ГЛАВА IV

Интегральная геометрия и гармонический анализ на группе $G = SL(2,\mathbb{C})$

В главе III были построены интегральная геометрия и гармонический анализ в пространстве Лобачевского, на котором действует группа $G = SL(2,\mathbb{C})$, т. е. группа комплексных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В этой главе аналогичные построения будут проведены на самой группе G. Полученная здесь теория естественно включает в себя и построенную в главе III теорию для пространства Лобачевского. Мы будет рассматривать группу G как однородное пространство группы $G \times G$, и в этом плане ее можно воспринимать просто как гиперболоид $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ в $\mathbb{C}^4$, на котором действует подгруппа линейных преобразований $\mathbb{C}^4$, сохраняющих этот гиперболоид.

§ 1. Геометрия на группе G

1.1. Группа G как однородное пространство.. Мы рассматриваем G как однородное пространство группы $G \times G$, действующей на G левыми и правыми сдвигами:

$$g \mapsto g_1^{-1} g g_2, \quad (g_1, g_2) \in G \times G.$$

Поскольку стационарной подгруппой единичного элемента $e \in G$ является подгруппа $\operatorname{diag}(G \times G) \cong G$, то это однородное пространство изоморфно $G \times G/G$, где $G \subset G \times G$ реализовано как подгруппа элементов (g, g).

Примечание. Однородное пространство G является симметрическим, поскольку его стационарная подгруппа $\operatorname{diag}(G \times G)$ выделяется как подгруппа элементов, инвариантных относительно инволюции

$\theta : (g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1)$. Пространство G не является римановым, но оно является псевдоримановым, т. е. метрика на нем невырождена, но не является положительно определенной. Этот факт важен, поскольку для симметрических пространств интегральную геометрию и гармонический анализ можно строить в более полном объеме, чем для произвольных однородных пространств.

Отметим, что $G \times G$ действует на G неэффективно, причем ядро неэффективности, т. е. подгруппа, оставляющая на месте все элементы из G, состоит из двух элементов (E, E) и $-(E, E)$. Поэтому на G эффективно действует фактор-группа $G \times G / \{\pm(E, E)\}$.

Как уже говорилось, мы будем рассматривать G, отвлекаясь от групповой структуры, как гиперболоид в пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

На G эффективно и транзитивно действует группа линейных преобразований в $\mathbb{C}^3$, сохраняющих квадратичную форму $\alpha\delta - \beta\gamma$, т. е. группа $SO(4, \mathbb{C}^4)$. Рассмотренные выше преобразования, отвечающие элементам из $G \times G$, сохраняют, очевидно, форму $\alpha\delta - \beta\gamma$, и мы получаем вложение $G \times G / \{\pm(E, E)\}$ в $SO(4, \mathbb{C})$. Из соображений размерности (размерности этих групп совпадают) следует, что на самом деле мы имеем изоморфизм:

$$SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm(E, E)\} \cong SO(4, \mathbb{C}).$$

При указанном действии $SO(4, \mathbb{C})$ на G стационарная подгруппа совпадает с $SO(3, \mathbb{C})$ и возникает еще один классический изоморфизм:

$$SO(3, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm E\}.$$

1.2. Плоские сечения гиперболоида G. Мы хотим связать действие группы $G \times G$ на гиперболоиде G с его геометрией, а именно, мы исследуем сечения G гиперплоскостями в $\mathbb{C}^4$ как орбиты тех или иных подгрупп группы $G \times G$.

Гиперплоскости в $\mathbb{C}^4$ удобно задавать уравнениями вида

$$\langle g_0, g \rangle = c, \quad g_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0), \tag{1.1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — поляризация квадратической формы $\alpha\delta - \beta\gamma$.

В подобной записи

$$\frac{1}{2}(\delta_0\alpha - \gamma_0\beta - \beta_0\gamma + \alpha_0\delta) = c.$$

Таким образом, каждая гиперплоскость задается парой $g_0 \in \mathbb{C}^4 \setminus 0$ и $c \in \mathbb{C}$, определенной с точностью до общего множителя. На множестве гиперплоскостей естественно действует группа $G \times G$: элемент

$(g_1, g_2) \in G \times G$ переводит гиперплоскость $\langle g_0, g \rangle = c$ в гиперплоскость $\langle g_1^{-1} g_0 g_2, g \rangle = c$.

Опишем сначала орбиты группы $G \times G$ в множестве гиперплоскостей. В общем положении, когда $\langle g_0, g_0 \rangle \neq 0$, можно нормировать g_0 условием $\langle g_0, g_0 \rangle = 1$. Очевидно, что при любом фиксированном c гиперплоскости (1.1), где $\langle g_0, g_0 \rangle = 1$, образуют орбиту группы $G \times G$, изоморфную исходному однородному пространству G. Оставшееся подмножество гиперплоскостей (случай, когда $\langle g_0, g_0 \rangle = 0$) распадается на две орбиты группы $G \times G$ — семейство гиперплоскостей

$$\langle g_0, g \rangle = 0, \quad \langle g_0, g_0 \rangle = 0, \tag{1.2}$$

касательных к асимптотическому конусу K: $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, и семейство гиперплоскостей

$$\langle g_0, g \rangle = 1, \quad \langle g_0, g_0 \rangle = 0, \tag{1.3}$$

им параллельных. Очевидно, что вторая орбита изоморфна как однородное пространство группы $G \times G$ асимптотическому конусу K с выколотой вершиной; ее стационарная подгруппа состоит из пар $(\delta z_1, \delta^{-1} z_2)$, где z_1, z_2 — матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и δ — диагональная матрица. Первая же орбита изоморфна множеству прямолинейных образующих асимптотического конуса K и имеет в качестве стационарной подгруппу всех пар $(\delta_1 z_1, \delta_2 z_2)$.

Итак, множество плоских сечений гиперболоида G распадается на следующие орбиты группы $G \times G$: однопараметрическое семейство орбит, изоморфных однородному пространству G, орбиту, изоморфную асимптотическому конусу K с выколотой вершиной, и орбиту, изоморфную множеству прямолинейных образующих конуса K.

Исследуем теперь структуру плоских сечений гиперболоида G. Из соображений инвариантности достаточно рассмотреть по одному представителю на каждой орбите группы $G \times G$ в множестве плоских сечений. В качестве представителей на орбитах общего положения возьмем сечения G гиперплоскостям вида:

$$\alpha + \delta = c. \tag{1.4}$$

Если $c \neq \pm 2$, то гиперплоскость (1.4) пересекает G по двумерному гиперболоиду. В особом случае, когда $c = \pm 2$, гиперплоскость (1.4) касается G и ее пересечение с G есть конус с вершиной в точке касания.

Сечения G гиперплоскостями (1.4) имеют простой групповой смысл. Именно, так как $\alpha + \delta = \operatorname{Tr} g$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, то сечение G гиперплоскостью $\alpha + \delta = c$ есть класс сопряженных элементов; в случае $c \neq \pm 2$

это класс сопряженных элементов общего положения, а при $c = \pm 2$ — класс сопряженных элементов жорданова типа (вершина конуса предполагается отброшенной).

В качестве представителей на двух особых орбитах группы $G \times G$ можно взять сечения G гиперплоскостями $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ соответственно. Очевидно, что первое из этих сечений есть цилиндр, а второе — параболоид. Итак, есть четыре типа сечений G гиперплоскостями в $\mathbb{C}^4$ — гиперболоиды, конусы, параболоиды и цилиндры. Разумеется, сечения параболического и цилиндрического типов получаются предельным переходом из сечений гиперболического и конического типов.

На каждом плоском сечении гиперболоида G можно ввести структуру однородного пространства. Рассмотрим сначала сечения плоскостями $\alpha + \delta = c$. В каждом из них транзитивно действует подгруппа $\operatorname{diag}(G \times G) \cong G$ (в случае конического сечения его вершина предполагается отброшенной); таким образом, все эти сечения, а значит, и все их сдвиги, являются однородными пространствами группы G. Легко убедиться, что для сечений гиперболического типа стационарной подгруппой является группа D диагональных матриц, а для сечений конического типа — группа $\pm Z$, где Z — подгруппа унипотентных матриц $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим сечения G гиперплоскостями $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$. На первом из них транзитивно и свободно действует подгруппа $Z \times Z$; таким образом, это сечение наделено структурой однородного пространства $Z \times Z/\{E\}$. Группа $Z \times Z$ действует, но уже не транзитивно, и на втором сечении. Нетрудно убедиться, что транзитивно действует на этом сечении подгруппа $U \supset Z \times Z$ всех пар $(\delta z_1, \delta^{-1} z_2)$, где $\delta \in D$, $z_1, z_2 \in Z$, а стационарной подгруппой является подгруппа $\operatorname{diag}(\pm Z, \pm Z)$ пар $(\pm z, \pm z)$, $z \in Z$, изоморфная $\pm Z$.

Итак, сечения G гиперболического, конического, параболического и цилиндрического типа наделены соответственно структурами однородных пространств G/D, $G/\pm Z$, $Z \times Z/\{E\}$ и $U/\operatorname{diag}(\pm Z, \pm Z)$.

1.3. Многообразие орисфер. Рассмотрим множество прямолинейных образующих гиперболоида G. Эти прямые будут играть в нашей теории ту же роль, что и орисферы в пространстве Лобачевского, и по аналогии с пространством Лобачевского мы будем называть их орисферами. Отметим, что орисферы являются прямолинейными образующими всех плоских сечений гиперболоида G.

На множестве орисфер H естественно действует группа $G \times G$, причем это действие транзитивно (для доказательства достаточно рассмотреть множество орисфер, проходящих через произвольную фиксированную точку $g \in G$, и убедиться, что на этом множестве транзитивно действует стационарная подгруппа этой точки).

Орисферы на G имеют простую групповую интерпретацию. Именно, одной из орисфер является подгруппа $Z \subset G$ матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку все орисферы получаются ее сдвигами, то множество орисфер H совпадает с множеством двусторонних классов смежности $g_1^{-1} Z g_2$. Отсюда следует, что

$$H \cong (G \times G)/V,$$

где V — подгруппа, сохраняющая орисферу Z. Легко убедиться, что элементами V являются всевозможные пары $(\delta z_1, \delta z_2)$, где $z_1, z_2 \in Z$, $\delta \in D$. Так как очевидно, $\dim V = 3$, то $\dim H = 3$, т. е. пространство орисфер имеет ту же размерность, что и G.

Введем на H систему координат. Для этого сначала рассмотрим множество H_0 прямолинейных образующих асимптотического конуса K: $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. На K есть два однопараметрических семейства двумерных плоскостей — семейство плоскостей

$$\begin{aligned} \xi_1\alpha + \xi_2\gamma &= 0, \\ \xi_1\beta + \xi_2\delta &= 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

и семейство плоскостей

$$\begin{aligned} \eta_1\delta - \eta_2\gamma &= 0, \\ -\eta_1\beta + \eta_2\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В матричной записи, семейство плоскостей $\xi g = 0$ и семейство плоскостей $g\eta^\perp = 0$, где $\eta^\perp = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$.

Любая прямолинейная образующая конуса K получается как пересечение пары плоскостей (1.5), (1.6) и задается тем самым парой векторов $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$, определенных каждый с точностью до множителя; обозначим ее через $l(\xi, \eta)$.

Многообразие орисфер H образует естественное расслоение над H_0, где слой над $l(\xi, \eta)$ — множество всех орисфер, параллельных $l(\xi, \eta)$. Покажем, что любая орисфера, параллельная $l(\xi, \eta)$, задается в $\mathbb{C}^4$ системой уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_1'\alpha + \xi_2'\gamma &= \eta_1', \\ \xi_1'\beta + \xi_2'\delta &= \eta_2', \\ \eta_1'\delta - \eta_2'\gamma &= \xi_1', \\ -\eta_1'\beta + \eta_2'\alpha &= \xi_2', \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\xi', \eta' \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ — векторы, пропорциональные ξ, η соответственно.

В самом деле, рассмотрим первые два и последние два уравнения системы (1.7). На G их можно представить в виде $\xi' g = \eta'$, $\eta' g^{-1} = \xi'$; значит, на G эти две системы уравнений эквивалентны. Отсюда следует, что система (1.7) задает прямую в $\mathbb{C}^4$ и эта прямая принадлежит G. Очевидно далее, что эта прямая параллельна $l(\xi, \eta)$.

Замечание. Орисферы, параллельные прямой $l(\xi, \eta)$, являются прямолинейными образующими цилиндра, который получается в сечении G гиперплоскостью, касающейся асимптотического конуса K вдоль прямой $l(\xi, \eta)$. Уравнение этой гиперплоскости:

$$\eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta) = 0, \tag{1.8}$$

или, в матричной записи, $\xi g \eta^\perp = 0$.

Итак, любая орисфера на G может быть задана системой уравнений $\xi g = \eta$, т. е.

$$\begin{aligned} \xi_1\alpha + \xi_2\gamma &= \eta_1, \\ \xi_1\beta + \xi_2\delta &= \eta_2, \end{aligned}$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$, или эквивалентной ей системой $\eta g^{-1} = \xi$, т. е.

$$\begin{aligned} \eta_1\delta - \eta_2\gamma &= \xi_1, \\ -\eta_1\beta + \eta_2\alpha &= \xi_2. \end{aligned}$$

Обозначим эту орисферу через $h(\xi, \eta)$ и примем ξ, η в качестве параметров на многообразии орисфер H. Так как, очевидно, $h(\lambda\xi, \lambda\eta) = h(\xi, \eta)$ для любого $\lambda \neq 0$, то естественно называть ξ, η однородными координатами на H.

В однородных координатах ξ, η действие элементов $(g_1, g_2) \in G \times G$ на H задается так:

$$h(\xi, \eta) \mapsto h(\xi g_1, \eta g_2).$$

Отметим, что орисфера Z имеет однородные координаты $\xi_0 = \eta_0 = (0, 1)$; следовательно, любая орисфера $g_1^{-1} Z g_2$ имеет однородные координаты $\xi = \xi_0 g_1$, $\eta = \xi_0 g_2$.

Исключительно важно для дальнейшего, что на многообразии орисфер H, кроме действия группы $G \times G$, определено действие группы $\mathbb{C}^\times$; каждому $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ отвечает преобразование

$$h(\xi, \eta) \mapsto h(\xi, \lambda\eta),$$

которое переводит каждую орисферу в орисферу, ей параллельную. Назовем эти преобразования преобразованиями левого сдвига на H. Очевидно, что они перестановочны с действием группы $G \times G$.

Опишем теперь в однородных координатах ξ, η семейства прямолинейных образующих (орисфер) на плоских сечениях Γ гиперболоида G.

В силу сказанного выше, любое цилиндрическое сечение Γ является пересечением G с гиперплоскостями вида (1.8) и орисферы на Γ суть $h(\xi, \lambda\eta)$, где λ пробегает $\mathbb{C}^{\times}$.

Рассмотрим теперь плоские сечения Γ других типов. Для каждого из них уравнение секущей гиперплоскости можно привести к виду

$$2\langle g_0, g\rangle = 1 + \langle g_0, g_0\rangle. \tag{1.9}$$

Следовательно, так как $\langle g, g\rangle = 1$ на G, само сечение Γ задается на G уравнением

$$\langle g - g_0, g - g_0\rangle = 0,$$

т. е.

$$(\alpha - \alpha_0)(\delta - \delta_0) - (\beta - \beta_0)(\gamma - \gamma_0) = 0. \tag{1.10}$$

Это сечение является конусом, параболоидом или гиперболоидом, если соответственно $\det g_0 = 1$, $\det g_0 = 0$, или $\det g_0 \neq 0, 1$.

Из (1.10) непосредственно получаем уравнения прямолинейных образующих (орисфер) на Γ: орисферы одного семейства задаются уравнениями:

$$\xi_1(\alpha - \alpha_0) + \xi_2(\gamma - \gamma_0) = 0,$$
$$\xi_1(\beta - \beta_0) + \xi_2(\delta - \delta_0) = 0,$$

т. е. $\xi g = \xi g_0$; орисферы другого семейства — уравнениями

$$\eta_1(\delta - \delta_0) - \eta_2(\gamma - \gamma_0) = 0,$$
$$-\eta_1(\beta - \beta_0) + \eta_2(\alpha - \alpha_0) = 0,$$

т. е. $\eta g^{-1} = \eta \widehat{g_0}$, где $\widehat{g_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$. Итак, доказано

Предложение 1.1. *Семейства орисфер, лежащих на сечении гиперболоида G гиперплоскостью (1.10), суть семейство орисфер $h(\xi, \xi g_0)$ и семейство орисфер $h(\eta\widehat{g_0}, \eta)$, где $\widehat{g_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$, а ξ, η пробегают $\mathbb{C}^2 \setminus 0$.*

Следствие. 1 *При любых фиксированных $g_0 \in G$ и $\lambda \neq 0$ семейства орисфер, лежащих на сечении G гиперплоскостью*

$$2\lambda\langle g_0, g\rangle = 1 + \lambda^2,$$

суть орисферы $h(\xi, \lambda\xi g_0)$ и $h(\xi, \lambda^{-1}\xi g_0)$, где ξ пробегает $\mathbb{C}^2 \setminus 0$.

Следствие. 2 *Семейство орисфер, проходящих через произвольную фиксированную точку $g_0 \in G$ суть орисферы $h(\xi, \xi g_0)$, где ξ пробегает $\mathbb{C}^2 \setminus 0$.*

1.4. Вложение многообразия орисфер H в проективное пространство. Сопоставив каждой орисфере $h(\xi,\eta)$ точку проективного пространства $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)$, мы получаем вложение

$$H \hookrightarrow \mathbb{CP}^3.$$

Образ H при этом вложении есть все пространство $\mathbb{CP}^3$, из которого удалена пара непересекающихся прямых — прямая $\xi = 0$ и прямая $\eta = 0$. Таким образом, $\mathbb{CP}^3$ является естественной компактификацией многообразия орисфер H.

Бесконечно удаленные точки на H имеют следующий простой смысл. Множество бесконечно удаленных точек на G есть двумерный гиперболоид, обладающий двумя семействами прямолинейных образующих. Этим прямолинейным образующим отвечают соответственно точки прямых $\xi = 0$ и $\eta = 0$ в $\mathbb{CP}^3$, т.е. бесконечно удаленные точки на H.

Замечание. Укажем, как изменится эта конструкция, если от группы $G = SL(2,\mathbb{C})$ перейти к ее фактор-группе по центру $PSL(2,\mathbb{C}) = G/\{\pm E\}$, т.е. считать отождествленными диаметрально противоположные точки гиперболоида $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Многообразие $\widetilde{G} = G/\{\pm E\}$ можно вложить в проективное пространство $\mathbb{CP}^3$, поставив в соответствие каждой матрице $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ точку из $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Образом $\widetilde{G}$ при этом вложении является все проективное пространство $\mathbb{CP}^3$, за исключением квадрики Γ: $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, точки которой можно трактовать как бесконечно удаленные точки на $\widetilde{G}$. Легко убедиться, что орисферы на $\widetilde{G}$ переходят при этом вложении во всевозможные прямые в $\mathbb{CP}^3$, касающиеся квадрики Γ. Уравнения этих прямых можно представить в следующей форме:

$$\frac{\xi_1\alpha + \xi_2\gamma}{\eta_1} = \frac{\xi_1\beta + \xi_2\delta}{\eta_2} = \frac{\eta_1\delta - \eta_2\gamma}{\xi_1} = \frac{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}{\xi_2}, \tag{1.11}$$

где $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ (ранг этой системы равен 2).

Компактификация этого многообразия прямых получается присоединением всех прямолинейных образующих квадрики Γ; последние задаются уравнениями (1.11), где либо $\xi = 0$, либо $\eta = 0$ (два семейства образующих). Полученное в результате многообразие изоморфно проективному пространству $\mathbb{CP}^3$: каждой прямой (1.11) сопоставляется точка в $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)$.

1.5. Комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$, ассоциированный с многообразием орисфер. Удобно перейти от многообразия прямых (орисфер) на гиперболоиде G к многообразию прямых в $\mathbb{C}^3$. Для этого спроектируем гиперболоид $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ на координатное подпространство $\mathbb{C}^3$ с координатами (α, β, δ). Образом гиперболоида будет все пространство $\mathbb{C}^3$, за исключением точек $(\alpha, 0, \delta)$, где $\alpha\delta \neq 1$.

При проектировании гиперболоида G на $\mathbb{C}^3$ его прямолинейные образующие, не параллельные гиперплоскости $\beta = 0$, переходят в прямые, пересекающие гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$ и не лежащие в плоскости $\beta = 0$. Таким образом, мы ассоциировали с многообразием орисфер на гиперболоиде G трехмерное многообразие K прямых в $\mathbb{C}^3$. В дифференциальной геометрии трехмерные многообразия прямых в $\mathbb{C}^3$ обычно называют комплексами прямых.

Замечание. Над точкой $(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{C}^3$ при $\beta \neq 0$ лежит в точности одна точка гиперболоида, а при $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$ — целая прямая. Таким образом, гиперболоид получается вклеиванием с помощью σ-процесса прямых вместо точек гиперболы $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$. Прямые нашего комплекса это те прямые, которые поднимаются на гиперболоид в результате этого σ-процесса.

1.6. Многообразие параболоидов. Рассмотрим теперь параболоиды в G, т.е. двумерные поверхности, высекаемые в G изотропными гиперплоскостями в $\mathbb{C}^4$, не проходящими через 0:

$$\langle g_0, g \rangle = p, \quad g \in G,$$

где g_0 — ненулевая точка асимптотического конуса

$$\langle g_0, g_0 \rangle \equiv \det(g_0) = 0,$$

а $p \neq 0$ — любое ненулевое число.

Введем в пространстве H^p всех параболоидов координаты, аналогичные однородным координатам в пространстве орисфер H. Положим $\zeta^\perp = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ -\zeta_1 \end{pmatrix}$ для любого 2-вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, так что $\xi\zeta^\perp = -\zeta\xi^\perp = \xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1$ — антисимметричная билинейная форма на $\mathbb{C}^2$. Очевидно, эта форма инвариантна относительно группы G, т.е.

$$(\xi g)(\eta g)^\perp = \xi\eta^\perp \quad \text{для любого } g \in G.$$

Поставим в соответствие каждой паре векторов $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ и числу $p \neq 0$ изотропную гиперплоскость в 4-мерном пространстве матриц g, заданную уравнением

$$\xi g \zeta^\perp = p, \quad p \neq 0, \tag{1.12}$$

или, в подробной записи, уравнением

$$(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma)\zeta_2 - (\xi_1\beta + \xi_2\delta)\zeta_1 = p, \tag{1.13}$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$. Легко убедиться, что к виду (1.12) приводятся уравнения изотропных гиперплоскостей, не проходящих через 0, и только они.

Обозначим параболоид в G, заданный уравнением (1.12), через $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$. Очевидно,

$$\widetilde{h}(\lambda\xi,\ \mu\zeta,\ \lambda\mu p)=\widetilde{h}(\xi,\zeta,p),\quad \text{для любых чисел}\ \ \lambda,\mu\neq 0. \tag{1.14}$$

Замечание. В уравнении (1.13) можно было бы предполагать $p=1$ и писать $\widetilde{h}(\xi,\zeta)$ вместо $\widetilde{h}(\xi,\zeta,1)$. Тогда $\widetilde{h}(\lambda\xi,\lambda^{-1}\zeta)=\widetilde{h}(\xi,\zeta)$ для любого $\lambda\neq 0$. Однако нам удобнее этого не делать.

В координатах ξ,ζ,p действие элементов $(g_1,g_2)\in G\times G$ на H^p задается так:

$$\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)\mapsto\widetilde{h}(\xi g_1,\zeta g_2,p).$$

Например, параболоид ZsZ, где $s=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, имеет координаты $\xi_0=\zeta_0=(0,1)$, $p_0=1$. Следовательно, параболоид $g_1^{-1}Z\,s\,Z\,g_2$ имеет координаты $(\xi_0 g_1,\zeta_0 g_2,1)$.

Исключительно важно, что в пространстве параболоидов H^p, как и в пространстве орисфер H, определено действие группы $\mathbb{C}^\times$, перестановочное с действием группы $G\times G$: каждому $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ отвечает преобразование

$$\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)\mapsto\widetilde{h}(\xi,\zeta,\lambda p),$$

которое переводит каждое плоское параболическое сечение в сечение ему параллельное.

На каждом параболоиде $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$ имеются два однопараметрических семейства орисфер — орисферы, параллельные соответственно плоскостям $\xi g=0$ и $g\zeta^\perp=0$, лежащим на асимптотическом конусе в $\mathbb{C}^4$.

Опишем эти семейства плоскостей в однородных координатах на многообразии орисфер H. Первое семейство состоит из орисфер $h(\xi,\eta)$, где η удовлетворяет соотношению $\eta\zeta^\perp=p$. Второе состоит из орисфер $h(\eta,\zeta)$, где η удовлетворяет соотношению $\xi\eta^\perp=p$.

В самом деле, орисфера $h(\xi,\eta)$ есть множество матриц $g\in G$, удовлетворяющих соотношению $\xi g=\eta$, и условие, что она принадлежит параболоиду $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, эквивалентно равенству $\eta\zeta^\perp=p$. Орисфера $h(\eta,\zeta)$ есть множество матриц $g\in G$, удовлетворяющих соотношению $\eta g=\zeta$, или, что эквивалентно, соотношению $\eta^\perp=g\zeta^\perp$. Поэтому условие, что она принадлежит параболоиду $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, эквивалентно равенству $\xi\eta^\perp=p$.

Отметим, что через каждую точку параболоида проходит в точности одна орисфера каждого из этих семейств.

Обратно, через каждую орисферу $h(\xi,\eta)$ проходят два однопараметрических семейства параболоидов — семейство параболоидов $\widetilde{h}(\xi,\zeta,1)$, где $\eta\zeta^{\perp}=1$, и семейство параболоидов $\widetilde{h}(\zeta,\eta,1)$, где $\zeta\xi^{\perp}=1$.

Обсудим теперь аналогию между параболоидами и орисферами. Подобно орисферам, каждый параболоид является орбитой подгруппы $Z\times Z$ группы $G\times G$ или подгруппы ей сопряженной. Обратно, любая орбита в G подгруппы $Z\times Z$ или подгруппы ей сопряженной есть либо орисфера, либо параболоид. В самом деле, пусть $L\subset G$ — произвольная орбита подгруппы $Z\times Z$, т.е. множество матриц вида $z_1 g^0 z_2$, где $g^0=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_0 & \delta_0\end{pmatrix}$ — произвольный фиксированный элемент группы G, а z_1 и z_2 пробегают подгруппу Z. Очевидно, если $\gamma_0=0$, то L является орисферой. Если же $\gamma_0\neq 0$, то L есть сечение G гиперплоскостью $\gamma=\gamma_0$, т. е. параболоид.

Итак, многообразие орбит подгруппы $Z\times Z$ в $G\times G$ и подгрупп ей сопряженных является объединением двух однородных пространств группы $G\times G$ — пространства орисфер H и пространства параболоидов H^p.

Сравним между собой многообразие орисфер H и многообразие параболоидов H^p. Оба они наделены структурами расслоений

$$H\to H^c,\quad H^p\to H^c$$

со слоем $\mathbb{C}^{\times}$ над многообразием H^c цилиндрических сечений. Именно, отображение $H\to H^c$ относит каждой орисфере проходящую через нее цилиндрическую поверхность; каждый слой расслоения состоит из параллельных между собой орисфер. Отображение $H^p\to H^c$ относит каждому параболическому сечению параллельное ему цилиндрическое сечение; каждый слой расслоения состоит из параллельных между собой параболических сечений. В координатной форме: каждой орисфере $h(\xi,\eta)$ и каждому параболоиду $\widetilde{h}(\xi,\eta,p)$ ставится в соответствие цилиндр, заданный уравнением $\xi g\eta^{\perp}=0$.

Группа $G\times G$ переставляет слои каждого из этих расслоений, а группа $\mathbb{C}^{\times}$ действует в слоях.

Отметим, что H и H^p, рассматриваемые как однородные пространства группы $G\times G$, неизоморфны. Действительно, их стационарными подгруппами в $G\times G$ являются соответственно группа V пар $(\delta z_1,\delta z_2)$ и группа U пар $(\delta^{-1}z_1,\delta z_2)$, где $\delta\in D$ и $z_1,z_2\in Z$. Эти подгруппы не сопряжены в $G\times G$ и даже не изоморфны.

Замечание. Пространство H^c цилиндрических сечений естественно изоморфно произведению $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ двух комплексных проективных прямых, а расслоения H и H^p над H^c со слоем $\mathbb{C}\setminus 0$ совпадают, соответственно, с известными из алгебраической геометрии линейными расслоениями $\mathcal{O}(-1,+1)$ и $\mathcal{O}(-1,-1)$.

§ 2. Интегральная геометрия на группе $G = SL(2,\mathbb{C})$

2.1. Интегральные преобразования, связанные с пространством H орисфер и комплексом прямых K. Свяжем с многообразием орисфер H интегральное преобразование, относящее финитным C^∞-функциям на G их интегралы по орисферам.

Каждая орисфера $h(\xi,\eta)$ есть двусторонний класс смежности $g_1^{-1}Zg_2$, где Z — подгруппа матриц $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $g_1, g_2 \in G$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условию

$$\xi_0 g_1 = \xi, \quad \xi_0 g_2 = \eta, \text{ где } \xi_0 = (0,1). \tag{2.1}$$

Определение. Определим интеграл по орисфере $h(\xi,\eta)$ следующим равенством:

$$\mathcal{R}f(\xi,\eta) = \frac{i}{2}\int f(g_1^{-1}zg_2)\,dt\,d\bar t, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $g_1, g_2 \in G$ — любые матрицы, удовлетворяющие соотношению (2.1). Назовем $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$ *орисферическим преобразованием* функции f.

Формулу (2.2) можно переписать так:

$$\mathcal{R}f(\xi,\eta) = \int\limits_G f(g)\,\delta(\xi g - \eta)\,d\mu(g), \tag{2.3}$$

где $\delta(\ .\ )$ — дельта-функция на $\mathbb{C}^2$, а $d\mu(g)$ — инвариантная мера на группе G; эта мера имеет в координатах α,β,δ на G следующий вид:

$$d\mu(g) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 |\beta|^{-2}\,d\alpha\,d\overline{\alpha}\,d\beta\,d\overline{\beta}\,d\delta\,d\overline{\delta}.$$

Равенство интегралов (2.2) и (2.3) устанавливается простой проверкой.

Из определения следует, что функция $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$ удовлетворяет условию однородности:

$$\mathcal{R}f(\lambda\xi,\lambda\eta) = |\lambda|^{-4}\mathcal{R}f(\xi,\eta) \text{ для любого } \lambda \neq 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$ зависит не только от орисферы $h(\xi,\eta)$, но и от однородных координат ξ,η, которыми эта орисфера задается; мы можем трактовать $\mathcal{R} f$ как сечение одномерного векторного расслоения над многообразием орисфер H.

Из (2.2) следует также, что оператор $\mathcal{R}$ перестановочен с действием группы $G \times G$, т.е. если $f_1(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$, то $\mathcal{R} f_1(\xi, \eta) = \mathcal{R} f(\xi g_1, \eta g_2)$.

Можно, введя на H аффинные координаты, определить орисферическое преобразование не как сечение векторного расслоения над H, а как функцию на H с числовыми значениями. Удобно ввести на H следующие аффинные координаты:

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2},\ x_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2},\ \lambda = \frac{\eta_2}{\xi_2}. \tag{2.5}$$

В этих координатах любая орисфера $h(\xi, \eta)$, где $\xi_2 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$, задается уравнениями

$$\alpha = x_2\beta + \lambda^{-1},\ \delta = -x_1\beta + \lambda.$$

Замечание. Условие $\xi_2 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$ эквивалентно тому, что орисфера $h(\xi, \eta)$ не параллельна гиперплоскости $\beta = 0$ в $\mathbb{C}^4$.

Приняв α, β, δ в качестве локальных координат на G, можно определить для любой функции $f(g) = f(\alpha, \beta, \delta)$ ее орисферическое преобразование следующим равенством:

$$\mathcal{R}_0 f(x_1, x_2, \lambda) = \frac{i}{2} \int f(x_2\beta + \lambda^{-1}, \beta, -x_1\beta + \lambda)\, d\beta\, d\overline{\beta}. \tag{2.6}$$

Геометрически переход от $\mathcal{R}$ к $\mathcal{R}_0$ означает, что вместо интегрального преобразования, связанного с многообразием орисфер H, мы рассматриваем интегральное преобразование, связанное с ассоциированным с H комплексом прямых в $\mathbb{C}^3$, т.е. преобразование, относящее функциям на $\mathbb{C}^3$ их интегралы по прямым в $\mathbb{C}^3$, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$.

Установим соотношение между функциями $\mathcal{R} f$ и $\mathcal{R}_0 f$. В равенстве (2.2) можно принять $g_1 = \begin{pmatrix} \xi_2^{-1} & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} \eta_2^{-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$; тогда из равенства $g = g_1^{-1} z g_2$, где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, следует:

$$\alpha = \eta_1\xi_2 t + \frac{\xi_2}{\eta_2},\ \beta = \xi_2\eta_2 t,\ \delta = -\xi_1\eta_2 t + \frac{\eta_2}{\xi_2}.$$

В результате выражение (2.2) для $\mathcal{R} f$ приводится к следующему виду:

$$\mathcal{R} f(\xi, \eta) = |\xi_2\eta_2|^{-2} \frac{i}{2} \int f(x_2\beta + \lambda^{-1}, \beta, -x_1\beta + \lambda)\, d\beta\, d\overline{\beta}, \tag{2.7}$$

где x_1, x_2, λ связаны с ξ, η соотношением (2.5). Сравнивая это выражение с выражением (2.6) для $\mathcal{R}_0 f$, получаем искомые соотношения между $\mathcal{R} f$ и $\mathcal{R}_0 f$:

$$\mathcal{R} f(\xi, \eta) = |\xi_2 \eta_2|^{-2} \mathcal{R}_0 f\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{\eta_2}{\xi_2}\right), \tag{2.8}$$

$$\mathcal{R}_0 f(x_1, x_2, \lambda) = |\lambda|^2 \mathcal{R} f(x_1, 1, \lambda x_2, \lambda). \tag{2.9}$$

2.2. Соотношения симметрии для орисферического преобразования. Функции $\varphi = \mathcal{R} f$ удовлетворяют дополнительным соотношениям симметрии, структура которых такова. Пусть Γ — произвольное сечение гиперболоида G гиперплоскостью в $\mathbb{C}^4$. Так как Γ — квадратичная поверхность, то в общем положении на Γ имеется два семейства прямолинейных образующих (орисфер). Соотношение симметрии состоит в том, что интегралы функции $\varphi = \mathcal{R} f$ по этим семействам орисфер (взятые по подходящей мере) совпадают, поскольку оба они равны интегралу исходной функции f по поверхности Γ. Запишем эти соотношения в явной форме.

Фиксируем произвольные $g_0 \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ и рассмотрим два семейства орисфер $h(\xi, \lambda\xi g_0)$ и $h(\lambda\eta g_0^{-1}, \eta)$. В п. 1.3 было показано, что эти орисферы являются прямолинейными образующими поверхности $\Gamma \subset G$, которая получается в сечении G гиперплоскостью

$$2\lambda\langle g_0, g\rangle = 1 + \lambda^2.$$

Эта поверхность есть гиперболоид при $\lambda \neq \pm 1$ и конус при $\lambda = \pm 1$.

Предложение 2.1. *Для любых $g_0 \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ функция $\varphi = \mathcal{R} f$ удовлетворяет следующему соотношению симметрии*:

$$\int\limits_{\gamma_\xi} \varphi(\xi, \lambda\xi g_0)\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} = \int\limits_{\gamma_\eta} \varphi(\lambda\eta g_0^{-1}, \eta)\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}. \tag{2.10}$$

Здесь $\omega(\xi) = \xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1$, а γ_ξ, γ_η — произвольные поверхности в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающие по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0; ввиду условия однородности (2.4) для φ от выбора γ_ξ, γ_η интегралы не зависят.

Для доказательства достаточно подставить в каждый из интегралов (2.10) выражение (2.3) функции $\mathcal{R} f$ через функцию f. Элементарными преобразованиями оба этих интеграла приводятся к одному и тому же интегралу

$$\int\limits_G f(g)\,\delta(-2\lambda\langle g_0, g\rangle + 1 + \lambda^2)\, d\mu(g) = \int\limits_G f(g)\,\delta(\langle g - \lambda g_0, g - \lambda g_0\rangle)\, d\mu(g).$$

Отметим, что соотношение (2.10) существенно только при $\lambda \neq \pm 1$, т. е. когда сечение Γ не является конусом.

Примечание. Соотношение симметрии (2.10) можно также представить в следующей форме:

$$\int\limits_{\gamma_\xi} \varphi(\xi, \xi g_0)\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} = \int\limits_{\gamma_\eta} \varphi(\eta\widehat{g_0}, \eta)\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)},$$

где $g_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ — любая невырожденная матрица и $\widehat{g_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$. В таком виде оно остается справедливым и для вырожденных матриц $g_0 \neq 0$. Заметим, что для любой вырожденной матрицы g_0 орисферы $h(\xi, \xi g_0)$ и $h(\eta\widetilde{g_0}, \eta)$ являются прямолинейными образующими параболоида, который получается в сечении G гиперплоскостью $2\langle g_0, g\rangle = 1$.

2.3. Формула обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}_0$, связанного с комплексом прямых в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим интегральное преобразование $\mathcal{R}_0$, заданное равенством (2.6); оно относит каждой финитной функции $f(\alpha, \beta, \delta)$ на $\mathbb{C}^3$ ее интегралы по прямым в $\mathbb{C}^3$, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$. Мы хотим восстановить f по функции $\varphi = \mathcal{R}_0 f$. Напомним, что в главе II решалась более общая задача: восстановить функцию на $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым, пересекающим произвольную фиксированную алгебраическую кривую в $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$. Поэтому можно было бы воспользоваться результатами главы II. Мы приведем здесь, однако, другое, независимое от главы II, решение этой задачи. Изложим решение задачи при дополнительном предположении, что $f = 0$, когда β достаточно мало. При этом предположении все последующие преобразования будут корректными. В дальнейшем мы освободимся от этого несущественного допущения.

Сначала перейдем от функции $\varphi(x_1, x_2, \lambda)$ к ее преобразованию Фурье по x_1, x_2:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \varphi(x_1, x_2, \lambda) e^{i\operatorname{Re}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}\, dx_1\, d\overline{x_1}\, dx_2\, d\overline{x_2}.$$

Найдем выражение $\widetilde{\varphi}$ через исходную функцию f. Имеем:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times \tag{2.11}$$

$$\times \int f(x_2t+\lambda^{-1}, t, -x_1t+\lambda)e^{i\mathrm{Re}\,(\xi_1x_1+\xi_2x_2)}\,dt\,d\bar{t}\,dx_1\,d\overline{x_1}\,dx_2\,d\overline{x_2} =$$

$$= (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f(\alpha,\beta,\delta)e^{i\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}\xi_1+\frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}\xi_2\right)}|\beta|^{-4}\,d\alpha\,d\overline{\alpha}\,d\beta\,d\overline{\beta}\,d\delta\,d\overline{\delta}.$$

Перейдем теперь от координат α, β, δ на $\mathbb{C}^3$ к новым координатам

$$p_1 = -\frac{\delta}{\beta},\ p_2 = \frac{\alpha}{\beta},\ p_3 = \frac{1}{\beta}$$

и положим

$$f(\alpha,\beta,\delta) = |p_3|^4 f_1(p_1,p_2,p_3).$$

Тогда равенство (2.3) примет следующий вид:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times$$

$$\times \int f_1(p_1,p_2,p_3)e^{i\mathrm{Re}\,(p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3(\lambda\xi_1-\lambda^{-1}\xi_2))}\,dp_1\,d\overline{p_1}\,dp_2\,d\overline{p_2}\,dp_3\,d\overline{p_3}.$$

В результате получено простое соотношение между $\widetilde{\varphi}$ и преобразованием Фурье F функции f_1,

$$F(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (2\pi)^{-3}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times$$

$$\times \int f(p_1,p_2,p_3)e^{i\mathrm{Re}\,(p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3)}\,dp_1\,d\overline{p_1}\,dp_2\,d\overline{p_2}\,dp_3\,d\overline{p_3},$$

именно,

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = 2\pi F(\xi_1,\xi_2,\lambda\xi_1-\lambda^{-1}\xi_2). \tag{2.12}$$

Искомая формула обращения легко следует из (2.12). Для этого нужно воспользоваться формулой обращения для преобразования Фурье функции f_1:

$$|\beta|^4 f(\alpha,\beta,\delta) = f_1(p_1,p_2,p_3) =$$

$$= (2\pi)^{-3}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)e^{-i\mathrm{Re}\,(\xi_1p_1+\xi_2p_2+\xi_3p_3)}\,d\xi_1\,d\overline{\xi_1}\,d\xi_2\,d\overline{\xi_2}\,d\xi_3\,d\overline{\xi_3}.$$

Сделав здесь замену переменной $\xi_3 = \lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2$, получаем в силу (2.12):

$$f(\alpha,\beta,\delta) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-4}\left(\frac{i}{2}\right)^3 |\beta|^{-4} \times$$

$$\times \int \widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda)|\xi_1 + \overline{\lambda}^{-2}\xi_2|^2 e^{-i\operatorname{Re}(-\xi_1\frac{\delta}{\beta}+\xi_2\frac{\alpha}{\beta}+(\lambda\xi_1-\lambda^{-1}\xi_2)\frac{1}{\beta})} d\xi_1 d\overline{\xi_1} d\xi_2 d\overline{\xi_2} d\lambda d\overline{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-2}\frac{i}{2}|\beta|^{-4}\int L\overline{L}\varphi\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}, \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}, \lambda\right) d\lambda\, d\overline{\lambda}, \quad (2.13)$$

где $L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\overline{L} = \frac{\partial}{\partial \overline{x_1}} + \overline{\lambda}^{-2}\frac{\partial}{\partial \overline{x_2}}$.

Осталось упростить полученное выражение. Так как $\beta^{-1}L + \frac{\partial}{\partial\lambda}$ и $\overline{\beta}^{-1}\overline{L} + \frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}$ суть полные производные функции $\varphi\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}, \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}, \lambda\right)$ по λ и $\overline{\lambda}$, то в равенстве (2.13) можно заменить $\beta^{-1}L$ и $\overline{\beta}^{-1}\overline{L}$ соответственно на $-\frac{\partial}{\partial\lambda}$ и $-\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}$. В результате получим:

$$f(\alpha,\beta,\delta) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}|\beta|^{-2}\int \varphi''_{\lambda,\overline{\lambda}}\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}, \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}, \lambda\right) d\lambda\, d\overline{\lambda}.$$

Искомая формула обращения получается отсюда заменой переменной $x = \frac{\lambda-\delta}{\beta}$. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $f(\alpha,\beta,\gamma)$ — финитная C^∞ функция на $\mathbb{C}^3$, равная нулю при достаточно малых значениях β, и $\varphi = \mathcal{R}_0 f$ — ее интегральное преобразование, заданное равенством* (2.6). *Тогда имеет место следующая формула обращения*:

$$f(\alpha,\beta,\delta) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int \varphi''_{\lambda,\overline{\lambda}}\left(x, \frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}, \beta x+\delta\right) dx\, d\overline{x}. \qquad (2.14)$$

Заметим, что в этой формуле дифференцирование по λ есть дифференцирование по множеству параллельных прямых, пересекающих гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$, а интеграл берется по множеству прямых, пересекающих эту гиперболу и проходящих через точку (α,β,δ).

Подобно случаю пространства Лобачевского, полученная формула обращения локальна: для восстановления функции f в точке (α,β,δ) нужно знать ее интегралы только по прямым, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$ и сколь угодно близким к этой точке.

2.4. Формула обращения для орисферического преобразования. Пусть $f(g)$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — финитная C^∞ функция на группе G. Требуется выразить f через ее орисферическое преобразование $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$, определенное равенством (2.3). Предположим на время, что $f = 0$ при достаточно малых значениях β. Тогда f, рассматриваемая как функция от α, β, δ, продолжается до финитной C^∞ функции на всем $\mathbb{C}^3$, равной нулю при достаточно малых значениях β. Следовательно, она выражается через функцию $\varphi = \mathcal{R}_0 f$ по формуле обращения (2.14). Чтобы получить отсюда нужный результат, достаточно воспользоваться соотношением (2.9), выражающим $\mathcal{R}_0 f$ через $\mathcal{R} f$. Мы получаем:

$$f(g) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int L\overline{L}\mathcal{R} f(x, 1, \alpha x + \gamma, \beta x + \delta)\, dx\, d\overline{x}, \tag{2.15}$$

где $L = (\alpha x + \gamma)\frac{\partial}{\partial \eta_1} + (\beta x + \delta)\frac{\partial}{\partial \eta_2} + 1$. Используя условие однородности (2.4) для $\mathcal{R} f$, можно придать полученной формуле обращения более симметричный вид:

$$f(g) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_\gamma L_\eta \overline{L_\eta}\mathcal{R} f(\xi, \eta)\ |_{\eta = \xi g}\ \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}, \tag{2.16}$$

где $L_\eta = \eta_1\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial \eta_2} + 1$, $\omega(\xi) = \xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1$, а интеграл берется по произвольной поверхности $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0.

Так как орисферическое преобразование $\mathcal{R}$ инвариантно относительно действия группы $G \times G$, первоначальное предположение о f является несущественным: из того, что формула обращения (2.16) верна для функций, равных нулю при достаточно малых значениях β, следует, что она верна и для любой финитной C^∞ функции на G. Таким образом, доказана

Теорема 2.2. *Пусть f — произвольная финитная C^∞ функция на G. Тогда, если $\mathcal{R} f$ — орисферическое преобразование функции f, определенное равенством* (2.3)*, то имеет место формула обращения* (2.16)*, выражающая f через $\mathcal{R} f$.*

В этой формуле интеграл берется по множеству орисфер $h(\xi, \xi g)$, т. е. по множеству орисфер, проходящих через точку $g \in G$. Входящий в нее оператор $L_\eta = \eta_1\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial \eta_2} + 1$ можно представить в следующем виде:

$$L_\eta \varphi(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda\varphi(\xi, \lambda\eta))\Big|_{\lambda = 1}.$$

Напомним, что преобразование $h(\xi, \eta) \mapsto h(\xi_0, \lambda\eta)$ есть введенное в п. 1.3 преобразование левого сдвига, переводящее каждую орисферу в орисферу, ей параллельную. Таким образом, L_η есть оператор инфинитезимального левого сдвига.

Замечание. Из условия однородности (2.4) для $\mathcal{R} f$ следует, что $(L_\xi + L_\eta)\mathcal{R} f = (\overline{L_\xi} + \overline{L_\eta})\mathcal{R} f = 0$, где $L_\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1$. Поэтому в формуле обращения (2.16) операторы L_η и $\overline{L_\eta}$ можно заменить соответственно на $L = \frac{1}{2}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)$ и $\overline{L}$.

2.5. Формула обращения для орисферического преобразования в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$. Из формулы обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}$ на G можно как следствие получить формулу обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}^h$ в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$ (определение $\mathcal{R}^h$ см. в главе III). Именно, так как $\mathcal{L}^3 = K \setminus G$, где $K = SU(2)$, то любую функцию f на $\mathcal{L}^3$ можно поднять на G, т.е. рассматривать ее как функцию $\widetilde{f}$ на G, удовлетворяющую условию

$$\widetilde{f}(kg) = \widetilde{f}(g) \text{ для любого } k \in K.$$

Ввиду компактности K образ $\widetilde{f}$ финитной функции f на $\mathcal{L}^3$ является финитной функцией на G; таким образом, пространство финитных функций на $\mathcal{L}^3$ вкладывается в пространство финитных функций на G. Далее, нетрудно убедиться, что при отображении $G \to K \setminus G = \mathcal{L}^3$ орисферы на G переходят в орисферы на $\mathcal{L}^3$ и интегралы $\mathcal{R}\widetilde{f}$ функции $\widetilde{f}$ по орисферам на G равны (при подходящем согласовании мер на орисферах) интегралам $\mathcal{R}^h f$ функции f по образам этих орисфер. В результате, чтобы получить формулу обращения для $\mathcal{R}^h$, нужно только найти явное выражение $\mathcal{R}\widetilde{f}$ через $\mathcal{R}^h f$ и подставить это выражение в формулу обращения (2.16) для $\mathcal{R}$.

Сформулируем несколько утверждений, которые легко следуют из определения орисфер и орисферических преобразований на G и $\mathcal{L}^3$.

1. При отображении $G \to K \setminus G = \mathcal{L}^3$ любая орисфера $h(\xi, \eta)$ на G переходит в орисферу $h(\eta)$ на $\mathcal{L}^3$.

2. $\mathcal{R}\widetilde{f}(\xi, \eta)$ как функция от ξ зависит только от $|\xi| = (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}$.

3. Функции $\mathcal{R}\widetilde{f}$ и $\mathcal{R} f$ связаны соотношением

$$\mathcal{R}\widetilde{f}(-1, 0; \eta_1, \eta_2) = \mathcal{R}^h f(\eta_1, \eta_2)$$

Из 2), 3) и из условия однородности для $\mathcal{R} f$ получаем искомое выражение $\mathcal{R}\widetilde{f}$ через $\mathcal{R}^h f$:

$$\mathcal{R}\widetilde{f}(\xi, \eta) = |\xi|^{-4} \mathcal{R}^h \left(\frac{\eta}{|\xi|}\right). \tag{2.17}$$

Подставив это выражение в формулу обращения (2.16) для орисферического преобразования $\mathcal{R}$ на G при $g=e$, мы получим после элементарных упрощений следующую формулу обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}^h$ на $\mathcal{L}^3$:

$$f(w_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\gamma_\eta} L_\eta \overline{L_\eta} \mathcal{R}^h f(\eta)\, \omega(\eta) \overline{\omega(\eta)}, \tag{2.18}$$

где $w_0 \in \mathcal{L}^3$ — точка, отвечающая единичному классу смежности в $K \setminus G$. Выражение для f в произвольной точке $w \in \mathcal{L}^3$ получается из (2.18) групповым сдвигом. Полученная формула обращения совпадает с формулой обращения (6.17) из главы III.

2.6. Интегральное преобразование, связанное с параболоидами на G. Напомним (см. п. 1.6), что каждый параболоид на G получается как сечение G гиперплоскостью в $\mathbb{R}^4$ следующего вида:

$$(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma)\zeta_2 - (\xi_1\beta + \xi_2\delta)\zeta_1 = p, \quad p \neq 0$$

или, в матричной записи,

$$\xi g \zeta^\perp = p, \quad p \neq 0, \tag{2.19}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ — ненулевые векторы в $\mathbb{C}^2$ и $\zeta^\perp = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ -\zeta_1 \end{pmatrix}$. Таким образом, любой параболоид на G задается парой векторов $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ и числом $p \neq 0$ и определяется как множество матриц $g \in G$, удовлетворяющих условию (2.19). Мы обозначили этот параболоид через $\widetilde{h}(\xi, \zeta, p)$. Очевидно, что $\widetilde{h}(\lambda_1\xi, \lambda_2\zeta, \lambda_1\lambda_2 p) = \widetilde{h}(\xi, \zeta, p)$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Определение. Определим интеграл финитной C^∞ функции f на G по параболоиду $\widetilde{h}(\xi, \zeta, p)$ равенством

$$\mathcal{R}^p f(\xi, \zeta, p) = \int\limits_G f(g)\, \delta(\xi g \zeta^\perp - p)\, d\mu(g), \tag{2.20}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта функция на $\mathbb{C}$.

Очевидно, что функция $\mathcal{R}^p f$ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$\mathcal{R}^p f(\lambda_1\xi, \lambda_2\zeta, \lambda_1\lambda_2 p) = |\lambda_1\lambda_2|^{-2} \mathcal{R}^p f(\xi, \zeta, p). \tag{2.21}$$

Таким образом, $\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)$ зависит не только от самого параболоида $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, но и от параметров ξ, ζ, p, которыми этот параболоид задается.

Существует простая связь между интегральным преобразованием $\mathcal{R}^p$ и орисферическим преобразованием $\mathcal{R}$. Именно, переход от функции $f(g)$ к $\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)$ можно осуществить в два этапа. Сначала мы интегрируем f по орисферам $h(\xi,\eta)$, где ξ фиксировано; в результате получаем $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$. Затем мы интегрируем $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$ по множеству орисфер, на которые расслаивается параболоид $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, т.е. множеству орисфер $h(\xi,\eta)$, где ξ фиксировано, а η удовлетворяет соотношению $\eta\zeta^\perp = p$. Запишем результат в виде явной формулы.

Теорема 2.3. *Преобразование $\mathcal{R}^p f$ следующим образом выражается через орисферическое преобразование $\mathcal{R} f$:*

$$\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R} f(\xi,\eta)\,\delta(\eta\zeta^\perp - p)\,d\eta\,d\overline{\eta}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) следует, что при любом фиксированном ξ $\mathcal{R}^p f$ является двумерным преобразованием Радона функции $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$ рассматриваемой как функция от η. Таким образом, оператор $\mathcal{R}^p$ является композицией оператора $\mathcal{R}$ орисферического преобразования и двумерного преобразования Радона на $\mathbb{C}^2$.

Поясним связь $\mathcal{R}^p$ с преобразованием Радона. Мы рассматриваем семейство H_ξ орисфер $h(\xi,\eta)$ с фиксированным ξ, оно состоит из всех орисфер, параллельных фиксированному двумерному пространству (1.5) на поверхности асимптотического конуса K. Отображение $h(\xi,\eta) \mapsto \eta$ задает изоморфизм $H_\xi \to \mathbb{C}^2 \setminus 0$. На любом параболоиде $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$ одно из семейств прямолинейных образующих принадлежит H_ξ и при изоморфизме $H_\xi \to \mathbb{C}^2 \setminus 0$ оно переходит в прямую на $\mathbb{C}^2$. Таким образом, в силу этого изоморфизма интегрирование функции $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$ по множеству прямолинейных образующих параболоида $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$ можно интерпретировать как интегрирование функции на $\mathbb{C}^2$ по прямой в $\mathbb{C}^2$.

Из (2.22) на основании формулы обращения для двумерного преобразования Радона в $\mathbb{C}^2$ (см. § 9 главы I) получаем следующее выражение $\mathcal{R} f$ через $\mathcal{R}^p f$:

$$\mathcal{R} f(\xi,\eta) = -\pi^{-2}\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \frac{\partial^2}{\partial p\partial\overline{p}}\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\Big|_{p=\eta\zeta^\perp} \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} =$$

$$= -\pi^2\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\,\delta^{(1,1)}(\eta\zeta^\perp - p)\,dp\,d\overline{p}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}, \tag{2.23}$$

где $\delta^{(1,1)}(s) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial \overline{s}}\delta(s)$.

Замечание. В формуле (2.22) функция $\mathcal{R} f$ усредняется по одному из семейств орисфер на параболоиде $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$. Усредняя ее по другому семейству орисфер, получаем соотношение, аналогичное (2.22):

$$\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R} f(\eta,\zeta)\,\delta(\xi\eta^\perp - p)\,d\eta\,d\overline{\eta}. \tag{2.24}$$

Отсюда по формуле обращения для преобразования Радона в $\mathbb{C}^2$ следует:

$$\mathcal{R} f(\xi,\eta) = -\pi^{-2}\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} \mathcal{R}^p f(\zeta,\eta,p)\,\Big|_{p=\xi\zeta^\perp} \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}.$$

Найдем теперь формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^p$. Так как $\mathcal{R}^p$ есть композиция орисферического преобразования $\mathcal{R}$ и двумерного преобразования Радона, то формула обращения для $\mathcal{R}^p$ получается как композиция формул обращения для этих двух преобразований. Подставив (2.23) в формулу обращения (2.16) для $\mathcal{R}$, получаем:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^5}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times$$
$$\times \iiint\limits_{\gamma_\xi \gamma_\xi \mathbb{C}} \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} L_\eta \overline{L_\eta}\delta(\eta\zeta^\perp - p)\,\Big|_{\eta=\xi g} dp\,d\overline{p}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}.$$

Отсюда после элементарных упрощений получаем:

Теорема 2.4. *Функция f на G выражается через интегральное преобразование $\mathcal{R}^p f$ по следующей формуле обращения*:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \iint\limits_{\gamma_\zeta \gamma_\xi} \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} \left(|p|^2 \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\right)\Bigg|_{p = \xi g \zeta^\perp} \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}. \tag{2.25}$$

Примечание. Интегральное преобразование $\mathcal{R}^p$ функций на G индуцирует интегральное преобразование функций на пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$, Именно, при проектировании G на пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3 = SU(2)\setminus G$ каждый параболоид $\widetilde{h}(\xi,\zeta,1)$ (являющийся многообразием вещественной размерности 4) отображается на область $\mathcal{L}_\zeta \subset \mathcal{L}^3$, внешнюю к орисфере пространства Лобачевского, заданной уравнением $\frac{|w\zeta_2-\zeta_1|^2}{z} = 1$. Интегральное преобразование $\mathcal{R}^p$ на G переходит в интегральное преобразование функций на $\mathcal{L}^3$, заданное следующим равенством:

$$\widetilde{\mathcal{R}}^h f(\zeta_1,\zeta_2) = \int\limits_{\mathcal{L}_\zeta} \left(\frac{|w\zeta_2-\zeta_1|^2}{z}\right)^{-1} f(w)\frac{dx\,dy\,dz}{z^3},$$

где $w = x + yi + zj$ (см. главу III). Формула обращения для $\widetilde{\mathcal{R}}^h$ легко следует из формулы обращения для $\mathcal{R}^p$.

Добавление. Замечание об орисферическом преобразовании на группе $SL(2,\mathbb{R})$. Определенные в этом параграфе интегральные преобразования $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_0$ без изменений переносятся на вещественный случай. Однако здесь, в отличие от комплексного случая, отображения $f \mapsto \mathcal{R} f$ и $f \mapsto \mathcal{R}_0 f$ имеют ненулевое ядро, а потому функция f не может быть восстановлена по своему образу. В этом достаточно убедиться для случая преобразования $\mathcal{R}_0$.

В вещественном случае оператор $\mathcal{R}_0$ относит функциям $f(\alpha,\beta,\delta)$ на $\mathbb{R}^3$ их интегралы по прямым в $\mathbb{R}^3$, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$:

$$\mathcal{R}_0 f(x_1, x_2\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_2 t + \lambda^{-1}, t, -x_1 t + \lambda)\,dt.$$

Повторим для вещественного случая те рассуждения, которыми в п. 2.3 была получена формула обращения. Перейдем на $\mathbb{R}^3$ к новым координатам $p_1 = -\frac{\delta}{\beta}$, $p_2 = \frac{\alpha}{\beta}$, $p_3 = \frac{1}{\beta}$ и положим $f(\alpha,\beta,\delta) = |p_3|^2 f_1(p_1,p_2,p_3)$. Обозначим через $F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ преобразование Фурье функции f_1 и через $\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda)$ преобразование Фурье функции $\varphi(x_1,x_2,\lambda) = \mathcal{R}_0 f(x_1,x_2,\lambda)$ по переменным x_1, x_2. Тогда, так же как и в комплексном случае, устанавливается следующее соотношение:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = (2\pi)^{1/2} F(\xi_1,\xi_2,\lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2). \tag{2.26}$$

Спрашивается, можно ли восстановить функцию F по функции $\widetilde{\varphi}$. Ясно, что это невозможно: из условия $\xi_3 = \lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2$, где λ вещественно, следует, что $\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 > 0$, и, значит, равенством (2.26) функция F определена только в области $\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 > 0$.

Заметим, что если f — финитная функция, равная нулю при малых значениях β, то она может быть восстановлена по функции $\mathcal{R}_0 f$. В самом деле, в этом случае определенная выше функция $f_1(p_1, p_2, p_3)$ также финитна, и, значит, ее преобразование Фурье F есть целая аналитическая функция. Поэтому функция F, будучи определена в области $\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 > 0$ на $\mathbb{R}^3$, определена тем самым и на всем $\mathbb{R}^3$.

§ 3. Гармонический анализ на группе $G = SL(2,\mathbb{C})$

В этом параграфе по той же схеме, что и в случае пространства Лобачевского (см. главу III), строится аналог преобразования Фурье на группе G. В основе конструкции лежат собственные функции операторов Лапласа на G, постоянные на орбитах подгруппы $Z \times Z \subset G \times G$, где Z – подгруппа матриц $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеется (см. § 1) два типа таких орбит — одномерные орбиты (орисферы) и двумерные (параболоиды). Соответственно можно рассматривать собственные функции операторов Лапласа, постоянные на орбитах первого или второго типа. В результате возникают две версии преобразования Фурье на G.

В этом параграфе мы подробно изложим первую версию преобразования Фурье, связанную с орисферами. Основной результат — разложение функции на G в аналог интеграла Фурье будет получен как следствие формулы обращения для орисферического преобразования из § 2. Второй вариант преобразования Фурье на G будет рассмотрен в более краткой форме в следующем параграфе.

3.1. Операторы Лапласа — Бельтрами на группе G. Начнем с того, что предъявим два дифференциальных оператора 2-го порядка Δ и $\overline{\Delta}$ на G, перестановочных между собой и с действием группы $G \times G$.

В пространстве всех матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, т.е. в $\mathbb{C}^4$, мы имеем такие операторы, а именно:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\delta} - \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\gamma}, \ \overline{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial\overline{\alpha}\partial\overline{\delta}} - \frac{\partial^2}{\partial\overline{\beta}\partial\overline{\gamma}}. \tag{3.1}$$

Чтобы определить их на гиперболоиде G: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, мы вводим на $\mathbb{C}$ обобщенные сферические координаты $x = \rho y$, где $\rho \in \mathbb{C}$, $y \in G$, и рассматриваем наши операторы только на функциях, которые не зависят от ρ. Определенные так операторы Δ, $\overline{\Delta}$ назовем операторами Лапласа — Бельтрами на G. Приведем, опустив вычисления, выражения для операторов Δ, $\overline{\Delta}$ в координатах s, t, λ на G, которые определяются из разложения Гаусса

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения следует, что $\lambda = \alpha$, $s = \frac{\gamma}{\alpha}$, $t = \frac{\beta}{\alpha}$. Имеем:

$$\Delta = -\frac{1}{4}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + 1\right)^2 - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial s\partial t} + \frac{1}{4} \tag{3.2}$$

и аналогично для $\overline{\Delta}$.

3.2. Орисферические функции на G. Следуя схеме, изложенной в главе III для пространства Лобачевского, мы должны, прежде всего, ввести для $G \times G$ аналог подгруппы $Z \subset G$ матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В качестве такой подгруппы естественно рассматривать группу $Z \times Z$.

Найдем на G собственные функции операторов Δ, $\overline{\Delta}$, инвариантные относительно подгруппы $Z \times Z \subset G \times G$. Для этого заметим, что орбиты группы $Z \times Z$ в G это двумерные подмножества матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с фиксированным $\gamma \neq 0$ (параболоиды) и одномерные подмножества матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ с фиксированным α (орисферы). Отсюда следует, что обобщенные функции Φ на G, инвариантные относительно подгруппы $Z \times Z$, имеют вид:

$$\Phi(g) = u(\gamma) + \delta(\gamma)v(\alpha),\ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где u, v — произвольные функции, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Нам нужно выяснить, какие из функций $u(\gamma)$ и $\delta(\gamma)v(\alpha)$ являются собственными функциями операторов Лапласа — Бельтрами. Проделав несложные вычисления, получаем

Предложение 3.1. *Следующие обобщенные функции на G являются собственными функциями операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$, инвариантными относительно подгруппы $Z \times Z \subset G \times G$:*

$$\Phi_\chi(g) = \delta(\gamma)\,\chi(\alpha), \tag{3.3}$$

$$\Psi_\chi(g) = \chi^{-1}(\gamma)\,|\gamma|^{-2}, \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{C}$, а χ — произвольный мультипликативный характер на $\mathbb{C}$, т. е. функция вида

$$\chi(t) = t^{n_1}\overline{t}^{n_2} = |t|^{2n_2}t^{n_1-n_2},\ n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

При этом функции Φ_χ, $\Phi_{\chi^{-1}}$, Ψ_χ, $\Psi_{\chi^{-1}}$ принадлежат одному и тому же собственному подпространству операторов Δ, $\overline{\Delta}$, отвечающему собственным значениям $-\frac{1}{4}(n_1^2 - 1)$ и $-\frac{1}{4}(n_2^2 - 1)$.

Итак, мы имеем два типа функций — функции Φ_χ, сосредоточенные на двумерном подмногообразии в G, и функции Ψ_χ. Соответственно, существует две версии гармонического анализа на G: в одной мы исходим из функций Φ_χ, а в другой — из функций Ψ_χ. Здесь будет подробно изложена первая версия. Вторая версия будет рассмотрена в следующем параграфе.

Определение. Назовем обобщенные функции $\Phi_\chi(g)$, где χ — произвольный характер (3.5), зональными орисферическими функциями на G, а их сдвиги $\Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1})$, $g_1, g_2 \in G$ — просто орисферическими функциями на G.

Позже мы увидим, что орисферические функции $\Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1})$, где χ пробегает унитарные характеры $(\chi(t)\overline{\chi(t)} \equiv 1)$, образуют полное семейство в $L^2(G)$, т.е. по ним можно разложить любую функцию из $L^2(G)$.

В силу (3.3) зональные орисферические функции сосредоточены на цилиндрической поверхности $\gamma = 0$ в G, образованной орисферами вида δZ, $\delta \in D$, и постоянны на каждой из этих орисфер. Отсюда следует, что любая орисферическая функция $g \mapsto \Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1})$ сосредоточена на одной из цилиндрических поверхностей в G и постоянна на прямолинейных образующих этой поверхности.

Определение. Определим орисферические функции $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ на многообразии троек $g \in G$ и $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ следующим равенством:

$$\Phi_\chi(g,\xi,\eta) = \Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1}), \tag{3.6}$$

где $g_1, g_2 \in G$ — любые матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\xi = \xi_0 g_1, \ \eta = \xi_0 g_2, \ \text{где } \xi_0 = (0,1). \tag{3.7}$$

От выбора таких матриц g_1, g_2 правая часть не зависит.

В частности, $\Phi_\chi(g,\xi_0,\xi_0) = \Phi_\chi(g)$.

Обобщенная функция $(g,\xi,\eta) \mapsto \Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ при любых фиксированных ξ, η сосредоточена на единственной цилиндрической поверхности в G, проходящей через орисферу $h(\xi,\eta)$, и постоянна на всех орисферах $h(\xi,\lambda\eta)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, образующих эту поверхность. При фиксированном $g \in G$ и $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 1$ она сводится к функции на многообразии орисфер H, как показывает следующая формула (3.9).

Предложение 3.2. *Орисферические функции $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ удовлетворяют соотношениям:*

$$\Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1}, \xi, \eta) = \Phi_\chi(g; \xi g_1, \eta g_2) \tag{3.8}$$

для любых $g_1, g_2 \in G$;

$$\Phi_\chi(g; \lambda_1\xi, \lambda_2\eta) = \chi(\lambda_1^{-1}\lambda_2)\, |\lambda_1\lambda_2|^{-2}\, \Phi_\chi(g, \xi, \eta) \tag{3.9}$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Напишем явное выражение для орисферических функций.

Предложение 3.3. *Орисферические функции выражаются формулой*

$$\Phi_\chi(g, \xi, \eta) = \delta\big(\eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta)\big)\, \chi\left(\frac{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}{\xi_2}\right), \tag{3.10}$$

где $\delta(\cdot)$ — *дельта-функция на* $\mathbb{C}$.

В самом деле, в (3.6) и (3.7) можно положить $g_1 = \begin{pmatrix} \xi_2^{-1} & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} \eta_2^{-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$. Тогда имеем: $g_1 g g_2^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$, где $\alpha' = \xi_2^{-1}(-\eta_1\beta + \eta_2\alpha)$, $\gamma' = \eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta)$. Отсюда на основании (3.6) и (3.3) получаем

$$\Phi_\chi(g, \xi, \eta) = \delta(\gamma')\, \chi(\alpha'),$$

т.е. равенство (3.10).

Замечание. На цилиндрической поверхности $\gamma' = \eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta) = 0$ имеем:

$$\frac{\xi_1\alpha + \xi_2\gamma}{\eta_1} = \frac{\xi_1\beta + \xi_2\delta}{\eta_2} = \frac{\xi_1}{\eta_1\delta - \eta_2\gamma} = \frac{\xi_2}{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}.$$

Поэтому в (3.10) можно заменить под знаком характера χ^{-1} отношение $\frac{\xi_2}{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}$ любым из этих отношений.

Предложение 3.4. *Обобщенная функция* $\Phi_\chi(g, \xi, \eta)$ *выражается интегралом*

$$\Phi_\chi(g, \xi, \eta) = \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \delta(\xi g - \lambda\eta)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}, \tag{3.11}$$

где $\delta(\cdot)$ — *дельта-функция на* $\mathbb{C}^2$.

В самом деле, достаточно доказать это равенство для зональной орисферической функции, т.е. при $\xi = \eta = (0, 1)$. Но при этих значениях ξ и η правая часть равна

$$\frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \delta(\gamma, \delta - \lambda)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda} \;=\; \delta(\gamma)\, \chi^{-1}(\delta) \;=\; \delta(\gamma)\, \chi(\alpha) \;=\; \Phi_\chi(g, \xi, \eta).$$

3.3. Преобразование Фурье на G.

Определение. Определим преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ финитной C^∞ функции f на G следующим равенством:

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta,\chi) = \langle \Phi_\chi(\cdot,\xi,\eta), f\rangle = \int\limits_G \Phi_\chi(g,\xi,\eta)\, f(g)\, d\mu(g), \tag{3.12}$$

где $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ — орисферические функции на G.

Используя явное выражение (3.10), (3.11) для орисферических функций, мы можем представить $\mathcal{F}f$ в следующей форме:

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta,\chi) = \\ = \int\limits_G \delta(\eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta))\,\chi\left(\frac{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}{\xi_2}\right) f(g)\, d\mu(g), \tag{3.13}$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, или

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta,\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_G\int\limits_{\mathbb{C}} \delta(\xi g - \lambda\eta)\,\chi^{-1}(\lambda)\, f(g)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}\, d\mu(g). \tag{3.14}$$

Подчеркнем, что интеграл (3.12) фактически двумерный: он берется по цилиндрической поверхности в G, на которой сосредоточена функция $\Phi_\chi(\cdot;\xi,\eta)$.

Из определения следует:

1. Функция $\mathcal{F}f$ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$\mathcal{F}f(\lambda_1\xi,\lambda_2\eta,\chi) = \chi^{-1}(\lambda_1)\,|\lambda_1|^{-2}\chi(\lambda_2)\,|\lambda_2|^{-2}\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi). \tag{3.15}$$

2. Оператор $\mathcal{F}$ перестановочен с действием группы $G\times G$ на G и на пространстве пар (ξ,η); именно,

$$\text{если } f_1(g) = f(g_1^{-1}gg_2), \text{ то } \mathcal{F}f_1(\xi,\eta;\chi) = \mathcal{F}f(\xi g_1, \eta g_2;\chi). \tag{3.16}$$

Установим еще одно важное свойство оператора $\mathcal{F}$. Фиксируем произвольный унитарный характер χ (т.е. $\chi\overline{\chi}\equiv 1$) и рассмотрим пространство функций $\varphi(\xi,\eta;\chi)$, удовлетворяющих условию однородности (3.15). Введем в этом пространстве структуру C^*-алгебры, положив:

$$\varphi^*(\xi,\eta;\chi) = \overline{\varphi(\eta,\xi;\chi)},$$

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi,\eta;\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\xi,\zeta;\chi)\,\varphi(\zeta,\eta;\chi)\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)},$$

где $\omega(\zeta) = \zeta_1\, d\zeta_2 - \zeta_2\, d\zeta_1$, а интеграл берется по произвольной поверхности γ_ζ в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0.

Предложение 3.5. *Отображение* $f \mapsto \mathcal{F} f(\,\cdot\,;\chi)$ *является гоморфизмом* C^**-алгебр, т. е.* $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2$, $(\mathcal{F} f)^* = \mathcal{F} f^*$, *где* $(f_1 * f_2)(g) = \int f_1(\widetilde{g})\, f_2(\widetilde{g}^{-1} g)\, d\mu(\widetilde{g})$ *и* $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$.

Доказательство. Равенство $(\mathcal{F} f)^* = \mathcal{F} f^*$ следует непосредственно из определения преобразования Фурье. Докажем первое равенство. В силу (3.16) имеем:

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2)(\xi, \eta; \chi) = \int_G f_1(\widetilde{g})\, \mathcal{F} f_2(\xi\widetilde{g}, \eta; \chi)\, d\mu(\widetilde{g}) =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_G \int_{\mathbb{C}^2} f_1(\widetilde{g})\, \mathcal{F} f_2(\zeta, \eta; \chi)\, \delta(\xi\widetilde{g} - \zeta)\, d\zeta\, d\overline{\zeta}\, d\mu(\widetilde{g}) =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_G \int_{\gamma_\zeta} \int_{\mathbb{C}} f_1(\widetilde{g})\, \mathcal{F} f_2(\zeta, \eta; \chi)\, \delta(\xi\widetilde{g} - \lambda\zeta)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}\, d\mu(\widetilde{g}), \tag{3.17}$$

где $d\zeta = d\zeta_1\, d\zeta_2$; последнее равенство получается переходом к "полярным" координатам по ζ: $\zeta = \lambda\zeta'$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta' \in \gamma_\zeta$. Так как

$$\frac{i}{2} \int_G \int_{\mathbb{C}} f_1(g) \delta(\xi g - \lambda\zeta)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}\, d\mu(g) = \mathcal{F} f_1(\xi, \zeta; \chi),$$

то из (3.17) следует, что

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2)(\xi, \eta; \chi) =$$

$$= \frac{i}{2} \int_{\gamma_\zeta} \mathcal{F} f_1(\xi, \zeta; \chi)\, \mathcal{F} f_2(\zeta, \eta; \chi)\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} = (\mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2)(\xi, \eta; \chi).$$

Следствие.

$$\mathcal{F}(f * f^*)(\xi, \eta; \chi) = \frac{i}{2} \int_{\gamma_\zeta} \mathcal{F} f(\xi, \zeta; \chi)\, \overline{\mathcal{F} f(\eta, \zeta, \chi)}\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}. \tag{3.18}$$

3.4. Связь преобразования Фурье на G с орисферическим преобразованием.

Теорема 3.1. *Преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ функции f связано с ее орисферическим преобразованием $\mathcal{R} f$ соотношением*

$$\mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi) = \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{R} f(\xi, \lambda\eta)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}. \tag{3.19}$$

В самом деле, используя явное выражение (2.3)) для $\mathcal{R} f$ (см. с. 173), мы можем представить равенство (3.14) в виде (3.19).

Итак, чтобы перейти от функции f на G к ее преобразованию Фурье $\mathcal{F} f$, мы интегрируем сначала f по орисферам на G, т.е. переходим от f к ее орисферическому преобразованию $\mathcal{R} f$, а затем интегрируем функцию $\mathcal{R} f(\xi, \lambda\eta)\, \chi^{-1}(\lambda)$ по λ.

Замечание. Воспользовавшись условием однородности $\mathcal{R} f(\lambda\xi, \lambda\eta) = |\lambda|^{-4} \mathcal{R} f(\xi, \eta)$, где $\lambda \neq 0$ — любое число, равенство (3.19) можно преобразовать к виду:

$$\mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi) = \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{R} f(\lambda\xi, \eta)\, \chi(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}. \tag{3.20}$$

Мы видим, что $\mathcal{F} f$ получается из $\mathcal{R} f$ при помощи комплексного преобразования Меллина. Так как $\chi(\lambda) = e^{i(\rho s + m\varphi)}$, где $s = \ln|\lambda|$, $\varphi = \arg \lambda$, это преобразование сводится к композиции преобразований Фурье на вещественной прямой и на окружности, а потому, применяя классические формулы обращения для преобразования Фурье на $\mathbb{R}$ и на окружности S, мы можем, обратно, выразить $\mathcal{R} f$ через $\mathcal{F} f$. Именно, из (3.19) вытекает

Следствие. *Орисферическое преобразование $\mathcal{R} f$ функции f выражается через преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ равенством*

$$\mathcal{R} f(\xi, \eta) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{X} \mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi)\, d\chi, \tag{3.21}$$

где интеграл берется по множеству X унитарных характеров $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}} \overline{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$; интегрирование по X нужно понимать как интегрирование по ρ и суммирование по m.

3.5. Соотношение симметрии для преобразования Фурье. В § 2 было установлено соотношение симметрии для орисферического преобразования $\mathcal{R}f$, см. формулу (2.10). Подставив в это соотношение выражение (3.21) $\mathcal{R}f$ через $\mathcal{F}f$, мы получим следующее соотношение для функции $\mathcal{F}f$:

$$\int\limits_X \int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F}f(\xi, \lambda\xi g; \chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,d\chi = \int\limits_X \int\limits_{\gamma_\eta} \mathcal{F}f(\lambda\eta g^{-1}, \eta; \chi)\,\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)}\,d\chi$$

для любых $g \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Приведем это равенство к более простому виду. Заменив в правой части η на ξg, χ на χ^{-1} и воспользовавшись условием однородности (3.15) для $\mathcal{F}f$, мы получим:

$$\int\limits_X Z(g,\chi)\,\chi(\lambda)\,|\lambda|^{-2}\,d\chi = \int\limits_X = Z(g,\chi^{-1})\,\chi(\lambda)\,|\lambda|^{-2}\,d\chi,$$

где

$$Z(g,\chi) = \int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F}f(\xi, \xi g; \chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}. \tag{3.22}$$

Так как это равенство справедливо для любого $\lambda \neq 0$, то из него следует.

Предложение 3.6. *Функция $Z(g,\chi)$, заданная равенством* (3.22), *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$Z(g,\chi) = Z(g,\chi^{-1}) \tag{3.23}$$

для любых $g \in G$ и $\chi \in X$.

3.6. Формула обращения для преобразования Фурье. Полнота семейства орисферических функций $\Phi_\chi(g;\xi,\eta)$, где χ пробегает унитарные характеры, означает, что должна существовать формула обращения для преобразования Фурье. Такая формула действительно существует, и она получается непосредственно из формулы обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}f$, см. формулу (2.16). Именно, подставив в эту формулу выражение $\mathcal{R}f$ через $\mathcal{F}f$, получаем:

$$f(g) = (2\pi)^{-5}\frac{i}{2}\int\limits_X \int\limits_{\gamma_\xi} L_\eta\,\overline{L_\eta}\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)|_{\eta=\xi g}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,d\chi =$$

$$= -2^{-7}\pi^{-5}\frac{i}{2}\int\limits_X \int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,\mathcal{F}f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,d\chi, \tag{3.24}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ для $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$; последнее равенство следует из условия однородности (3.15) для $\mathcal{F}f$, так как в силу этого условия $L_\eta \overline{L_\eta}\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi) = -\frac{1}{4}(\rho^2+m^2)\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)$.

В силу соотношения симметрии (3.23) для $\mathcal{F}f$ интеграл по X можно заменить удвоенным интегралом по произвольному фиксированному подмножеству $X_0 \subset X$, содержащему из почти каждой пары характеров χ и χ^{-1} в точности по одному представителю. В результате получаем

Теорема 3.2. *Любая финитная C^∞ функция f на G выражается через свое преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(g) = -2^{-6}\pi^{-5}\frac{i}{2}\int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,\mathcal{F}f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,d\chi, \tag{3.25}$$

где $c(\chi)=\rho^2+m^2$ при $\chi(t)=t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$, $X_0\subset X$ — любое фиксированное подмножество, содержащее из почти каждой пары характеров χ и χ^{-1} в точности по одному представителю.

Напомним, что как и всюду в § 2 и 3, γ_ξ — поверхность в $\mathbb{C}\setminus 0$, пересекающая по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0; в силу условий однородности для $\mathcal{F}f$ от ее выбора интеграл не зависит.

Формуле обращения (3.25) можно придать вид, аналогичный формуле (3.12), выражающей $\mathcal{F}f$ через f. Именно,

$$\begin{aligned}
f(g) &= -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times \\
&\quad\times \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi = \\
&= -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} \delta(\eta_2(\xi_1\alpha+\xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta+\xi_2\delta)) \times \\
&\qquad\times \chi\left(\frac{\xi_1\alpha+\xi_2\gamma}{\eta_1}\right)\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Для этого достаточно убедиться, что

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)} = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} \Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)\,\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}. \quad (3.27)$$

Имеем:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)} = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int\limits_{\gamma_\xi}\int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\,\delta(\xi g-\eta)\,d\eta\,d\overline{\eta}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int\limits_{\gamma_\xi}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\,\delta(\xi g-\lambda\eta)\,\chi(\lambda)\,d\lambda\,d\overline{\lambda}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)};$$

последнее равенство получается переходом к “полярным” координатам $\eta=\lambda\eta'$, где $\lambda\in\mathbb{C}$, $\eta'\in\gamma_\eta$. Интегрируя по λ, получаем в силу (3.11) равенство (3.27).

3.7. Аналог формулы Планшереля. Как следствие из формулы обращения для преобразования Фурье получаем

Теорема 3.3. *Для любой финитной C^∞ функции f на G имеет место равенство*:

$$\int\limits_G |f(g)|^2\,d\mu(g) = \\ = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,|\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi \quad (3.28)$$

(*обозначения те же, что в п.* 3.6).

Для доказательства подставим в интеграл $\int\limits_G f(g)\overline{f(g)}\,d\mu(g)$ вместо множителя $\overline{f(g)}$ его выражение через $\mathcal{F} f$ согласно формуле обращения

(3.26). Так как $\overline{\Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)} = \Phi_\chi(g;\xi,\eta)$, мы получим:

$$\int\limits_G |f(g)|^2\, d\mu(g) = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_G \int\limits_{X_0} \int\limits_{\gamma_\eta} \int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\, f(g)\Phi_\chi(g;\xi,\eta)\overline{\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\, d\chi\, d\mu(g) =$$
$$= -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0} \int\limits_{\gamma_\eta} \int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\; \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\overline{\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\, d\chi.$$

Обозначим через H_{X_0} гильбертово пространство функций $\varphi(\xi,\eta;\chi)$, где $\xi,\eta\in\mathbb{C}^2\setminus 0$, $\chi\in X_0$, удовлетворяющих тем же условиям однородности (3.15), что и $\mathcal{F} f$, с нормой

$$\|\varphi\|^2 = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0} \int\limits_{\gamma_\eta} \int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\, |\varphi(\xi,\eta;\chi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\, d\chi.$$

В силу формулы Планшереля оператор $\mathcal{F}$, определенный первоначально только на финитных C^∞ функциях, продолжается на все пространство $L^2(G)$ и задает изометрическое отображение

$$\mathcal{F}\colon\ L^2(G) \to H_{X_0}$$

Можно доказать, что это отображение на самом деле является изоморфизмом пространств.

Замечание. Можно определить $H_{X_0} = H$ и не фиксируя $X_0 \subset X$, как пространство функций на всем множестве X унитарных характеров с нормой

$$\|\varphi\|^2 = -2^{-7}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X} \int\limits_{\gamma_\eta} \int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\, |\varphi(\xi,\eta;\chi)|^2\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)}\, d\chi,$$

удовлетворяющих дополнительно условию симметрии (3.23).

3.8. Связь преобразования Фурье на G с представлениями группы $G \times G$.. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(G)$. В нем естественно определено унитарное представление группы $G\times G$ операторами сдвига:

$$(T(g_1,g_2)f)(g) = f(g_1^{-1}gg_2).$$

Задача гармонического анализа на G состоит в том, чтобы разложить это представление на неприводимые. Сначала построим неприводимые представления группы $G \times G$. Возьмем собственное подпространство операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$, порожденное орисферическими функциями $\Phi_{\chi^{-1}}(\,\cdot\,;\xi,\eta)$, где $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$. Элементы этого пространства можно представить в виде:

$$f_\chi(g) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} u_\chi(\xi,\eta)\Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)}, \tag{3.29}$$

где $u_\chi(\xi,\eta)$ удовлетворяет условию однородности:

$$u_\chi(\lambda_1\xi,\lambda_2\eta) = \chi^{-1}(\lambda_1)\,|\lambda_1|^{-2}\chi(\lambda_2)\,|\lambda_2|^{-2}u_\chi(\xi,\eta)$$

для любых $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Интегрирование ведется по произвольным поверхностям γ_η, γ_ξ в $\mathbb{C}\setminus 0$, пересекающим по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0; от их выбора интеграл не зависит.

Введем в пространстве функций f_χ норму

$$\|f_\chi\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} |u_\chi(\xi,\eta)|^2\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)} \tag{3.30}$$

и рассмотрим пространство L^2 по этой норме, которое обозначим через $\mathcal{H}_\chi$. Сдвиги на G индуцируют в $\mathcal{H}_\chi$ унитарное представление T_χ группы $G \times G$, имеющее в функциях $u_\chi(\xi,\eta)$ следующий вид:

$$(T_\chi(g_1,g_2)u_\chi)(\xi,\eta) = u_\chi(\xi g_1,\eta g_2).$$

Очевидно, что T_χ является тензорным произведением унитарных представлений отдельных сомножителей в $G \times G$. Именно, имеем:

$$\mathcal{H}_\chi = H_{\chi^{-1}} \otimes H_\chi,$$
$$T_\chi(g_1,g_2) = \tau_{\chi^{-1}}(g_1) \otimes \tau_\chi(g_2),$$

где H_χ — гильбертово пространство функций $\varphi(\xi)$ на $\mathbb{C}^2\setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности

$$\varphi(\lambda\xi)\,\chi(\lambda)\,|\lambda|^{-2}\varphi(\xi), \quad \lambda \neq 0,$$

с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} |\varphi(\xi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)};$$

$\tau_{\chi^{-1}}$, τ_χ — операторы представлений группы G в пространствах $H_{\chi^{-1}}$, H_χ соответственно:

$$(\tau_\chi(g)\varphi)(\xi) = \varphi(\xi g). \tag{3.31}$$

Из теории представлений группы $G = SL(2,\mathbb{C})$ известно[1)], что представления τ_χ неприводимы и два представления τ_{χ_1}, τ_{χ_2}, $\chi_1 \neq \chi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi_2 = \chi_1^{-1}$. Отсюда следует, что представления T_χ группы $G \times G$ неприводимы и представления T_{χ_1}, T_{χ_2}, $\chi_1 \neq \chi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi_2 = \chi_1^{-1}$.

Мы хотим разложить функции $f \in L^2(G)$ по функциям $f_\chi \in \mathcal{H}_\chi$. Для этого строим оператор $P_\chi : L^2(G) \to \mathcal{H}_\chi$

$$P_\chi f = f_\chi,$$

где f_χ задается равенством (3.29), в котором

$$u_\chi(\xi,\eta) = \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)$$

Очевидно, что этот оператор перестановочен с действием $G \times G$ в пространствах $L^2(G)$ и $\mathcal{H}_X$. Нетрудно далее убедиться, что $P_\chi \neq 0$ для любого χ. Из формулы обращения (3.26) и формулы Планшереля (3.28) для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ непосредственно следует

Теорема 3.4. *Функции $f \in L^2(G)$ разлагаются по функциям $f_\chi = P_\chi f$, а именно, имеют место следующие равенства*:

$$f = -2^{-6}\pi^{-5} \int\limits_{X_0} c(\chi)\, f_\chi \, d\chi, \tag{3.32}$$

$$\int\limits_G |f(g)|^2 \, d\mu(g) = -2^{-6}\pi^{-5} \int\limits_{X_0} c(\chi) \|f_\chi\|^2 \, d\chi, \tag{3.33}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ для $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}} \bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$; интегрирование ведется по произвольному фиксированному подмножеству характеров $X_0 \subset X$, которое содержит из почти каждой пары характеров χ, χ^{-1} точно по одному представителю.

Следствие. *Представление T группы $G \times G$ в пространстве $L^2(G)$ имеет однократный спектр, т. е. оно разлагается на попарно неэквивалентные неприводимые представления.*

[1)] См., например: Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып. 5.

Отметим, что однократность спектра представления T (т.е. то, что в (3.32), (3.33) интегрирование ведется только по X_0, а не по всему множеству характеров X) является следствием соотношения симметрии для преобразования Фурье $\mathcal{F}$.

Замечание. Однократность спектра — обычный факт, наблюдаемый при разложении представлений, связанных с симметрическими пространствами (см. главу III, где рассмотрены представления, связанные с плоскостью и пространством Лобачевского).

3.9. Связь с представлениями группы G. Обсудим полученные результаты с точки зрения теории представлений группы G. Рассмотрим унитарное представление группы G в пространстве $L^2(G)$ операторами правого сдвига:

$$(\tau(g_0)\varphi)(g) = \varphi(gg_0)$$

(так называемое регулярное представление). Его проекция $\widetilde{\tau}_\chi$ на пространство $\mathcal{H}_\chi = H_{\chi^{-1}} \otimes H_\chi$ есть тензорное произведение

$$\widetilde{\tau}_\chi = I \otimes \tau_\chi,$$

где I — единичное представление в $H_{\chi^{-1}}$, а τ_χ — неприводимое унитарное представление в H_χ, заданное равенством (3.31). Отсюда следует, что $\widetilde{\tau}_\chi$ кратно неприводимому унитарному представлению τ_χ группы G. Таким образом, равенства (3.32) и (3.33) задают разложение регулярного представления группы G на попарно дизъюнктные представления, кратные неприводимым представлениям.

В терминах представлений группы G преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ имеет следующий простой смысл. Рассмотрим для каждого $\chi \in X$ неприводимое представление τ_χ группы G в пространстве H_χ. Отнесем каждой финитной C^∞ функции f на G следующий оператор в пространстве H_χ:

$$\widehat{\tau}_\chi(f) = \int_G f(g)\tau_\chi(g)\,d\mu(g). \tag{3.34}$$

Этот оператор действует на функции $\varphi \in H_\chi$ так:

$$(\widehat{\tau}_\chi(f)\varphi)(\xi) = \int_G f(g)\,\varphi(\xi g)\,d\mu(g). \tag{3.35}$$

Предложение 3.7. *Ядром оператора $\widehat{\tau}_\chi(f)$ является (в однородных координатах ξ, η) функция $\mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi^{-1})$, т. е.*

$$(\widehat{\tau}_\chi(f)\varphi)(\xi) = \frac{i}{2}\int_{\gamma_\eta} \mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi^{-1})\,\varphi(\eta)\,\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)}. \tag{3.36}$$

В самом деле, разобьем интегрирование по G в (3.35) на два этапа: сначала по орисферам $\xi g = \eta$ — это дает орисферическое преобразование $\mathcal{R}\,f(\xi,\eta)\,\varphi(\eta)$, а затем по η. Мы получим:

$$(\widehat{\tau_\chi}(f)\varphi)(\xi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R}\,f(\xi,\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta\,d\overline{\eta}, \quad d\eta = d\eta_1 d\eta_2.$$

Перейдем здесь к "полярным" координатам $\eta = \lambda\eta'$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta' \in \gamma_\eta$. Так как $\varphi(\lambda\eta) = \chi(\lambda)|\lambda|^{-2}\varphi(\eta)$, $d\eta = \lambda\,d\lambda\omega(\eta)$, то после интегрирования по λ получаем (3.36).

Следствие. *Оператор $\widehat{\tau_\chi}(f)$ имеет след, равный*

$$\operatorname{Tr}\,\widehat{\tau_\chi}(f) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F}\,f(\xi,\xi;\chi^{-1})\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}. \tag{3.37}$$

Опираясь на полученный результат, мы можем сосчитать след унитарного оператора $\tau_\chi(g)$. Разумеется, этот оператор не имеет следа в обычном смысле. Однако естественно определить $\operatorname{Tr}\,\tau_\chi(g)$ как обобщенную функцию в пространстве основных функций на G:

$$\langle \operatorname{Tr}\,\tau_\chi(\cdot), f\rangle = \operatorname{Tr}\,\widehat{\tau_\chi}(f).$$

Предложение 3.8.

$$\operatorname{Tr}\,\tau_\chi(g) = \frac{\chi(\lambda_g^{(1)}) + \chi(\lambda_g^{(2)})}{|\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)}|}, \tag{3.38}$$

где $\lambda_g^{(1)}$, $\lambda_g^{(2)}$ — собственные значения матрицы g.

Доказательство. Согласно определению $\mathcal{F}\,f$, имеем:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F}\,f(\xi,\xi,\chi^{-1})\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)} =$$

$$= \frac{i}{2}\iint\limits_{\gamma_\xi\,G} \delta(\xi_2(\xi_1\alpha+\xi_2\gamma)-\xi_1(\xi_1\beta+\xi_2\delta))\,\chi\left(\frac{\xi_1\beta+\xi_2\delta}{\xi_2}\right) f(g)\,d\mu(g)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}.$$

Отсюда следует, если принять в качестве γ_ξ прямую $\xi_1 = t$, $\xi_2 = 1$:

$$\operatorname{Tr}\,\tau_\chi(g) = \frac{i}{2}\int \delta(t\alpha+\gamma-t(t\beta+\delta))\,\chi(t\beta+\delta)\,dt\,d\overline{t} =$$

$$= \frac{i}{2}\int \delta\left((s-\lambda_g^{(1)})(s-\lambda_g^{(2)})\right)\chi(s)\,ds\,d\overline{s}. \tag{3.39}$$

(последнее равенство получается заменой переменной $t\beta + \delta = s$). Формула (3.38) следует непосредственно из (3.39).

Опираясь на то, что $\mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi^{-1})$ есть ядро оператора $\widehat{\tau}_\chi(f)$, мы можем придать другой вид формуле Планшереля. Именно, рассмотрим оператор $\widehat{\tau_\chi}(f)\widehat{\tau_\chi}^*(f) = \widehat{\tau}_\chi(f * f^*)$, где $\widehat{\tau}^*_\chi(f)$ — оператор, сопряженный $\widehat{\tau}_\chi(f)$. Его ядро есть, см. (3.18),

$$\varphi(\xi, \eta; \chi) = \frac{i}{2} \int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi, \zeta; \chi)\, \mathcal{F} f(\eta, \zeta, \chi)\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Tr}(\widehat{\tau}_\chi(f)\widehat{\tau}^*_\chi(f)) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta} \int\limits_{\gamma_\xi} |\mathcal{F} f(\xi, \zeta; \chi)|^2 \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\, \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}.$$

В результате формула Планшереля (3.28) может быть представлена в виде

$$\int |f(g)|^2 \, d\mu(g) = 2^{-6}\pi^{-5} \int\limits_{X_0} c(\chi) \operatorname{Tr}(\widehat{\tau}_\chi(f)\widehat{\tau}^*_\chi(f))\, d\chi. \tag{3.40}$$

Примечание. Разложение (3.25) имеет смысл не только для основных, но и для обобщенных функций на G. Заметим, что дельта-функцию $\delta(g)$ на G естественно рассматривать как характер регулярного представления. Поэтому формулу обращения (3.25) для $\delta(g)$ можно представить в виде:

$$\delta(g) = 2^{-6}\pi^{-5} \int\limits_{X_0} c(\chi) \operatorname{Tr} \tau_\chi(g)\, d\chi. \tag{3.41}$$

§ 4. Другая версия преобразования Фурье на $G = SL(2, \mathbb{C})$

В § 3 построены проекции функций на G на собственные подпространства операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$. Проектирование осуществлялось там, исходя из зональных орисферических функций $\Phi_\chi(g) = \delta(\gamma)\,\chi(\alpha)$. Но можно осуществить проектирование иначе, исходя из зональных функций Ψ_χ,

$$\Psi_\chi(g) = \chi^{-1}(\gamma)\,|\gamma|^{-2}, \text{ где } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

(см. п. 3.2). При этом возникает другая версия преобразования Фурье на G, краткому изложению которой посвящен данный параграф.

4.1. Функции $\Psi_\chi(g;\xi,\zeta)$.. Определим аналоги функций $\Phi_\chi(g;\xi,\eta)$ из § 3 равенством:

$$\Psi_\chi(g_1 g g_2^{-1}) = \Psi_\chi(g;\xi,\zeta), \tag{4.2}$$

где $\xi,\zeta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ определяются из соотношений

$$\xi = \xi_0 g_1,\ \zeta = \zeta_0 g_2,\ \text{где } \xi_0 = \zeta_0 = (0,1); \tag{4.3}$$

легко убедиться, что левая часть в (4.2) не зависит от выбора матриц $g_1, g_2 \in G$, удовлетворяющих условиям (4.3). В частности,

$$\Psi_\chi(g) = \Psi_\chi(g;\xi_0,\zeta_0).$$

Из (4.1), (4.2) получаем явное выражение для этих функций:

$$\Psi_\chi(g;\xi,\zeta) = \chi^{-1}(\xi g \zeta^\perp)\,|\xi g \zeta^\perp|^{-2}. \tag{4.4}$$

Отметим два свойства функций Ψ_χ (они непосредственно следуют из определения):

$$\Psi_\chi(g_1 g g_2^{-1};\xi,\zeta) = \Psi_\chi(g;\xi g_1,\zeta g_2) \tag{4.5}$$

для любых $g_1, g_2 \in G$;

$$\Psi_\chi(g\,;\lambda_1\xi,\lambda_2\zeta) = \chi^{-1}(\lambda_1\lambda_2)\,|\lambda_1\lambda_2|^{-2}\Psi_\chi(g\,;\xi,\zeta) \tag{4.6}$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Теорема 4.1. *Функции Ψ_χ связаны с орисферическими функциями Φ_χ из § 3 соотношениями:*

$$\Psi_\chi(g;\xi,\zeta) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\eta} \Phi_\chi(g;\xi,\eta)\,\chi^{-1}(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)}; \tag{4.7}$$

$$\Phi_\chi(g;\xi,\eta) = (2\pi)^{-4}\,c(\chi)\,\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \Psi_\chi(g;\xi,\zeta)\,\chi(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}, \tag{4.8}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ при $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$. Интегрирование ведется по произвольным поверхностям γ_η и γ_ζ в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающим по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0.

Оба интеграла нужно понимать как интегралы от обобщенных функций. Мы не будем приводить их строгого определения и ограничимся формальным доказательством соотношений (4.7) и (4.8)

Заметим прежде всего, что эти равенства достаточно доказать для каких-либо фиксированных g и $\xi = \xi_0$. Приняв $g = e$, $\xi_0 = (1, 0)$, имеем:

$$\Phi_\chi(e, \xi_0, \eta) = \delta(\eta_2)\, \chi(\eta_1);$$
$$\Psi_\chi(e, \xi_0, \zeta) = \chi^{-1}(\zeta_2)\, |\zeta_2|^{-2}.$$

Если в (4.7), где $g = e$ и $\xi = \xi_0$, в качестве γ_η взять прямую $\eta_1 = 1$, то интеграл принимает вид:

$$\frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \delta(\eta_2)\, \chi^{-1}(\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)\, |\zeta_2 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\, d\eta_2\, d\overline{\eta}_2.$$

Очевидно, этот интеграл равен $\chi^{-1}(\zeta_2)\, |\zeta_2|^{-2}$, т.е. равен $\Psi_\chi(e, \xi_0, \zeta)$.

Аналогично, если в (4.8) , где $g = e$ и $\xi = \xi_0$, в качестве γ_ζ взять прямую $\zeta_2 = 1$, то интеграл принимает вид:

$$\frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \chi(\eta_1 - \eta_2\zeta_1)\, |\eta_1 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\, d\zeta_1\, d\overline{\zeta}_1 = \\ = \chi(\eta_1)\, \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \chi(1 - \eta_2\zeta_1)\, |1 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\, d\zeta_1\, d\overline{\zeta}_1. \qquad (4.9)$$

Очевидно, что обобщенная функция

$$\varphi(\eta_2) = \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} \chi(1 - \eta_2\zeta_1)\, |1 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\, d\zeta_1\, d\overline{\zeta}_1$$

удовлетворяет условию однородности: $\varphi(\lambda\eta_2) = |\lambda|^{-2}\varphi(\eta_2)$. Отсюда следует, что $\varphi(\eta_2) = c\,\delta(\eta_2)$.

Вычисление множителя c мы оставляем читателю как полезное упражнение в интегрировании обобщенных функций.

4.2. Преобразование Фурье на G.

Определение. Определим преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}}f$ финитной C^∞ функции f на G равенством:

$$\widehat{\mathcal{F}}f(\xi, \zeta; \chi) = \langle \Psi_\chi(\cdot, \xi, \zeta), f \rangle = \int\limits_G f(g)\, \chi^{-1}(\xi g \zeta^\perp)\, |\xi g \zeta^\perp|^{-2}\, d\mu(g). \qquad (4.10)$$

Существует простое соотношение между преобразованием Фурье $\widehat{\mathcal{F}}f$ и интегральным преобразованием $\mathcal{R}^p f$ из §2, связанным с параболоидами на G. Именно, сравнивая определение $\widehat{\mathcal{F}}f$ с определением $\mathcal{R}^p f$ (формула (2.20)), мы получаем:

Теорема 4.2. *Операторы $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{R}^p$ связаны соотношением:*

$$\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi) = \frac{i}{2}\int \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta;p)\,\chi^{-1}(p)|p|^{-2}\,dp\,d\overline{p}. \tag{4.11}$$

Таким образом, $\widehat{\mathcal{F}}f$ получается из $\mathcal{R}^p f$ преобразованием Меллина по p; ср. соотношение между $\mathcal{F}f$ и $\mathcal{R}f$ из п. 3.4. Отсюда, применяя формулу обращения для преобразования Меллина, получаем

Следствие. *Функция $\mathcal{R}^p f$ выражается через $\widehat{\mathcal{F}}f$ равенством:*

$$\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) = (2\pi)^{-2}\int_X \widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta,\chi)\,\chi(p)\,d\chi, \tag{4.12}$$

где интеграл берется по множеству X унитарных характеров.

4.3. Связь между двумя вариантами преобразования Фурье. Из соотношений между орисферическими функциями Ψ_χ и Φ_χ, установленными в п. 4.1, следует, что теми же соотношениями связаны функции $\widehat{\mathcal{F}}f$ и $\mathcal{F}f$, где $\mathcal{F}$ — оператор Фурье, введенный в §3.

Теорема 4.3. *Операторы Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$ связаны соотношениями:*

$$\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi) = \frac{i}{2}\int_{\gamma_\eta} \mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,\chi^{-1}(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}; \tag{4.13}$$

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi) = (2\pi)^{-4}c(\chi)\frac{i}{2}\int_{\gamma_\zeta} \widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi)\,\chi(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}, \tag{4.14}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ при $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\overline{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$.

Замечание. Эти соотношения можно установить и непосредственно, используя уже полученные соотношения между интегральными преобразованиями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^p$, $\mathcal{R}^p$ и $\widehat{\mathcal{F}}$.

4.4. Соотношение симметрии. Из (4.13) и соотношения симметрии для $\mathcal{F} f$ получаем:

Теорема 4.4. *Функции $\mathcal{F} f$ удовлетворяют соотношению симметрии:*

$$\widehat{Z}(g;\chi) = \widehat{Z}(g,\chi^{-1}) \text{ для любых } g \in G,\ \chi \in X, \tag{4.15}$$

где

$$\widehat{Z}(g,\chi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} \widehat{\mathcal{F}} f(\xi,\zeta;\chi)\,\chi(\xi g\zeta^\perp)\,|\xi g\zeta^\perp|^{-2}\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}.$$

4.5. Формула обращения и формула Planшереля для преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$.

Теорема 4.5. *Любая финитная C^∞ функция f на G выражается через свое преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}} f$ по формуле обращения:*

$$f(g) = -2^{-8}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\widehat{\mathcal{F}} f(\xi,\zeta;\chi)\,\Psi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\zeta)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi, \tag{4.16}$$

где X_0 — любое подмножество множества X унитарных характеров $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, содержащее ровно по одному представителю из почти каждой пары характеров χ, χ^{-1}.

В самом деле, из формулы обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^p$, связанного с параболоидами на G, см. (2.25), и из установленного здесь соотношения между $\mathcal{R}^p f$ и $\widehat{\mathcal{F}} f$ непосредственно следует:

$$f(g) = -2^{-9}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{X}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\widehat{\mathcal{F}} f(\xi,\zeta;\chi)\chi(\xi g\zeta^\perp)\,|\xi g\zeta^\perp|^{-2}\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi =$$
$$= -2^{-9}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{X}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\widehat{\mathcal{F}} f(\xi,\zeta;\chi)\,\Psi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\zeta)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi. \tag{4.17}$$

В силу соотношения симметрии (4.15) для $\widehat{\mathcal{F}}f$ интеграл по X в формуле (4.17) можно заменить удвоенным интегралом по подмножеству $X_0 \subset X$.

Отметим аналогию между формулой обращения (4.16) и исходной формулой (4.10), выражающей $\widehat{\mathcal{F}}f$ через f.

Так же, как и в случае преобразования Фурье $\mathcal{F}$, из формулы обращения (4.16) получаем

Следствие. *Для функций на G выполняется формула Планшереля*:

$$\int\limits_G |f(g)|^2\, d\mu(g) = -2^{-8}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\, |\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta,\chi)|^2\, \omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}\, d\chi. \quad (4.18)$$

Согласно следствию преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$, первоначально определенное только для финитных C^∞ функций на G, продолжается на все функции из $L^2(G)$.

4.6. Связь с теорией представлений. Все рассуждения из § 3 о связи преобразования Фурье $\mathcal{F}$ с теорией представлений могут быть повторены без существенных изменений и в применении к преобразованию Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$. Именно, чтобы разложить представление T группы $G\times G$ в пространстве $L^2(G)$ на неприводимые представления, мы рассматриваем собственное пространство операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$, порожденное орисферическими функциями $\Psi_{\chi^{-1}}(\,\cdot\,;\xi,\zeta)$, где $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\,\overline{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$. Его элементы можно представить в виде

$$\widehat{f}_\chi(g) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} \widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)\,\Psi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\zeta)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}, \quad (4.19)$$

где $\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)$ удовлетворяет условию однородности:

$$\widehat{u}_\chi(\lambda_1\xi,\lambda_2\zeta) = \chi^{-1}(\lambda_1\lambda_2)|\lambda_1\lambda_2|^{-2}\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)$$

для любых $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}\setminus 0$. Введем в пространстве функций $\widehat{f}_\chi$ норму

$$||\widehat{f}_\chi||^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} |\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)|^2\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}$$

и рассмотрим пространство L^2 по этой норме, которое обозначим через $\widehat{H}_\chi$. Сдвиги на G индицируют в $\widehat{H}_\chi$ неприводимое унитарное представление T_χ группы $G \times G$, имеющее в функциях $\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)$ вид:

$$(T_\chi(g_1,g_2)\widehat{u}_\chi)(\xi,\zeta) = \widehat{u}_\chi(\xi g_1, \zeta g_2).$$

Мы строим далее операторы $\widehat{P}_\chi : L^2(G) \to \widehat{H}_\chi$,

$$\widehat{P}_\chi f = \widehat{f}_\chi,$$

где $\widehat{f}_\chi$ задается равенством (4.19), в котором

$$\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta) = \widehat{\mathcal{F}} f(\xi,\zeta;\chi).$$

Искомое разложение представления T задается равенствами:

$$f = -2^{-8}\pi^{-7} \int\limits_{X_0} c^2(\chi)\widehat{f}_\chi \, d\chi, \quad \widehat{f}_\chi = \widehat{P}_\chi f, \tag{4.20}$$

$$\int\limits_G |f(g)|^2 \, d\mu(g) = 2^{-8}\pi^{-7} \int\limits_{X_0} c^2(\chi)\, \|\widehat{f}_\chi\|^2 \, d\chi. \tag{4.21}$$

Они следуют непосредственно из формулы (4.16) и формулы Планшереля (4.18) для преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$.

Так как разложение представления T группы $G \times G$ на неприводимые представления единственно ввиду однократности спектра, то полученное разложение совпадает с разложением, полученным в п. 3.8. Именно, мы имеем:

$$\widehat{f}_\chi = c^{-1}(\chi)\, f_\chi, \quad \|\widehat{f}_\chi\| = c^{-1/2}(\chi)\|f_\chi\|.$$

Отметим, что равенство $\widehat{f}_\chi = c^{-1}(\chi)\, f_\chi$ эквивалентно полученным выше соотношениям между $\mathcal{F} f$ и $\widehat{\mathcal{F}} f$.