каких?

2) В пространстве $\mathbb{R}^n$ гомотетию с положительным коэффициентом можно представить в виде произведения двух инверсий. Каких?

Задача 7.8. Будем говорить, что две точки симметричны относительно окружности, если они переставляются при инверсии относительно окружности. Показать, что точки x и y симметричны относительно окружности S, если и только если всякая окружность L, проходящая через x и y, пересекает S под прямым углом. Вывести отсюда, что симметрия точек относительно окружности сохраняется при преобразованиях Мёбиуса (т. е. если F — преобразование Мёбиуса и x, y симметричны относительно S, то $F(x)$, $F(y)$ симметричны относительно $F(S)$).

Задача 7.9. Пару окружностей S_1 и S_2 можно перевести преобразованием Мёбиуса

1) в пару прямых, проходящих через точку нуль, если S_1 и S_2 пересекаются;

2) в пару параллельных прямых, если S_1 и S_2 касаются;

3) в пару концентрических окружностей, если S_1 и S_2 не пересекаются.

Указание к п. 3. Построить прямую и окружность, ортогонально пересекающие S_1 и S_2. Эту прямую и окружность перевести в пару прямых, проходящих через точку нуль.

8. Сфера Римана

Задача 8.1 (теорема об устранимой особенности). 1) Пусть f аналитична и ограничена в проколотой окрестности точки a. Тогда f аналитически продолжается в точку a.

2) Если в условиях п. 1) вместо ограниченности f имеем неравенство $|f(z)| < C|z-a|^{-N}$ для некоторой константы C и некоторого целого N, то $f(z)(z-a)^N$ является аналитической функцией. Такая функция $f(z)$ в окрестности точки a представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{m \geqslant -N}^{\infty} c_m (z-a)^m.$$

Если при этом $c_{-N} \neq 0$ и $-N < 0$, то говорят, что функция f имеет *полюс* порядка N в точке a.

Задача 8.2. Рассмотрим такое гладкое отображение f области $U \subset \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, что:

1) дифференциал f обращается в нуль лишь на дискретном множестве точек;

2) во всех остальных точках дифференциал сохраняет ориентацию и углы между любыми двумя кривыми, проходящими через эту точку.

Тогда f — аналитическая функция (мы отождествляем $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$).

Указание. Воспользоваться теоремой Коши и теоремой об устранимой особенности.

Определение. Фиксируем на сфере S в $\mathbb{R}^3$ некоторую ориентацию. Отображение f области $U \subset S$ на ориентированной сфере в комплексную плоскость называется *аналитическим*, если $\mathrm{d}f$ обращается в нуль лишь в дискретном множестве точек и в остальных точках $\mathrm{d}f$ сохраняет ориентацию и углы между любыми двумя кривыми.

Задача 8.3. Фиксируем на сфере диаметра 1, лежащей на горизонтальной плоскости, ориентацию, противоположную стандартной.

1) Стереографическая проекция π_1 из «северного полюса» сферы на горизонтальную плоскость, касающуюся сферы в «южном полюсе» сферы, является аналитическим отображением. Если область $U \subset S^2$ не содержит верхней точки сферы, то отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ является аналитическим, если и только если функция комплексного переменного $f(\pi_1^{-1}(z))$ в области $\pi_1(U)$ является аналитической.

2) Стереографическая проекция π_2 из «южного полюса» сферы на горизонтальную плоскость, касающуюся сферы в «северном полюсе» сферы, является антианалитическим отображением, т. е. отображение $\overline{\pi}_2$ является аналитическим (мы отождествляем верхнюю и нижнюю касательные плоскости при помощи параллельного переноса на

единичный вертикальный вектор и отождествляем обе плоскости с комплексной прямой). Если область U не содержит нижней точки сферы, то отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ является аналитическим, если и только если функция $f(\pi_2^{-1}(\overline{u}))$ комплексного переменного u в области $\overline{\pi_2(U)}$ является аналитической.

3) «Комплексные координаты» $z(a) = \pi_1(a)$ и $u(a) = \overline{\pi_2(a)}$ точки a на сфере связаны соотношениями $u = 1/z$, $z = 1/u$.

Так называемую сферу Римана можно воспринимать как комплексную плоскость, дополненную одной точкой, обозначаемой ∞. Около этой точки есть координата $u = 1/z$, причем $u(\infty) = 0$.

Говорят, что функция f переменной z аналитична в окрестности бесконечности, если и только если функция ψ переменной u, определенная формулой $\psi(u) = f(1/z)$, аналитична в окрестности нуля. Если функция ψ имеет полюс порядка N в нуле, то говорят, что функция f имеет полюс порядка N в бесконечности.

Определение. Функция f *мероморфна* в области U на сфере Римана, если все ее особые точки в этой области являются полюсами.

Задача 8.4. Доказать, что

1) функция f, мероморфная на сфере Римана, представима в виде

$$f(z) = P(z) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \sum_{1 \leqslant j \leqslant m(i)} \frac{c_j^i}{(z - a_i)^j};$$

Поэтому всякая функция, мероморфная на сфере Римана, рациональна.

2) всякая рациональная функция раскладывается на простейшие дроби;

Задача 8.5. 1) Всякое аналитическое взаимно однозначное преобразование сферы Римана в себя — это дробно-линейное преобразование $z \to \dfrac{az + b}{cz + d}$, где $ad - bc \neq 0$.

2) Всякое дробно-линейное преобразование, для которого $c \neq 0$, представимо в виде $z = \dfrac{A}{z - z_0} + B$.

3) Всякое дробно-линейное преобразование представимо в виде произведения не более чем четырех инверсий.

4) Дробно-линейное преобразование имеет либо две неподвижных точки, либо одну (кратную) неподвижную точку, либо тождественно.

5) Для любых трех различных точек a, b, c и для любых трех различных точек A, B, C существует единственное дробно-линейное преобразование $z \to F(z)$ такое, что $F(a) = A$, $F(b) = B$ и $F(c) = C$.

6) Всякая композиция четного числа инверсий является дробно-линейным преобразованием.

Задача 8.6. 1) Сохраняющее ориентацию преобразование Мёбиуса — это дробно-линейное преобразование.

2) Меняющее ориентацию преобразование Мёбиуса имеет вид $F(z) = \dfrac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, где $ad - bc \neq 0$.

3) Любое преобразование Мёбиуса — произведение инверсий.

Задача 8.7. Всякое взаимно однозначное преобразование сферы в $\mathbb{R}^3$ в себя, сохраняющее углы между любыми двумя кривыми, является преобразованием Мёбиуса. Оно всегда представимо в виде композиции инверсий относительно сфер, ортогональных данной сфере.

9. Вычеты

Рассмотрим форму $f(z)\,\mathrm{d}z$, где $f(z)$ — аналитическая функция в проколотой окрестности U точки a.

Задача 9.1. Интеграл $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ по любому контуру γ, лежащему в области U и «обегающему один раз вокруг точки a в направлении против часовой стрелки», не зависит от выбора контура γ.

Определение. 1) Число $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, где γ — контур из задачи 9.1, называется *вычетом* формы $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$ в точке a и обозначается $\operatorname*{Res}_a \omega$;
2) если $a = \infty$, то вычет формы $f(z)\,\mathrm{d}z$ по определению равен вычету формы $f(1/z)\,\mathrm{d}(1/z)$ в точке 0.

Задача 9.2. 1) Пусть в окрестности точки $a \neq \infty$ функция $f(z)$ представима сходящимся рядом $f(z) = \sum\limits_{-\infty<k<\infty} C_k(z-a)^k$. Вычислить $\operatorname*{Res}_a \omega$, где $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$.

2) Пусть при достаточно больших z ряд $\sum\limits_{-\infty<k<\infty} C_k z^k$ сходится. Найти $\operatorname*{Res}_\infty \omega$, где $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$.

Задача 9.3 (теорема о сумме вычетов). Пусть U — область на сфере Римана с кусочно гладкой границей $\gamma = \partial U$. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая вплоть до границы области U всюду, за исключением конечного числа внутренних точек. Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a\in U} \operatorname*{Res}_a f(z)\,\mathrm{d}z.$$

В частности, если U — сфера Римана, то

$$\sum \operatorname*{Res}_a f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Задача 9.4. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в окрестности точки a, т. е. представима в виде $f(z) = \sum\limits_{m\leqslant k<\infty} C_k(z-a)^k$, и коэффициент C_m не равен нулю. Тогда вычет формы $\omega = \frac{\mathrm{d}f}{f}$ в точке a равен m, т. е. этот вычет отрицателен в полюсе, положителен в нуле и по модулю равен кратности соответствующего полюса или нуля.

Задача 9.5 (принцип аргумента). 1) Пусть функция f мероморфна в области U, P — число полюсов функции f в области U, посчитанных с учетом кратности, N — число нулей функции f в области U, посчитанных с учетом кратности. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{\mathrm{d}f}{f} = P - N.$$

2) Число $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{\mathrm{d}f}{f}$ равно приросту аргумента функции f при полном обходе границы области U.

Задача 9.6. Для рациональной функции на сфере число нулей (посчитанных с учетом кратности) равно числу ее полюсов (посчитанных с учетом кратности). В частности, число нулей полинома степени n равно n.

Указание. См. задачи 9.4 и 9.5.

10. Геометрия Лобачевского и ТФКП

Задача 10.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ верхнее полупространство $\mathbb{R}^n_+$, определенное неравенством $x_n > 0$, где x_n — последняя координата точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Зададим риманову метрику Пуанкаре в $\mathbb{R}^n_+$

$$(\mathrm{d}s)^2 = \frac{(\mathrm{d}x_1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2}{x_n^2}.$$

Доказать, что эта метрика инвариантна относительно инверсий, центры которых лежат в гиперплоскости $x_n = 0$, а радиусы произвольны.

Указание. См. п. 4 задачи 7.1.

Задача 10.2. Пусть у точек $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ в $\mathbb{R}^n_+$ все координаты, кроме последней, равны. Тогда среди всех кривых, соединяющих $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, самая короткая кривая в смысле метрики Пуанкаре — вертикальный отрезок.

Указание. Аналогичный факт верен для любой метрики

$$(\mathrm{d}s)^2 = f(x_n)((\mathrm{d}x_1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2),$$

где f — любая неотрицательная функция, зависящая лишь от одной переменной x_n.

Задача 10.3. Пусть $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — две точки в $\mathbb{R}^n_+$. Тогда самая короткая в смысле метрики Пуанкаре кривая, соединяющая $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, — дуга окружности, ортогональной гиперплоскости $x_n = 0$.

Указание. См. задачи 10.2 и 10.1.

Полупространство $\mathbb{R}^n_+$ с метрикой Пуанкаре называется моделью Пуанкаре пространства Лобачевского L^n.

Задача 10.4 (неравенство Шварца). Пусть B_1 — открытый единичный круг на комплексной плоскости (т. е. B_1 определено неравенством $|z| < 1$), и пусть $f\colon B_1 \to B_1$ — такое аналитическое отображение, что $f(0) = 0$. Тогда

1) справедливо неравенство

$$|f(z)| \leqslant |z|;$$

2) если хотя бы в одной точке $z_0 \in B_1$, $z_0 \neq 0$, достигается равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z) \equiv c \cdot z$, где c — комплексное число, $|c| = 1$.

Указание. Для всякого замкнутого круга $|z| \leqslant (1 - \varepsilon)$ воспользоваться принципом максимума для функции $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z}$.

Задача 10.5. Переведем открытый круг B_1 в верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ любым преобразованием Мёбиуса (т. е. произведением инверсий) и индуцируем в B_1 риманову метрику из метрики Пуанкаре в $\mathbb{R}^2_+$. Тогда индуцированная метрика не зависит от выбора преобразования Мёбиуса (почему?) и тоже называется метрикой Пуанкаре. Открытый круг B_1 вместе с метрикой Пуанкаре называется моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского в единичном круге. Чему равна эта риманова метрика? Как выглядит кратчайшая в смысле этой метрики линия, соединяющая две точки в B_1?

Задача 10.6. Пусть точка a лежит в открытом единичном круге B_1. Рассмотрим функцию h, определенную формулой $h(z) = \dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$. Показать, что

1) h задает взаимно однозначное отображение B_1 в себя, сохраняет метрику Пуанкаре в круге и переводит точку a в точку нуль;

2) всякая другая функция g, обладающая этими свойствами, имеет вид $g = ch$, где c — комплексное число, по модулю равное единице (функция h выделяется среди функций, обладающих этими свойствами, тем, что она переводит прямую, соединяющую точки нуль и a, в себя).

Задача 10.7. Пусть $f\colon B_1 \to B_1$ — аналитическое отображение открытого единичного круга в себя (не обязательно оставляющее точку нуль на месте). Тогда для любых двух точек $z_1, z_2 \in B_1$ справедливо неравенство

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \rho(z_1, z_2),$$

где ρ — расстояние в метрике Пуанкаре. Если для некоторой пары точек $z_1^0, z_2^0 \in B$, где $z_1^0 \neq z_2^0$, выполняется равенство $\rho(f(z_1^0), f(z_2^0)) = \rho(z_1^0, z_2^0)$, то для любой пары точек $z_1, z_2 \in B$ $\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$.

Указание. Рассмотреть отображение $F = h_2 \circ f \circ h_1$, где h_1 и h_2 — функции из задачи 10.6, переводящие, соответственно, точку нуль в точку z_1 и точку $f(z_1)$ в точку нуль. Для отображения F воспользоваться неравенством Шварца.

Задача 10.8. 1) Пусть $f\colon B_1 \to B_1$ — взаимно однозначное аналитическое отображение. Тогда отображение f сохраняет метрику Пуанкаре и является преобразованием Мёбиуса, сохраняющим ориентацию.

2) Всякое взаимно однозначное отображение плоскости Лобачевского в себя, сохраняющее углы между любыми двумя кривыми, является движением плоскости Лобачевского.

Указание. См. задачу 10.7.

Задача 10.9. Для любой пары различных точек z_1 и z_2 в единичном круге $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и для любого выбора корней $b_1 = \sqrt{z_1}$ и $b_2 = \sqrt{z_2}$ справедливо неравенство $\rho(z_1, z_2) < \rho(b_1, b_2)$, где ρ — расстояние в метрике Пуанкаре.

Указание. См. задачу 10.7.

Задача 10.10. Пусть $f\colon D \to B_1$ — однолистное отображение (т. е. если $f(z_1) = f(z_2)$, то $z_1 = z_2$) односвязной области D в единичный круг B_1. Пусть точка $a \in B_1$ не принадлежит образу отображения f. Пусть $\varphi\colon B_1 \to B_1$ взаимно однозначное аналитическое отображение круга B_1 в себя, переводящее точку a в точку 0. Обозначим через g одну из однозначных ветвей функции $g = \sqrt{\varphi(f)}$ на области D (почему такая ветвь существует?). Тогда для любых двух различных точек $a, b \in D$ справедливо неравенство

$$\rho(g(a), g(b)) > \rho(f(a), f(b))$$

(здесь ρ — метрика Пуанкаре), причем функция $g\colon D \to B_1$ однолистна в D.

Указание. См. задачу 10.9.

Задача 10.11. Фиксируем две различные точки a, b в односвязной ограниченной области D. Пусть $f\colon D \to B_1$ — однолистное отображение, для которого $\rho(f(a), f(b))$ принимает самое большое возможное значение. Тогда f — взаимно однозначное отображение.

Указание. См. задачу 10.10.

Теорема Римана утверждает, что для всякой ограниченной односвязной области D существует взаимно однозначное аналитическое отображение в единичный круг.

Для завершения доказательства теоремы Римана нам нужен критерий компактности семейства аналитических функций.

11. Компактность функциональных множеств и теорема Римана

Метрические пространства и компактность. В задачах 11.1–11.3 мы напомним теорему Арцела́. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится. Топологическое пространство называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Множество X в метрическом пространстве называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует *конечная ε-сеть*, т. е. такое конечное подмножество A, что для любой точки $x \in X$ существует точка $a \in A$, расстояние которой до точки X меньше или равно ε.

Задача 11.1. Метрическое пространство является компактом, если и только если оно полно и вполне ограничено.

Задача 11.2. Непрерывное отображение метрического компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.

Задача 11.3 (теорема Арцела́). Рассмотрим пространство $C(X, \mathbb{R}^n)$ непрерывных отображений метрического компакта X в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Это пространство наделено равномерной метрикой. Подмножество $A \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ имеет компактное замыкание в $C(X, \mathbb{R}^n)$, если и только если

1) функции из A равномерно ограничены, т. е. существует константа C такая, что если $f \in A$, то $\|f\| < C$ ($\|f\|$ — это максимальная длина вектора $f(x)$, $x \in X$);

2) функции из A равностепенно непрерывны, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $\rho(x_1, x_2) < \delta$ и $f \in A$, то $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Компактные семейства аналитических функций. Пусть D — любая область и K — компакт, содержащийся в D.

Задача 11.4. Если множество A аналитических функций в области D равномерно ограничено, то ограничения этих функций на $K \subset D$ равностепенно непрерывны.

Указание. Производная функции оценивается в меньшей области при помощи интегральной формулы Коши (см. задачу 5.10).

Задача 11.5 (компактность ограниченного семейства аналитических функций). Если множество A аналитических функций в области D равномерно ограничено, то из всякой последовательности функций из A можно выбрать подпоследовательность, ограничение которой на каждый компакт $K \subset D$ сходится равномерно на этом компакте.

Указание. Воспользоваться задачей 11.4 для такой счетной последовательности компактов $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$, что $\bigcup K_i = D$, и «диагональным процессом Кантора».

Задача 11.6. Пусть каждая из функций $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ аналитична в области D и однолистна в ней. Пусть функция f есть предел функций $f_1, \ldots, f_n, \ldots$, причем для каждого компакта $K \subset D$ ограничения f_i на K равномерно сходятся к ограничению f на K. Тогда f либо постоянна, либо однолистна в D.

Задача 11.7 (теорема Римана). Пусть D — односвязная ограниченная область. Тогда существует взаимно однозначное аналитическое отображение $f\colon D \to B_1$ области D в единичный круг.

Указание. Воспользоваться задачами 10.11, 11.5 и 11.6.

12. Продолжаемость до границы

Задача 12.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество, и $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Отображение f непрерывно продолжается на замыкание $\overline{X}$ множества X, если и только если отображение f равномерно непрерывно.

Задача 12.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченные множества, и $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм. Показать, что гомеоморфизм f продолжается до гомеоморфизма замыканий $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, если и только если отображения $f\colon X \to Y$ и $f^{-1}\colon Y \to X$ равномерно непрерывны.

Задача 12.3. Доказать, что непрерывная вещественнозначная функция на связном множестве принимает все промежуточные значения.

Задача 12.4. Скажем, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ *локально связно в своем замыкании* $\overline{X}$, если у каждой точки $a \in \overline{X}$ существует сколь угодно малая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $U \cap X$ непусто и связно. Показать, что если X локально связно в $\overline{X}$, то каждая сфера достаточно малого радиуса с центром в точке a пересекает множество X.

Задача 12.5. Пусть $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, $a_i \in X$, $\lim a_i = a \in \overline{X}$ и $\lim f(a_i) = b \in \overline{Y}$. Если Y локально связно в $\overline{Y}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что на всякой сфере радиуса δ_0, $0 < \delta_0 < \delta$, с центром в точке a существует точка $c \in X$, для которой расстояние от $f(c)$ до b меньше ε.

Задача 12.6. Пусть X и Y — ограниченные области на плоскости, и $f\colon X \to Y$ — диффеоморфизм. Допустим, что

1) X и Y локально связны в своих замыканиях;

2) для каждой точки $a \in \overline{X}$ пересечение существует такое $R_0(a) > 0$, что для любого $R < R_0(a)$ пересечение окружности S_R радиуса R с центром a и области X связно;

3) для каждой точки $b \in \overline{Y}$ пересечение существует такое $R_0(b) > 0$, что для любого $R < R_0(b)$ пересечение окружности радиуса R с центром b и области Y связно.

Тогда если отображение $f\colon X \to Y$ не равномерно непрерывно, то существует точка $a \in \overline{X}$ и число $\beta > 0$ такие, что каждая кривая $f(\gamma_R)$, где $\gamma_R = S_R \cap X$, $0 < R < R_0$, имеет длину больше β.

Принцип длины и площади. Пусть $G \subset \mathbb{C}^1$ — область на комплексной плоскости, и $f : G \to \mathbb{C}^1$ — аналитическая функция, однолистная в области G. Фиксируем систему полярных координат ρ, θ. Введем следующие обозначения:

$\gamma(\rho)$ — кривая $|z| = \rho$, $z \in G$,
$l(\rho)$ — длина кривой $\gamma(\rho)$,
$L(\rho)$ — длина образа $f(\gamma(\rho))$ кривой $\gamma(\rho)$ при отображении f,
$S(f(G))$ — площадь области $f(G)$.

Задача 12.7. Объяснить формулы:

1) $L(\rho) = \int_{|z|=\rho,\ z\in G} |f'(z)|\,\mathrm{d}s$, где $\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}\theta$.

2) $S(f(G)) = \int_0^\infty \int_{|z|=\rho,\ z\in G} |f'(z)|^2 \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$.

Задача 12.8. Доказать неравенство

$$\int_{|z|=\rho,\ z\in G} |f'(z)|^2 \rho\,\mathrm{d}\theta \geqslant \frac{L(\rho)^2}{l(\rho)}.$$

Используя задачу 12.7, показать, что

$$S(f(G)) \geqslant \int_0^\infty \frac{L(\rho)^2}{l(\rho)}\,\mathrm{d}\rho$$

(последнее неравенство называется принципом длины и площади).

Задача 12.9. Используя принцип длины и площади, показать, что конформное отображение $f\colon X \to Y$ ограниченных областей на плоскости, удовлетворяющих условиям задачи 12.6, равномерно непрерывно.

Указание. $\int_0^{R_0} \frac{\beta^2\,\mathrm{d}\rho}{2\pi\rho} = \infty$.

Задача 12.10. Используя предыдущие задачи, доказать, что конформное отображение $f\colon X \to Y$ ограниченных областей на плоскости, удовлетворяющих условиям задачи 12.6, продолжается до их границ.

Квазиконформные отображения. Диффеоморфизм f области на плоскости в другую область называется *квазиконформным* с коэффициентом квазиконформности k, если якобиан $\mathrm{d}f$ отображения f удовлетворяет следующему условию:

$$\max_{||x||=1} ||\mathrm{d}f(x)|| \leqslant k \min_{||x||=1} ||\mathrm{d}f(x)||.$$

Будем использовать обозначения, введенные перед задачей 12.7, для квазиконформного отображения f.

Задача 12.11. Пусть f — квазиконформное отображение с коэффициентом квазиконформности k. Введем следующие обозначения:

$$c(z) = \min_{\|x\|=1} \|\mathrm{d}f(x)\|, \quad C(z) = \max_{\|x\|=1} \|\mathrm{d}f(x)\|,$$

$C(z) \leqslant kc(z)$. Объяснить следующие соотношения:

1) $L(\rho) \geqslant \int_{\|z\|=\rho, z\in G} c(z)\,\mathrm{d}s$, где $\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}\theta$;

2) $S(f(G)) = \int_0^\infty \int_{\|z\|=\rho, z\in G} c(z)C(z)\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$;

3) $S(f(G)) \geqslant k \int_0^\infty \dfrac{L^2(\rho)}{l(\rho)}\,\mathrm{d}\rho$.

Задача 12.12. Доказать продолжаемость квазиконформного диффеоморфизма до границы области.

Указание. См. задачи 12.9 и 12.11.

Ошибка в учебнике Евграфова.[1] Скажем, что гладкое отображение $f\colon U \to V$ обладает *свойством единственности*, если выполнено следующее условие: не существует связной дуги Γ на границе ∂U области U для которой $\lim\limits_{z\to x} f(z)$ существует при всех $x \in \Gamma$, причем все эти пределы равны.

В учебнике М. А. Евграфова «Аналитические функции» (М.: Наука, 1968) доказана продолжаемость конформного отображения исходя из того, что аналитические функции f и f^{-1} обладают свойством единственности.

Задача 12.13. 1) Привести пример диффеоморфизма $f\colon U \to V$ такого, что f и f^{-1} обладают свойством единственности, но отображение f не продолжается до границы области.

2) Указать конкретную ошибку на с. 378 этого учебника.

13. Римановы поверхности аналитических функций

Росток f_a аналитической функции в точке a сферы Римана $\tilde{\mathbb{C}}$ — это ряд Тейлора $f_a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(z-a_k)^k$ с центром в точке a, сходящийся в некотором открытом круге с центром в точке a (если $a=\infty$, то $f_a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k u^k$, где $u = \dfrac{1}{z}$, и ряд сходится при $|u| < R$).

[1] Книга Евграфова, по-моему, — один из самых лучших учебников по комплексному анализу. Ошибка, о которой пойдет речь в задаче 12.13, — дело житейское; собственно говоря, я наткнулся на нее потому, что использовал книгу Евграфова при подготовке курса лекций.

Пусть $I=[0,1]$, $\gamma\colon I\to\tilde{\mathbb{C}}$ — непрерывная кривая на сфере Римана с началом в точке a, т. е. $\gamma(0)=a$. *Аналитическим продолжением* ростка f_a вдоль кривой γ называется отображение, сопоставляющее каждой точке $t_0\in[0,1]$ аналитический росток f_b в точке $b=\gamma(t_0)$ таким образом, что для всякого $t\in[0,1]$ существуют такие окрестность $U\subset\tilde{\mathbb{C}}$ точки $\gamma(t)$, окрестность $V\subset[0,1]$ точки t и аналитическая функция $f\colon U\to\mathbb{C}$ в области U, что для всякой точки $b\in V$ аналитический росток $f_{\gamma(b)}$ — это росток в точке $\gamma(b)\in U$ функции f.

Задача 13.1. Для кривой $\gamma\colon I\to\tilde{\mathbb{C}}$, $\gamma(0)=a$, и ростка f_a существует не более одного аналитического продолжения.

Задача 13.2. Пусть росток f_a аналитически продолжается вдоль кривой $\gamma\colon I\to\tilde{\mathbb{C}}$, $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$, и f_b — росток, полученный при этом продолжении. Тогда существует конечная цепочка точек $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$, для которой ряд $f_{\gamma(t_i)}$ сходится в точке $\gamma(t_{i+1})$, причем ряд $f_{\gamma(t_i)}$ — это ряд Тейлора в точке $\gamma(t_i)$ полученной аналитической функции.

Задача 13.3 (теорема о монодромии). Рассмотрим непрерывное отображение F единичного квадрата I^2 с координатами u,v, $0\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v\leqslant 1$, в $\tilde{\mathbb{C}}$ такое, что каждая кривая $F_v\colon I\to\tilde{\mathbb{C}}$, где $F_v(u)=F(u,v)$, начинается в точке a и кончается в точке b, т. е. $F(v,0)\equiv a$ и $F(v,1)\equiv b$. Пусть для каждой кривой F_v росток f_a аналитически продолжается вдоль этой кривой. Тогда результат аналитического продолжения до точки $u=1$ не зависит от выбора кривой F_v, где $0\leqslant v\leqslant 1$.

Указание. Если немного изменить кривую в малой окрестности любой из ее точек, то результат аналитического продолжения не изменится.

Определение. Два аналитических ростка f_a и g_b, заданные в точках a и b сферы Римана, называются *эквивалентными*, если существует такая кривая $\gamma\colon I\to\tilde{\mathbb{C}}$, $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$, что росток g_b — результат продолжения ростка f_a вдоль кривой γ.

Задача 13.4. Описанные выше соотношение действительно являются соотношением эквивалентности, т. е.

1) $f_a\sim f_a$;

2) если $f_a\sim g_b$, то $g_b\sim f_a$;

3) если $f_a\sim g_b$ и $g_b\sim\varphi_c$, то $f_a\sim\varphi_c$.

Определение. Как множество точек *риманова поверхность ростка* f_a — это совокупность всех ростков g_b, эквивалентных ростку f_a.

На римановой поверхности R ряда f определены два естественных отображения:

1) *проекция* $\pi\colon R\to\tilde{\mathbb{C}}$, сопоставляющая каждому ростку точку, в окрестности которой этот росток определен;

2) *функция* $f\colon R\to\mathbb{C}$, сопоставляющая каждому ростку его значение в точке, в окрестности которой он определен.

Топология на R определяется как наименее тонкая топология, в которой проекция $\pi\colon R\to\tilde{\mathbb{C}}$ непрерывна.

Задача 13.5. Отображение $\pi\colon R\to\tilde{\mathbb{C}}$ является локальным гомеоморфизмом, т.е. у каждой точки $p\in R$ существует такая окрестность U, что ограничение π на U — гомеоморфизм на свой образ.

Задача 13.6. Каждая точка $a\in\tilde{\mathbb{C}}$ имеет не более чем счетное число прообразов при отображении $\pi\colon R\to\tilde{\mathbb{C}}$.

Определение. Функция $g\colon R\to\mathbb{C}$ называется *аналитической*, если для каждой области $U\subset R$, для которой проекция $\pi\colon U\to\tilde{\mathbb{C}}$ является гомеоморфизмом, функция φ в области $V=\pi(U)$, определенная равенством $\varphi=g\circ\pi^{-1}$, является аналитической.

Аналогично определяется мероморфная функция на R.

Алгеброидные ростки. Скажем, что росток f_p аналитической функции в связной окрестности U точки a, $p\in U\setminus a$, *алгеброиден*, если

1) росток f_p аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon I\to U\setminus a$, $\gamma(0)=p$;

2) существует лишь конечное число k ростков g_p в точке p, получающихся аналитическим продолжением ростка f_p вдоль замкнутой кривой $\gamma\colon I\to U\setminus a$, $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=p$;

3) существуют такие натуральное число N и вещественная константа C, что для всякого ростка g_q, полученного из f_p при продолжении вдоль некоторой кривой $\gamma\colon I\to U\setminus a$, $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$, справедливо одно из неравенств

$$\begin{aligned}|g_q(q)|&\leqslant C|q-a|^{-N}, &&\text{если } a\neq\infty,\\ |g_q(q)|&\leqslant C|q|^{N}, &&\text{если } a=\infty.\end{aligned}$$

Задача 13.7. Росток f_p функции переменной z алгеброиден в $U\setminus a$ если и только если $f_p=g_p(u)$, где g — мероморфная функция переменной u в окрестности 0 и $z-a=u^k$ при $a\neq\infty$ или $1/z=u^k$ при $a=\infty$ (переменная u определена этими равенствами однозначно с точностью до умножения на любой из корней k-й степени из 1). Так как мероморфная функция g раскладывается в ряд Лорана $g(u)=\sum\limits_{m\geqslant -M}c_mu^m$, алгеброидная функция f раскладывается в *ряд Пюизё*:

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{m\geqslant -M}c_m(z-a)^{m/k}, &&\text{если } a\neq\infty,\quad\text{или}\\ f(z)&=\sum_{m\leqslant M}c_mz^{m/k}, &&\text{если } a=\infty.\end{aligned}$$

Докажите сформулированные утверждения. Если в рядах Пюизё, написанных выше, каждый из коэффициентов c_m заменить на коэффициент $\tilde{c}_m = c_m\xi^m$, где ξ — фиксированный корень k-й степени из единицы, то получаются новые ряды Пюизё, которые считаются *эквивалентными* исходным. Как связаны между собой многозначные аналитические функции в $U \setminus a$, определяемые эквивалентными рядами Пюизё?

Определение. *Полная риманова поверхность ростка* f_a (как множество точек) — это совокупность всех рядов Тейлора и рядов Пюизё, которые получаются аналитическим продолжением из исходного ростка f_a (при этом считается, что эквивалентные ряды Пюизё задают одну и ту же точку полной римановой поверхности ростка f_a). На полной аналитической поверхности R определены два отображения: $\pi\colon R \to \tilde{\mathbb{C}}$ и $f\colon R \to \mathbb{C}$ (они определяются так же, как это делалось для римановой поверхности ростка f_a. *Топология* в R определяется как наименее тонкая топология (т. е. топология, содержащая наименьший класс открытых множеств), в которой проекция π непрерывна. *Аналитическая функция* в окрестности точки, соответствующей ряду Пюизё, — это аналитическая функция от параметра u (см. задачу 13.7).

Скажем, что аналитический росток f_a в точке a сферы Римана $\tilde{\mathbb{C}}$ является *ростком алгебраической функции* (или *алгебраическим ростком*), если

1) существует конечное подмножество $A \subset \tilde{\mathbb{C}}$, $a \notin A$ такое, что росток f_a аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon I \to \tilde{\mathbb{C}} \setminus A$, $\gamma(0) = a$, не пересекающей множества A;

2) существует лишь конечное множество ростков $f_{a_1}, \ldots, f_{a_k}$, которые могут быть получены аналитическим продолжением вдоль замкнутых кривых $\gamma\colon I \to \tilde{\mathbb{C}} \setminus A$, $\gamma(0) = \gamma(1) = a$;

3) для каждой точки $b \in A$ существуют такие окрестность U_b, натуральное число N и вещественная константа C, что каждый росток g_q, $q \in U_b$, эквивалентный ростку f_a, удовлетворяет одному из неравенств

$$\begin{aligned} &|g_q(q)| \leqslant C|q-b|^{-N}, &&\text{если } b \neq \infty, \quad \text{или}\\ &|g_q(q)| \leqslant C|q|^{N}, &&\text{если } b = \infty. \end{aligned}$$

Задача 13.8. Показать, что всякий алгебраический росток f_a удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению

$$f_a^k + R_1(z)f_a^{k-1} + \ldots + R_k(z) = 0,$$

в котором $R_i(z)$ — рациональные функции.

Указание. Рассмотреть симметрические функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ от ростков $f_{a_1}, \ldots, f_{a_k}$, эквивалентных ростку f_a в точке a $(\sigma_1 = \sum f_{a_i}$,

$\sigma_2 = \sum_{i>j} f_{a_i} f_{a_j}$ и т. д.). Проверить, что функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ рациональны, используя задачу 8.4.

Задача 13.9. Полная риманова поверхность алгебраического ростка f_a компактна.

Указание. Чтобы из последовательности точек $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ на R выбрать сходящуюся подпоследовательность, нужно выбрать сходящуюся подпоследовательность из точек $\pi(b_i) \in \tilde{\mathbb{C}}$ и воспользоваться тем, что каждая точка $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ имеет одно и то же конечное число прообразов при отображении $\pi\colon R \to \tilde{\mathbb{C}}$ (если учитывать кратности).

Определение. 1-форма, определенная в области на римановой поверхности R, называется *аналитической*, если около каждой точки области она локально представима в виде $f(z)\,\mathrm{d}z$, где z — локальный параметр на R и $f(z)$ — аналитическая функция.

Задача 13.10. Пусть U — компактная область на R с гладкой границей ∂U и ω — аналитическая форма в области U. Тогда $\int_{\partial U} \omega = 0$.

Определение. Пусть форма ω аналитична в малой проколотой окрестности точки a на римановой поверхности R и ∂U — граница малой односвязной области U, содержащей точку a. Число $\dfrac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \omega$ называется *вычетом* формы ω в точке a.

Задача 13.11. Вычет определен корректно, т. е. не зависит от выбора окрестности точки a.

Задача 13.12. Пусть ω — мероморфная форма (т. е. локально представимая в виде $f(z)\,\mathrm{d}z$, где f — мероморфная функция). Тогда сумма вычетов формы ω по всем ее особым точкам равна 0.

Задача 13.13. 1) Для всякой мероморфной функции $f\colon R \to \mathbb{C}$ на компактной римановой поверхности ее число полюсов P, посчитанных с учетом кратности, равно числу N ее нулей, посчитанных с учетом кратности, т. е. $P = N$.

2) Пусть $N(a)$ — посчитанное с учетом кратности количество точек, в которых мероморфная функция равна a. Тогда $N(a) = P$ и не зависит от выбора точки a.

Указание. См. задачу 9.5.

Задача 13.14. Пусть $\pi\colon R \to \tilde{\mathbb{C}}$ — мероморфное отображение компактной римановой поверхности в сферу Римана. Тогда множество точек $a \in \tilde{\mathbb{C}}$, среди прообразов которых есть кратные, является конечным.

Задача 13.15. Пусть полная риманова поверхность $\pi\colon R \to \tau$ функции f компактна. Тогда функция f алгебраична.

Указание. См. задачи 3.8 и 3.14.

14. Принцип симметрии Римана–Шварца. Теорема Пикара

Задача 14.1 (теорема об устранимости особенностей вдоль линии). Пусть U — область на плоскости, и $l \subset U$ — гладкая кривая в этой области, которая разбивает ее на две области U_1 и U_2, граничащие друг с другом по кривой l. Пусть $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция в области U, ограничения которой на подобласти U_1 и U_2 аналитичны в этих областях. Тогда f аналитична в U.

Указание. Воспользоваться интегральной формулой Коши для областей U_1 и U_2. Показать, что сумма двух полученных интегралов задает интегральное представление функции f в области $U \setminus l$. Убедиться, что это интегральное представление продолжается на всю область U и совпадает с интегральной формулой Коши для функции f в области U.

Задача 14.2 (принцип симметрии Римана–Шварца). Пусть U и G — области на плоскости. Пусть граница области U содержит дугу l_1 окружности S_1, а граница области G содержит дугу l_2 окружности S_2. Обозначим через τ_1 и τ_2 отображения инверсии относительно окружностей S_1 и S_2. Пусть образ $\tau_1(U)$ области U при инверсии τ_1 не пересекается с областью U. Допустим, что существует аналитическое отображение $f : U \to G$, которое непрерывно продолжается на дугу l_1, причем $f(l_1) \subseteq l_2$. Тогда аналитическое отображение $f : U \to G$ аналитически продолжается до отображения $F : \tilde{U} \to \tilde{G}$, где $\tilde{U} = U \cup \tau_1(U) \cup l_1$ и $\tilde{G} = G \cup \tau_2(G) \cup l_2$, определенного на области $\tau_1(U)$ следующей формулой:

$$F(z) = \tau_2 \circ f \circ \tau_1(z).$$

Указание. Воспользоваться предыдущей задачей и конформностью инверсии.

Замечание. Если области U и $\tau_1(U)$ пересекаются, то функция f аналитически продолжается в $\tau_1(U)$, но функция F на области $\tilde{U}$ будет, вообще говоря, многозначной.

Задача 14.3. Пусть G — многоугольник на плоскости, стороны которого — дуги окружностей. Тогда по теореме Римана существует взаимно однозначное аналитическое отображение $f : \Pi \to G$, где Π — верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. По теореме о продолжаемости до границы отображение f непрерывно продолжается на ось вещественных чисел, пополненную точкой ∞, причем полученное отображение вещественной проективной прямой на границу ∂G многоугольника G является гомеоморфизмом. Обозначим через $A'_1, \ldots, A'_n$ прообразы последовательных вершин $A_1, \ldots, A_n$ многоугольника G.

1) Доказать, что отображение f непрерывно продолжается в нижнюю полуплоскость вдоль любого интервала A'_i, A'_{i+1} вещественной оси

(один из этих интервалов содержит ∞). Это означает, что существует функция $F\colon \tilde{U} \to \mathbb{C}$, где $\tilde{U}$ — это объединение верхней полуплоскости Π, нижней полуплоскости $\overline{\Pi}$ ($z \in \overline{\Pi}$, если $\operatorname{Im} z < 0$) и интервала A'_i, A'_{i+1}.

2) Что собой представляет образ нижней полуплоскости $\overline{\Pi}$ при отображении F?

3) Доказать, что росток f_a отображения f в точке $a \in \Pi$ аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = a$, не проходящей через точки $A'_1, \ldots, A'_n$.

Задача 14.4. Пусть в условиях предыдущей задачи G — треугольник с нулевыми углами, вписанный в единичную окружность и имеющий вершины A_1, A_2, A_3. Сделав, если нужно, вещественное дробно-линейное преобразование $u = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$, можно считать, что $A'_1 = 0$, $A'_2 = 1$, $A'_3 = \infty$. Рассмотрим многозначную аналитическую функцию $\chi\colon \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$, полученную аналитическим продолжением функции $f\colon \Pi \to G$. Доказать, что функция χ^{-1} определена и голоморфна в открытом единичном круге (и, стало быть, что все значения многозначной функции χ по модулю не превосходят единицы).

Указание. Пусть G' — треугольник, полученный инверсией треугольника G относительно одной из его сторон. Тогда G' тоже вписан в единичную окружность. Треугольник G' снова можно инверсионно отразить в одной из его сторон. Получится треугольник G'', тоже вписанный в единичную окружность. Повторяя эту процедуру, можно получить «паркет», замощающий внутренность единичного круга и состоящий из треугольников, полученных из G последовательными инверсиями.

Задача 14.5. Аналитическая функция, определенная на всей комплексной плоскости, называется *целой* функцией. Показать, что всякая целая функция $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, не принимающая значение a, имеет вид $g = e^f + a$, где f — целая функция.

Указание. Рассмотреть однозначную ветвь функции $\ln(g(z) - a)$ на комплексной плоскости. (Почему такая однозначная ветвь существует?)

Задача 14.6 (теорема Пикара). Всякая целая функция $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, не принимающая двух значений a и b, является константой.

Указание. Пусть χ — функция из задачи 14.4. Тогда многозначная функция $\chi\Big(\dfrac{z-a}{b-a}\Big)$ продолжается вдоль любой кривой, не проходящей через a и b, и все ее значения не превосходят по модулю единицы. Рассмотреть однозначную ветвь на комплексной плоскости функции $\chi\Big(\dfrac{g(z)-a}{b-a}\Big)$. (Почему такая однозначная ветвь существует?) Воспользоваться теоремой Лиувилля.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

15. Гармонические функции многих переменных

Оператор Лапласа Δ в $\mathbb{R}^n$ — это дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Задача 15.1. Для всякой функции f класса C^2 в области $U \subset \mathbb{R}^n$ справедливо тождество

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} F.$$

Определим оператор усреднения $\operatorname{Mid}(R, a)$. Пусть $S_{R,a}$ и $B_{R,a}$ — сфера и шар радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Для всякой непрерывной функции f в области, содержащей сферу $S_{R,a}$, определим число $\operatorname{Mid}(R, a)f$ как среднее значение функции f по сфере $S_{R,a}$, т. е.

$$\operatorname{Mid}(R, a)f = \frac{1}{V(S_{R,a})} \int_{S_{R,a}} f\Omega,$$

где Ω — форма $(n-1)$-мерного объема на сфере $S_{R,a}$, $V(S_{R,a})$ — $(n-1)$-мерный объем сферы $S_{R,a}$.

Задача 15.2. Для всякой функции f класса C^2 в области U, содержащей шар $B_{R_0,a}$ радиуса R_0 с центром в точке a, при $R < R_0$ справедливо тождество

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\operatorname{Mid}(R, a)f \equiv \frac{1}{V(S_{R,a})} \int_{B_{R,a}} \Delta f \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Указание. Пусть $a = 0$. Растяжением в R^{-1} раз интеграл по сфере $S_{R,0}$ сводится к интегралу по фиксированной сфере $S_{1,0}$:

$$\operatorname{Mid}(R, 0)f = \frac{1}{V(S_{1,0})} \int_{S_{1,0}} f(Rx)\Omega.$$

Поэтому $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\operatorname{Mid}(R, 0)f = \frac{1}{V(S_{1,0})} \int_{S_{1,0}} \langle \vec{n}, \operatorname{grad} f(R, x)\rangle\Omega$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль к единичной сфере в точке x. Преобразовать последний интеграл, используя формулу Стокса.

Задача 15.3. Пусть f — функция класса C^2 в области U. Тогда:

1) если в области U выполнено неравенство $\Delta f > 0$, то $\operatorname{Mid}(R, a)f \geqslant f(a)$;

2) если в области U выполнено неравенство $\Delta f < 0$, то $\operatorname{Mid}(R, a)f \leqslant f(a)$;

3) если в области U выполнено тождество $\Delta f \equiv 0$, то $\mathrm{Mid}(R, a)f = f(a)$.

(В задаче предполагается, что область U содержит шар $B_{R,a}$ радиуса R с центром в точке a.)

Определение 1 (классическое определение гармонической функции). Функция f класса C^2 в области U называется *гармонической* в этой области, если справедливо тождество

$$\Delta f \equiv 0.$$

Задача 15.4. Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^3$ до точки 0. Проверить, что функция $f(x) = \dfrac{1}{r(x)}$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ и что градиент этой функции по длине равен $\dfrac{1}{r^2(x)}$ и направлен от точки 0.

Замечание. Согласно закону всемирного тяготения сила гравитационного притяжения к массе, расположенной в точке 0, пропорциональна градиенту функции $\dfrac{1}{r(x)}$ (коэффициент пропорциональности зависит от массы). По задаче 15.4 потенциал силы притяжения к массивной точке, а значит, и к любой системе точек, является гармонической функцией вне области, содержащей эти точки. Аналогичное верно и для сил электрического притяжения. Это одна из причин, по которым гармонические функции играют столь фундаментальную роль в математической физике.

Определение 2 (интегральное определение гармонической функции). Непрерывная функция f в области U называется *гармонической* в области U, если для всякой точки a и шара $B_{R,a}$ таких, что $B_{R,a} \subset U$, выполняется равенство

$$\mathrm{Mid}(R, a)f = f(a).$$

Приведем еще одно близкое определение.

Непрерывная функция f в области U называется *субгармонической* в области U, если для всякой точки a и шара $B_{R,a}$ таких, что $B_{R,a} \subset U$, выполняется неравенство

$$\mathrm{Mid}(R, a)f \geqslant f(a).$$

Задача 15.5. 1) Если к определению 2 добавить требование гладкости f, $f \in C^2$, то определения 1 и 2 станут эквивалентными.

2) Функция f класса C^2 является субгармонической, если и только если выполняется неравенство $\Delta f \geqslant 0$.

Указание. См. задачу 15.3.

Для следующей задачи нам понадобится обобщенная формула Стокса в векторной форме. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартное скалярное произведение. В этом случае обобщенный вариант (так же как и классический вариант) формулы Стокса допускает векторную трактовку. Приведем ее.

Обобщенная формула Стокса в векторном виде. *Пусть U — компактная область с гладкой границей ∂U в пространстве $\mathbb{R}^n$, пусть $V = (P_1, \ldots, P_n)$ — векторное поле, коэффициенты P_i которого имеют дифференциалы в замыкании области U и дивергенция которого $\operatorname{div} V = \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial P_n}{\partial x_n}$ непрерывна в замыкании этой области. Тогда поток $\int_{\partial U} \langle \vec{V}, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \rangle$ векторного поля через границу области (здесь $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ — вектор, ортогональный границе ∂U области U, направленный наружу и равный по длине $(n-1)$-мерному объему рассматриваемого малого элемента $\mathrm{d}S$ границы этой области) равен интегралу ее дивергенции $\int_U \operatorname{div} V \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.*

Обобщенная формула Стокса в векторном виде не нуждается в отдельном доказательстве, поскольку она является переформулировкой обобщенной формулы Стокса (см. раздел «Об обобщенной формуле Стокса...» предисловия).

Определение 3 (определение гармонической функции в духе Гурса). Функция f класса C^1 в области $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *гармонической* в области U, если

1) функция f в каждой точке имеет второй дифференциал (другими словами, отображение $\operatorname{grad} f \colon U \to \mathbb{R}^n$ в каждой точке имеет первый дифференциал);

2) справедливо тождество $\Delta f \equiv 0$.

Задача 15.6. Всякая функция, являющаяся гармонической в смысле определения 3, является гармонической в интегральном смысле.

Указание. Можно действовать, как в задаче 15.5, но вместо классической формулы Стокса нужно использовать ее обобщенный вариант.

Гармоническая функция в смысле классического определения, разумеется, является гармонической в смысле определения 3. В задачах 15.7, 15.8 мы проверим, что функция, удовлетворяющая интегральному определению гармонической функции, автоматически является гладкой. Поэтому определения 1, 2 и 3 эквивалентны.

Задача 15.7. Пусть $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая непрерывная функция, что

1) φ зависит лишь от расстояния точки до нуля, т. е. $\varphi(x) = g(\|x\|)$;

2) φ обращается в нуль во всех достаточно удаленных от нуля точках;

3) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \equiv 1$.

Проверить, что если для функции f выполнено тождество $\mathrm{Mid}(R,a)f \equiv f(a)$, то $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x-a)\,\mathrm{d}x \equiv f(a)$. (Здесь предполагается, что область U содержит шары $B_{R,a}$, о которых идет речь в первом тождестве, и носители функций $\varphi(x-a)$, о которых идет речь во втором тождестве.)

Задача 15.8. Если для функции f справедливо тождество $\mathrm{Mid}(R,a) \equiv \equiv f(a)$, то функция f гладкая.

Указание. Воспользоваться тождеством из задачи 15.7 для гладкой функции $\varphi(x-a)$.

Задача 15.9. 1) Для гармонических функций справедлив принцип максимума: если гармоническая функция достигает максимума во внутренней точке связной области U, то эта функция постоянна.

Указание. Воспользоваться интегральным определением гармонической функции.

2) Для субгармонических функций также справедлив принцип максимума: если субгармоническая функция достигает максимума во внутренней точке связной области U, то эта функция постоянна.

Задача 15.10. Пусть функции $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ в области U равномерно сходятся к функции f. Тогда

1) если функции f_i гармонические, то функция f тоже гармоническая в U;

2) если функции f_i субгармонические, то функция f тоже субгармоническая в U.

Указание. Воспользоваться интегральным определением гармонической функции.

Пусть на границе ∂U ограниченной области U задана вещественная непрерывная функция $h\colon \partial U \to \mathbb{R}$. *Задача Дирихле* состоит в нахождении непрерывной в замыкании U и гармонической в U функции f такой, что f совпадает с h на ∂U.

Задача 15.11. Задача Дирихле имеет не более одного решения.

Отметим, что задача Дирихле разрешима для широкого класса областей (не обязательно односвязных).

16. Гармонические функции на плоскости и аналитические функции

Вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. (Это несложно проверить, используя как классическое, так и интегральное определение гармонических функций.) Этот факт объясняет роль аналитических функций в математической физике — во многих физических задачах гармонические функции зависят лишь от двух переменных, и теория таких функций сводится к ТФКП.

Задача 16.1. Вещественная и мнимая части аналитической функции в области U являются C^2-гладкими функциями и удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta f \equiv 0$.

Указание. Воспользоваться гладкостью аналитических функций и уравнениями Коши–Римана.

Задача 16.2. Вещественная и мнимая части аналитической в области U функции удовлетворяют тождеству

$$\operatorname{Mid}(R, a)f \equiv f(a).$$

Указание. Воспользоваться интегральной формулой Коши.

Задача 16.3. Если u — гармоническая в односвязной области U функция, то существует такая функция v (определенная с точностью до произвольной постоянной), что функция $f = u + iv$ является аналитической в области U.

Указание. Из уравнений Коши–Римана можно вычислить частные производные $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ функции v, используя частные производные функции u. Система $\dfrac{\partial v}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = q$ разрешима в односвязной области U, если и только если $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$. Проверить, что в нашей ситуации условие разрешимости эквивалентно тождеству $\Delta u \equiv 0$.

Задача 16.4. Пусть g — гармоническая функция в области $V \subset \mathbb{C}$, и пусть $f\colon U \to V$ — аналитическая функция. Тогда функция $g(f)$ является гармонической в области U.

Указание. См. задачи 16.1–16.3

Задача 16.5. Показать, что для всякого тригонометрического многочлена $h(\alpha) = c_0 + \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha)$ задача Дирихле разрешима.

Указание. Если $|z| = 1$, $\alpha = \arg z$, то $\operatorname{Re} z^k = \cos k\alpha$, $\operatorname{Im} z^k = \sin k\alpha$.

Задача 16.6. Используя плотность тригонометрических многочленов в множестве непрерывных функций на окружности, доказать разрешимость задачи Дирихле для круга.

Указание. Воспользоваться тем, что предел равномерно сходящихся гармонических функций является гармонической функцией (см. задачу 15.10) и принципом максимума.

Зная априори, что задача Дирихле для круга разрешима, несложно написать ее решение в явном виде. Пусть мы ищем значение в точке a, $|a|<1$, решения задачи Дирихле $\Delta u \equiv 0$, $u|_{|z|=1} = h$ в круге $|z| \leqslant 1$. Переведем точку a в точку 0 преобразованием $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$. Функция $v(z) = u(\varphi_a^{-1}(z))$ гармонична в круге $|z|<1$, и ее значение в нуле совпадает с искомым числом $u(a)$. Имеем

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} h(\varphi_a^{-1}(z))\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1} h(\xi)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\varphi_a(\xi)\right|\,|\mathrm{d}\xi|.$$

Задача 16.7 (формула Пуассона). 1) Явно вычислить ядро Пуассона

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\varphi_a(\xi)\right|\,|\mathrm{d}\xi|,$$

зависящее от точки ξ на единичной окружности $|\xi|=1$ и точки a внутри единичного круга.

2) Проверить, что ядро Пуассона является вещественно-аналитической функцией (т. е. ряд Тейлора этой функции является сходящимся) от координат $x(a), y(a)$ в точке a.

3) Из вещественной аналитичности ядра Пуассона как функции от a вытекает вещественная аналитичность гармонической функции двух переменных (не обязательно в круге, а в любой области плоскости). Почему?

Отметим, что задача Дирихле в многомерном шаре так же явно решается при помощи явно выписываемого ядра Дирихле, являющегося вещественно-аналитической функцией. Отсюда вытекает, что гармонические функции многих переменных являются вещественно-аналитическими функциями.

Задача 16.8. Для всякой односвязной области $U \subset \mathbb{C}^2$, для которой выполнены условия непрерывной продолжаемости до границы отображения Римана (см. п. 12), задача Дирихле разрешима. Более того, если явно написано отображение Римана области U в единичный круг, то для всякой задачи Дирихле в области U можно написать явное решение. Почему?

Задача 16.9. На комплексной плоскости оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ представим в виде $\Delta = 4\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, где $z = x+iy$, а операторы $\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ определены в п. 4.

17. Субгармонические функции и теорема единственности

Задача 17.1 (формула Йенсена). Пусть функция f голоморфна в замыкании круга радиуса R с центром в точке 0. Доказать следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{|z|=R} \ln|f|\,\mathrm{d}s = \ln|f(0)| + \sum_{f(z_i)=0,\ |z_i|<R} \ln\frac{R}{|z_i|},$$

где нули функции f входят в последнюю сумму с учетом кратности.

Указание. Провести доказательство в три этапа:

1) доказать, что если формула Йенсена верна для функций f и g, то она верна и для произведения fg;

2) доказать формулу Йенсена для функций, не имеющих нулей в рассматриваемом круге;

3) для каждой точки a круга построить явно такую функцию f (голоморфную в замыкании данного круга), что f обращается в нуль только в точке a, а модуль f тождественно равен 1 на граничной окружности. Проверить формулу для таких функций.

Объединяя все три пункта, доказать утверждение задачи.

Нам понадобится немного расширить определение субгармонической функции на плоскости, разрешив функции принимать значение $-\infty$. Ниже под словами «субгармоническая функция» мы имеем в виду следующее чуть более общее понятие.

Определение. Пусть U — область в комплексной плоскости, и $A \subset U$ — дискретное подмножество. Рассмотрим вещественнозначную функцию f на $U \setminus A$, которая в точках множества A «равна $-\infty$». Такая функция считается непрерывной, если функция $e^f : U \to R$, доопределенная в точках множества A числом 0, непрерывна. Функция такого вида называется *субгармонической*, если для всякого круга $|z-a| \leqslant R$, целиком лежащего в области U, выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{|z-a|=R} f(z)\,\mathrm{d}s \geqslant f(a).$$

Если окружность $|z-a| = R$ содержит точки множества A, то предполагается, что интеграл, стоящий в левой части неравенства, существует как несобственный интеграл.

Задача 17.2. Обобщить формулу Йенсена на случай, когда окружность $|z| = R$ содержит нули функции $f(z)$. Доказать, что функция $\ln|f(z)|$ субгармонична в области U, в которой функция f аналитична.

Задача 17.3. Обобщить формулу Йенсена на случай мероморфных функций.

Задача 17.4 (принцип максимума для субгармонических функций). Рассмотрим функцию f, субгармоническую в связной области G. Предположим, что существует такая точка $a \in G$, что для любой точки $z \in G$ выполнено неравенство $f(a) \geqslant f(z)$. Доказать, что f — константа.

Задачи 17.5–17.7 представляют собой варианты принципа максимума.

Задача 17.5. Рассмотрим ограниченную сверху субгармоническую функцию u в области G. Обозначим через Γ границу области G. Для каждой точки a границы положим

$$\bar{u}(a) = \varlimsup_{z \to a,\ z \in G} u(z).$$

Доказать, что для произвольной точки x области G выполнено неравенство $u(x) \leqslant \sup\limits_{a \in \Gamma} \bar{u}(a)$.

Задача 17.6. В условиях предыдущей задачи предположим, что область G ограничена и ее диаметр равен D. На границе Γ области G отметим произвольные точки $a_1, \ldots, a_k$. Пусть $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$. Доказать, что для любой точки x области G выполнено неравенство $u(x) \leqslant \sup\limits_{a \in \tilde{\Gamma}} \bar{u}(a)$.

Указание. Воспользоваться принципом максимума для функции

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon \sum \ln \frac{|x - a_i|}{D}.$$

В качестве ε здесь нужно рассматривать произвольное положительное число.

Задача 17.7. Перенести утверждение предыдущей задачи на неограниченную область G, дополнение которой до сферы Римана имеет хотя бы одну внутреннюю точку.

Задача 17.8. Если отбросить требования ограниченности сверху субгармонической функции, то утверждение задачи 17.6 станет неверным. Привести пример ненулевой гармонической в верхней полуплоскости функции, которая непрерывно продолжается на вещественную ось и тождественно равна нулю на этой оси.

Задача 17.9. Рассмотрим замкнутый круг B на комплексной прямой.

1) Отметим на граничной окружности различные точки A_1 и A_2. Предъявить такую ограниченную гармоническую во внутренности круга B функцию, что она непрерывна вплоть до граничной окружности за исключением точек A и B, равна 1 на дуге AB и равна 0 на дополнительной дуге. Доказать, что функция, удовлетворяющая условиям задачи, единственна. Нарисовать картину ее линий уровня.

Указание. Функция $\dfrac{1}{2\pi} \arg z$ гармонична и ограничена в верхней полуплоскости. На вещественной прямой она равна нулю для положительных z и единице для отрицательных z.

2) Предположим теперь, что граничная окружность разбита на n дуг $l_1, \ldots, l_n$. Сформулировать и решить задачу, аналогичную п. 1).

Задача 17.10. Пусть B — замкнутый круг на комплексной прямой. Отметим на граничной окружности дугу между различными точками A_1 и A_2. Для каждого действительного числа A рассмотрим такую ограниченную гармоническую во внутренности круга B функцию f_A, что f_A тождественно равна A на дуге A_1A_2 и тождественно равна некоторой константе C (фиксированной для всех функций) на дополнительной дуге. Доказать, что для любой внутренней точки круга B выполнено равенство

$$\lim_{A\to-\infty} f_A(x) = -\infty.$$

Определение. Точку a, принадлежащую границе области G, назовем *простой граничной* точкой этой области, если каждая достаточно малая окружность с центром в точке a содержит дугу, целиком лежащую в дополнении к G.

Задача 17.11 (граничная теорема единственности). Пусть $f\colon G \to \mathbb{C}$ — ограниченная аналитическая функция в области G, и пусть a — простая граничная точка этой области. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\lim\limits_{z\to b} f(z) = 0$ для всякой точки $b \in \partial G$ такой, что $|a - b| < \varepsilon$, то $f(z) \equiv 0$.

Указание. На достаточно малом круге B с центром в точке a рассмотреть гармоническую функцию u_A, равную $-A$ на некоторой дуге Γ_1 окружности ∂B, лежащей вне области G, и равную $\ln|c|$ на дополнительной дуге окружности ∂B. Здесь A — большое отрицательное число и $c = \sup\limits_{z\in G} |f(z)|$. Доказать, что при $z \in B \cap G$ справедливо неравенство $u_A(z) \geqslant \ln|f(z)|$. Воспользовавшись задачей 17.9, показать, что $f(z) \equiv 0$.

Задача 17.12. Обобщить граничную теорему единственности на любую (не обязательно простую) граничную точку a, предполагая, что область G односвязна.

Указание. Воспользоваться (локально) отображением $\sqrt{z-a}$. Проверить, что образ точки a будет простой граничной точкой для образа области G.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

18. Формула Стокса для областей с гладкой границей

После того как классическая или обобщенная формула Стокса доказана для кубов, ее легко доказать для областей в $\mathbb{R}^n$ (и для ориентированных гладких многообразий) с гладкой границей. Для этого достаточно воспользоваться разбиением единицы. Напомним, как это делается.

Определение. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — компакт, и U_α — любое покрытие этого компакта открытыми множествами. *Разбиением единицы*, согласованным с покрытием U_α, называется конечное множество гладких функций φ_i, $i = 1, \ldots, N$, определенных в некоторой окрестности компакта X, таких, что

1) ограничение функции $\varphi_1 + \ldots + \varphi_N$ на X тождественно равно единице;

2) для каждой функции φ_i существует открытое множество U_{α_i} из покрытия такое, что функция φ_i тождественно равна нулю на дополнении к множеству U_{α_i}

Задача 18.1. Для всякого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ и всякого его покрытия U_α существует согласованное с этим покрытием разбиение единицы $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, в котором φ_i — бесконечно гладкие функции.

Указание. 1) Существует неотрицательная бесконечно гладкая функция в $\mathbb{R}^n$, равная единице в круге радиуса R_0 и равная нулю вне круга радиуса R_1 с тем же центром, где $R_1 > R_0$;

2) используя функцию из 1) и компактность X, построить конечный набор функций $g_1, \ldots, g_N$, каждая из которых равна нулю вне некоторого множества U_{α_i}, но сумма $F = g_1 + \ldots + g_N$ строго больше нуля на X;

3) функции $\varphi_i = g_i / F$ дают искомое разбиение единицы.

Локальной картой около точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется окрестность U_a точки a вместе с диффеоморфизмом $\boldsymbol{x}\colon U_a \to V$ на область V в $\mathbb{R}^n$ таким, что $\boldsymbol{x}(a) = 0$. Компоненты $x_1, \ldots, x_n$ вектор-функции $\boldsymbol{x}$ называются *локальными координатами* в карте U_a.

Определение. Граница ∂U области U в $\mathbb{R}^n$ называется *гладкой* в окрестности точки $a \in \partial U$, если существует локальная карта в окрестности этой точки такая, что в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ замыкание области задается неравенством $x_n \geqslant 0$.

Задача 18.2. Пусть замыкание области U в $\mathbb{R}^n$ задано неравенством $f \geqslant 0$, где f — гладкая функция, дифференциал $\mathrm{d}f$ которой не обращается в нуль ни в одной точке поверхности $f = 0$. Доказать, что область U имеет гладкую границу.

Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Фиксируем локальные координаты U_a около каждой точки a замыкания области U. Для граничных точек $a \in \partial U$ мы предполагаем, что локальная система координат около точки a удовлетворяет условиям предыдущего определения. Рассмотрим стандартные кубы Δ^ε и $\tilde{\Delta}^\varepsilon$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенные неравенствами $-\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant \varepsilon, \ldots, -\varepsilon \leqslant x_n \leqslant \varepsilon$ и

$-\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant \varepsilon, \dots, -\varepsilon \leqslant x_{n-1} \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant x_n \leqslant 2\varepsilon$. *Подходящим* кубом Δ_a^ε для точки a в локальной карте U_a с координатами $\boldsymbol{x}\colon U_a \to \mathbb{R}^n$ будем называть множества $\boldsymbol{x}^{-1}(\Delta_a^\varepsilon)$, если a — внутренняя точка области U_a, и $\boldsymbol{x}^{-1}(\tilde{\Delta}_a^\varepsilon)$, если a — граничная точка области U_a. При этом предполагается, что образ $\boldsymbol{x}(U_a)$ карты U_a целиком содержит соответствующий куб Δ_a^ε или $\tilde{\Delta}_a^\varepsilon$.

Задача 18.3. Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ — точка в этой области и Δ_a^ε — подходящий куб около точки a. Пусть ω — $(n-1)$-форма в $\mathbb{R}^n$, равная нулю вне куба Δ_a^ε и удовлетворяющая условиям обобщенной формулы Стокса (т.е. коэффициенты формы ω имеют дифференциалы, а форма $\mathrm{d}\omega$ непрерывна). Тогда $\int_U \mathrm{d}\omega = \int_{\partial U} \omega = 0$.

Задача 18.4. Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $a \in \partial U$ — точка границы этой области и $\tilde{\Delta}_a^\varepsilon$ — подходящий куб около точки a. Пусть ω — $(n-1)$-форма в $\mathbb{R}^n$, равная нулю вне куба $\tilde{\Delta}_a^\varepsilon$ и удовлетворяющая условиям обобщенной формулы Стокса. Тогда $\int_{\partial U} \omega = \int_U \mathrm{d}\omega$.

Задача 18.5. Пусть ω — форма, удовлетворяющая условиям обобщенной формулы Стокса в замыкании ограниченной области U с гладкой границей ∂U, и пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ — некоторое разбиение единицы на большом шаре B, содержащем замыкание области $\overline{U}$ в своей внутренности, такое, что для каждой формы $\omega_i = \varphi_i \omega$ справедлива формула Стокса $\int_{\partial U} \omega_i = \int_U \mathrm{d}\omega_i$. Тогда $\int_{\partial U} \omega = \int_U \mathrm{d}\omega$.

Задача 18.6. Доказать обобщенную формулу Стокса для произвольной компактной области с гладкой границей.

Указание. Достаточно подобрать разбиение единицы на большом шаре B, для которого выполняются условия задачи 18.5. Для этого достаточно взять разбиение единицы, согласованное с покрытием шара B следующими открытыми множествами V_p. Для всякой точки $p \in B$ определим V_p следующим образом:

1) если p не лежит в замыкании области U, то в качестве V_p можно взять любое открытое множество, для которого $p \in V_p$, $V_p \cap \overline{U} = \varnothing$;

2) если p принадлежит замыканию области $\overline{U}$, сначала фиксируем локальную карту $x_1, \dots, x_n$ около точки p и подходящий куб Δ_p^ε для точки p и этой карты. После этого в качестве V_p достаточно взять любое открытое множество, для которого: 1) $p \in V_p$, 2) $V_p \subset B$, 3) $V_p \cap \overline{U} \subset \Delta_p^\varepsilon$.

Проверить, что выполнимость условий задачи 18.5 для разбиения единицы, согласованного с покрытием V_p, вытекает из задач 18.3 и 18.4.

Оглавление

О НЕЗАВИСИМОМ МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НМУ — негосударственное высшее учебное заведение для подготовки профессиональных математиков.

Занятия в НМУ проводятся в вечернее время (обычно с 17.30). Это связано с тем, что многие наши студенты совмещают обучение в НМУ с занятиями в другом вузе (как правило — но не исключительно! — на мехмате МГУ). Наши занятия по физике и математике может посещать любой желающий (не обязательно студент или аспирант НМУ).

Обучение в НМУ бесплатное. Студентам выплачивается стипендия.

Наш адрес:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11.
Телефон:
(095) 241-4086.
Факс:
(095) 291-6501.
E-mail:
ium@mccme.ru

Подробности см. на сайте http://ium.mccme.ru/