

## О моих контактах с кафедрой дифференциальных уравнений МГУ

А. Д. Мышкис

В начале 1981 г. ко мне обратились с кафедры дифференциальных уравнений МГУ (по-моему, в связи с каким-то юбилеем) с просьбой написать о кафедре и, в первую очередь, о тех из работавших на ней, кого уже нет с нами. Я охотно взялся за это, написал (окончание датируется 02.04.81) некое сочинение и отослал его на кафедру. Насколько мне известно, никаких последствий у этой акции не было, к чему я, впрочем, не имел претензий, меня вполне удовлетворило радостное волнение, которое я испытал, вспоминая свою молодость. Позже я давал читать эти воспоминания моим друзьям, делавшим различные замечания. Наиболее существенными были замечания О. А. Ладыженской, напомнившей мне некоторые эпизоды, вылетевшие в свое время из моей памяти; ей я особенно благодарен.

Ниже приводится текст 1981 г., несколько уточнённый в связи со сделанными замечаниями, а также содержащий небольшое число дополнений.

Моё первое знакомство с кафедрой дифференциальных уравнений (ДУ) состоялось осенью 1938 г., когда я стал студентом 2-го курса механики. Иван Георгиевич Петровский (И. Г.) читал на нашем курсе лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а С. А. Гальперн (С. А.) в нашей группе вёл практические занятия. К тому времени я уже установил, что для меня лучшая манера занятий — не слушать лекции, а читать подряд соответствующий учебник, в каждый небольшой интервал времени (1 – 2 месяца) только один, от начала до конца, после чего сдать экзамен досрочно и переходить к следующей дисциплине. Поэтому я взял книгу Вячеслава Васильевича Степанова и довольно быстро прочитал её. Помню двойственное впечатление от неё: с одной стороны, общие красивые строго доказанные факты, остроумные приёмы, а с другой — отдельные рассуждения, справедливые «вообще говоря». А подобные рассуждения «критически мыслящая» личность, воспитанная на ТФДП, вообще отказывалась считать математикой...

Но тут подоспела отпечатанная на машинке рукопись И. Г., которая в дальнейшем легла в основу его известной книги; рукопись можно было

взять в читальном зале. Все трудности, связанные с рассуждениями «вообще говоря», сразу отпали, теория ОДУ была в моих глазах полностью реабилитированной. В то же время, переход на естественный для математического анализа уровень строгости дал возможность обнаружить три неточных места, содержащихся в рукописи. Одно из них относилось к нелокальному рассмотрению уравнения в полных дифференциалах, другое — к необходимости сослаться на теорему о промежуточном значении производной дифференцируемой функции, а третье — к приведению системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду: один из случаев был пропущен. Я сообщил эти замечания И. Г., и он быстро согласился с ними. Это была моя первая беседа с И. Г., и я хорошо помню впечатление, которая произвела на меня его своеобразная «рубленая» манера говорить, его подчёркнутое внимание к собеседнику, обращение по имени и отчеству, неожиданные движения головы и плеч... Прошло несколько дней, и И. Г. показал мне, как он изменил указанные места; я был полностью удовлетворён. Вскоре я досрочно сдал И. Г. экзамен, а когда на следующее лето вышла его книга, я был приятно поражён тем, что в предисловии была выражена благодарность «В. В. Степанову, С. А. Гальперну и А. Д. Мышкис, которые просмотрели всю мою рукопись и сделали ряд ценных указаний»; от радости я даже не заметил, что был превращён в женщину. Тогда же И. Г. подарил мне эту книгу с надписью «от автора». На меня, начинающего студента, это уважительное отношение сильно подействовало.

С. А. по тому времени я плохо запомнил, потому что формальные упражнения я не очень любил, домашних заданий не выполнял, а после сдачи экзамена вообще перестал посещать занятия. Запомнил только его своеобразное произношение «штрих» и «два штриха».

Следующая моя встреча с кафедрой состоялась на 3-м курсе, когда Сергей Львович Соболев (С. Л.) начал читать нашему курсу лекции по уравнениям математической физики (УМФ), а И. Г. вёл в нашей группе практические занятия по этой дисциплине. (Впрочем, С. Л. встречался однажды с нашим курсом раньше в качестве своего рода «звезды», каковой он был в те годы, — он уже стал академиком — и рассказывал о математике, о себе, отвечал на вопросы.) Лекции С. Л. были очень содержательными, но порой слишком быстрыми; впрочем, как будто, и они были подкреплены машинописным текстом, который впоследствии лёг в основу известной книги. И. Г. вёл практические занятия своеобразно, в форме учебного семинара, поручая студентам делать доклады на отдельные небольшие темы. Например, я подготовил доклад о выводе стандартного уравнения колебаний струны и в течение часа проводил этот вывод: поскольку обычный вывод, основанный на физических отображениях, меня не устраивал (вообще, «критически мыслящая» личность не считала

физику полноценной наукой), я придумал систему искусственных постулатов, из которой это уравнение вытекало на полностью дедуктивном уровне. И. Г. никак не ожидал таких последствий своего поручения.

Лекций В. В. Степанова (В. В.) мне тогда не довелось слышать. (По-моему, я вообще не присутствовал ни на одной лекции В. В., хотя позже не раз разговаривал с ним; помню его темпераментные выступления и реплики.) Но на нашем курсе его хорошо знали, так как он читал лекции по вариационному исчислению на потоке механиков, принимал активное участие в экзаменах, да и вообще, по-моему, на мехмате все студенты знали В. В. О нём ходили всякие рассказы (а иногда их и сочиняли): как он, придя по ошибке на 2-й курс (лектора почему-то не было), стал читать лекцию по вариационному исчислению, и студенты в течение часа стеснялись указать ему на ошибку (большинство её и не заметило) и добросовестно записывали лекцию; как он на каком-то банкете предложил тост за здоровье студента, весьма непочтительно ответившего одному из профессоров, которому В. В. не симпатизировал; как он в конце лекции назначил курсу консультацию «во вторницу», а в начале следующей лекции, вспомнив о своей ошибке, просунул голову в дверь и произнёс «к» и т. д.

В июне 1941 г., сразу после начала войны, мужскую часть нашего курса послали под Рославль на строительство противотанковых рвов. Через два месяца, когда немцы подошли совсем близко, нас вернули в Москву и объявили, что мы мобилизованы и через 2–3 дня нас повезут в Свердловск для обучения в эвакуированной туда Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского (ВВИА). За эти дни я сдал госэкзамен вместе со старшим курсом (в связи с военными обстоятельствами мне разрешили сделать это без прохождения 5-го курса) и получил диплом об окончании МГУ.

Несколько позже в Свердловск переехала большая часть преподавателей мехмата МГУ, в том числе и И. Г., который тогда был деканом. После некоторого периода естественного смятения я решил совместить учёбу в ВВИА с математической аспирантурой. А так как И. М. Гельфанда (И. М.), который шефствовал надо мной, когда я был студентом мехмата, в Свердловске не было, и мои интересы еще не вполне определились (как, увы, они не вполне определились и до сих пор), то я решил поступать к И. Г., поскольку я с ним всё же был знаком. И. М., которого я в этот период увидел проездом в Казани, полностью одобрил это намерение. (Кстати, отмечу, что И. М. был вообще очень высокого мнения об И. Г. Помню, как он, ещё не будучи академиком, при мне сказал: «Сейчас среди академиков есть только три математика: это Бернштейн, Колмогоров и Петровский».) И. Г. любезно согласился на это, и в начале 1943 г., кое-как сдав вступительные экзамены, я поступил в аспирантуру, сначала на заочное отделение, а позже, оставаясь слушателем ВВИА, был

переведён на стационар. Хорошо помню комнатку в городке Уральского политехнического института, в которой жил И. Г. с Ольгой Афанасьевой и куда мне изредка удавалось попасть в нарушение строгих военных порядков.

Тогда до стационарных программ кандидатского минимума, слава Богу, ещё не додумались, и И. Г. составил мне в общих чертах эту программу. К сожалению, детали выветрились из моей памяти, но я хорошо помню, что И. Г. большое значение придавал широте математического образования, говоря, что более специальные вопросы, которые мне понадобятся для диссертации, я освою сам. Первый из кандидатских экзаменов был по ТФДП и включал теорию тригонометрических рядов (детально программу составил Д. Е. Меньшов на основе известной книги А. Зигмунда) и теорию интеграла Данжуа. В это время в Свердловск был эвакуирован и Кабинет математики и механики МГУ, и И. Г. дал мне записку, по которой я мог брать оттуда книги и журналы на дом — точнее, в казарму.

Летом 1943 г. ВВИА была реэвакуирована в Москву и, к счастью для меня, это совпало с реэвакуацией мехмата. Следующим был экзамен по топологии, основанный на книгах Р. Alexandroff – Н. Норф и Г. Зейферта – В. Трельфалля. Затем был экзамен по алгебраической геометрии, но его объём я сейчас забыл.

По ДУ как будто был зачёт, хотя полной уверенности в этом у меня нет. ОДУ были представлены книгой В. В. Немыцкого и В. В. Степанова, рукопись которой, отпечатанная на машинке, хранилась в Кабинете математики и механики. Надо сказать, что главы, которые я читал, были написаны довольно небрежно. В некоторых местах имелись пробелы в формулировках и доказательствах, припоминаю даже утверждение, неверное по своей идее. Небрежность порой доходила до курьёза: так, при изложении работы И. Г. по особым точкам встречались утверждения типа «из уравнения (17) следует и т. д.», тогда как никакого уравнения (17) в рукописи не было; когда же я догадался посмотреть оригинальную работу И. Г., то уравнение (17) оказалось там! Я написал большой список замечаний и отдал его В. В. Степанову, который был несколько смущён, но сказал, что это не его главы. (Впоследствии я не раз убеждался в том, что у Виктора Владимировича Немыцкого соединялись глубокие познания и эрудиция с некоторой небрежностью в письменном изложении, начиная с органической неприязни к знакам препинания.)

Уравнения с частными производными (УрЧП) в зачёте были представлены VIII томом «Успехов математических наук» (1941) со статьями С. Н. Бернштейна, М. В. Келдыша, Л. А. Люстерника и И. Г. Петровского, главой о вариационных методах из 2-го тома книги Р. Куранта – Д. Гильберта и несколькими статьями, перечень которых я забыл.

Летом 1944 г. мой курс окончил ВВИА. Здесь важную поддержку мне оказал И. Г.: по собственной инициативе, без моего ведома он рекомендовал меня Владимиру Васильевичу Голубеву, который был тогда начальником кафедры высшей математики ВВИА, и меня оставили на этой кафедре младшим преподавателем. Естественно, что общение с И. Г. стало более частым. Я бывал у него в квартире на Тверской-Ямской, на даче в посёлке Железнодорожном. (Как объяснил мне И. Г., этот посёлок — та самая Обираловка, где бросилась под поезд Анна Каренина.) Разговоров по существу о математике было мало, мы больше говорили на «околоматематические темы», а также темы, далеко выходящие за пределы математики. При этом И. Г. порой поражал меня глубоким знанием гуманитарных и естественных дисциплин и своими оригинальными высказываниями; некоторые из них я приведу ниже. На даче И. Г. любил далёкие пешие прогулки по испытанным маршрутам и охотно совершал их с собеседниками.

Не знаю, как другими своими аспирантами, но мной И. Г. не руководил в обычном узком смысле: не давал заданий, не спрашивал, чем я в данный момент занимаюсь и т. п. Контакты состояли в упомянутых беседах, а также в следующем: когда И. Г. проводил консультации (а к нему в определённые часы приходили с вопросами представители разных специальностей), я сидел недалеко и слушал, как он пытается разобраться в вопросе и, когда это ему удавалось, давал краткий ответ. Кроме того, И. Г. иногда поручал мне разобраться по существу в получаемых им от различных авторов рукописях и дать краткую характеристику работы или даже подготовить проект ответа. Такая форма общения для меня была чрезвычайно полезной; думаю, что во многих случаях она для работы с аспирантами близка к оптимальной.

В 1945 г. вышла моя первая работа. Она возникла в связи с тем, что при ответе на один из вопросов И. Г. мне понадобилось разобраться в понятии гладкой функции в замкнутой области. На эту тему я и написал статью. И тут огромное дело для меня сделал В. В. Степанов. Он детально прочитал рукопись и сделал большое число разнообразных замечаний; никогда после этого мне не выпадала такая удача с подготовленной статьёй. Замечания были как серьёзные (например, я с тех пор хорошо понял роль организации текста с помощью продуманного расположения и расчленения материала, включения слов «Теорема доказана», «Замечание» и т. п., чтобы читатель в каждый момент чётко понимал ситуацию), так и мелкие, но существенные. Все они показывали, что В. В. разобрался в моей наивной работе самым тщательным образом.

Следующее направление моей работы — нелокальное изучение вопроса о единственности решения задачи Коши на нехарактеристике — также было инспирировано И. Г., который всегда поощрял общие рассмотре-

ния. Для этого мне пришлось обобщить понятие решения ОДУ на случай уравнений с многозначной правой частью. Я сделал это в предположении лишь локальной ограниченности правой части и очень радовался этому, полагая, что ничего подобного ещё не было; кого я ни спрашивал, никто подобного обобщения не знал. Но когда я рассказал свою работу на заседании Московского математического общества (ММО), В. В. Степанов тут же огорчил меня, сказав, что описанная мной конструкция по существу содержится в работах Маршо и Зарембы 30-х гг. (Впрочем, он вполне компенсировал это огорчение, воскликнув «Но это сенсация!» по поводу соответствующего примера неединственности решения.) Это были первые работы в направлении, которое теперь называется теорией дифференциальных включений.

В связи с этим я хочу добавить, что, вообще, по-моему, весьма активная деятельность ММО в те годы в значительной степени определялась участием в его работе В. В. и немногих других энтузиастов, которые своим энтузиазмом заражали остальных. Насколько я помню, В. В. присутствовал на всех заседаниях ММО, разбирался во всех обсуждаемых темах, задавал вопросы, часто темпераментно выступал с различными соображениями по поводу этих тем и т. д. Кстати, от кого-то (не помню, кого) я слышал, будто бы сам В. В. считал себя по математической эрудиции третьим в Советском Союзе, после В. И. Смирнова и А. И. Плеснера.

Отмечу, что на упомянутой выше работе по единственности решения можно проиллюстрировать то общее положение, что бессознательное подражание ученика учителю может иметь и отрицательные стороны. Как известно, И. Г. применял только классические решения ДУ. Поэтому, рассматривая ОДУ с многозначной правой частью, и мне не пришло в голову воспользоваться идеей решения по Каратеодори, что было сделано позже другими авторами. Это преувеличенное тяготение к классическим решениям сказывалось на мне довольно долго. (В дальнейшем проявилось еще одно отрицательное последствие подражания — преувеличенное внимание к ДУ, разрешённым относительно главных членов; это, в частности, помешало мне, когда я занялся дифференциально-функциональными уравнениями, заметить важный класс уравнений нейтрального типа.)

Осенью 1945 г. меня приняли на 1/2 ставки на должность ассистента кафедры ДУ МГУ, где я оставался до лета 1947 г. Порядки тогда были простые, в частности, заседаний кафедры в нынешнем понимании не было, все вопросы решались на ходу; помню только заседания с защитой дипломных работ. Я вёл практические занятия на 3-м (или 4-м?) курсе по УМФ и на 2-м курсе по ОДУ, участвовал в проведении консультаций и экзаменов. Из-за послевоенной путаницы на курсах объединялись студенты разного возраста, со многими я был на «ты». В одной из моих групп на 3 курсе училась Ольга Александровна Ладыженская, с которой

я был дружен, и я в трудных случаях обычно вызывал её, зная, что она не подведёт. Помню, как однажды на занятиях возник какой-то непростой вопрос и, к моему удивлению, отвечать вызвалась незнакомая мне студентка, которая дала уверенный исчерпывающий ответ. Ею оказалась Ольга Арсеньевна Олейник, с которой я позже тоже подружился; помню также, что я рецензировал её дипломную работу по регулярности граничных точек для эллиптических уравнений, впоследствии опубликованную в «Математическом сборнике».

Тут я хочу отметить мои «выдающиеся» заслуги в области УрЧП: именно я вовлёк в эту область О. А. Ладыженскую (всё-таки я был преподавателем, а она студенткой, и она была младше). А дух соревнования привел к тому, что её сокурсница О. А. Олейник также включилась в работу семинара по УрЧП (см. ниже) и нашла в этой области своё призвание.

В одной из групп 2-го курса, где я проводил практические занятия, учился Е. М. Ландис, уже известный мне со слов моего друга А. С. Кронрода, с которым он работал. Помню, как он предложил упрощение изложенного на лекциях доказательства Перрона теоремы Пеано, и на экзамене студентка предупредила меня, что она будет доказывать эту теорему «по Ландису». Впоследствии я и с ним сблизился. (Вспоминаю в качестве курьёза, как мы с О. А. Олейник принимали позже у него кандидатский экзамен по УрЧП. И. Г., его руководитель, не раз давал нам подобные поручения. Но так как Е. М. уже был нашим другом, то экзамен с самого начала принял неофициальный характер и превратился в довольно длительный безуспешный поиск — чего же всё-таки Е. М. не знает. Однако нападающих было двое, и в конце концов мы поймали его на одном мелком вопросе, чем и были полностью удовлетворены. Ещё позже я имел честь быть у Е. М. одним из оппонентов по его докторской диссертации.)

Весьма важную роль в моей жизни в этот период играли научные семинары, в особенности семинары по ДУ. Сперва это был общий семинар кафедры, проходивший под руководством В. В. Степанова. В нем активно участвовали И. Г. Петровский, В. В. Немыцкий, Андрей Николаевич Тихонов, Илья Несторович Векуа, Лазарь Аронович Люстерник и другие; посещала его и О. А. Ладыженская. Несколько позже появился «маленький» семинар по УрЧП. Он первоначально был создан (по-видимому, по инициативе О. А. Ладыженской) для изучения только что появившегося в русском переводе II тома фундаментальной монографии Р. Куранта — Д. Гильберта. Мы с О. А. пошли просить И. Г. быть руководителем этого семинара (как она вспоминает, я долго не решался на это), и он сразу ответил: «Почему бы и нет?». «Маленький» семинар систематически посещали из преподавателей — И. Г., С. А. Гальперн, М. А. Крейнс и я, из аспирантов — М. И. Вишик и Р. А. Александрян, из студентов — О. А. Ладыженская и О. А. Олейник, другие участники появлялись эпизодически.

Этот семинар довольно быстро из учебного стал научным, перестал быть «маленьким», с годами приобретая всё больший авторитет. Возможно, что современный всемирно известный семинар имени И. Г. Петровского можно считать его прямым наследником.

Что касается общего семинара кафедры, то он в тот же период распался на семинар по ОДУ под руководством В. В. Степанова и В. В. Немыцкого и семинар по УрЧП под руководством С. Л. Соболева, И. Г. Петровского и А. Н. Тихонова (А. Н.) (СПТ, обычно руководителей перечисляли в таком порядке). Оба эти семинара собирали докладчиков со всего Союза и были чрезвычайно полезными как для них, так и для всех участников. Я более активно участвовал в семинаре СПТ, так как мои интересы в то время были ближе к УрЧП. Обычно на семинаре СПТ присутствовало человек 20; среди постоянных участников укажу С. А. Гальперна, В. И. Кондрашова, З. Я. Шапиро, Р. А. Александрияна, М. И. Вишика, А. И. Гусейнова, несколько позже О. А. Олейник. Некоторые иногородние математики — такие как О. А. Ладыженская — также часто на нём присутствовали и регулярно выступали. Обычно докладывалось со всеми подробностями небольшое число результатов, после чего кратко сообщалось об их развитии. С. Л. мгновенно включался в любую тему, приводил глубокие соображения, как общие, так и конкретные. Тугодум И. Г. больше молчал, иногда задавал вопросы (вспоминаю, как кто-то излагал эпизод из старой работы И. Г. и её автор долго не мог согласиться с некоторыми своими рассуждениями); но когда он что-то понимал, то понимал очень глубоко. А. Н. время от времени отпускал неторопливые краткие замечания, которые становились особенно существенными, когда речь шла о возможной физической трактовке или каких-либо приложениях математики. Руководители семинара и сами не раз выступали на нём с докладами.

Постепенно проникали в семинар СПТ идеи и методы функционального анализа. Инициатором этого был, конечно, С. Л. Соболев, а главным пропагандистом среди молодёжи — Марко Иосифович Вишик. Позже значительный интерес участников семинара привлекла также общая теория разностных схем, связанная с решением краевых задач на ЭВМ. Первые доклады на эту тему в конце 40-х годов сделала О. А. Ладыженская.

Вспоминаю, что семинар обычно начинался с опозданием минут на 20. Это время использовалось на полезные беседы участников семинара друг с другом.

Молодые люди, группировавшиеся вокруг «маленького» семинара и семинара СПТ, много времени проводили в Кабинете математики и механики МГУ и его окрестностях. Мы много читали, занимались собственными задачами, делились результатами друг с другом, просто разговаривали на всевозможные темы. В частности, я хорошо помню многочисленные



разговоры с М. И. Вишиком, в которых он подробно рассказывал мне содержание своих работ; видно было, как быстро развивается его талант, как результаты этих работ становятся всё более общими и законченными, а развиваемые методы находят новые и новые приложения.

Думаю, что этот период — один из самых ярких в моей жизни.

Большое влияние на всех нас оказала обзорная статья И. Г. Петровского «О некоторых проблемах теории УрЧП», появившаяся в 1946 г. в «Успехах математических наук». Кстати, эта статья, вместе с указанными выше статьями из VIII тома УМН и фрагментами II тома книги Куранта–Гильберта, многие годы в том или ином объёме обязательно входила в кандидатский экзамен по УрЧП.

Тему для кандидатской диссертации подсказал мне И. Г. в конце 1945 г., за полгода до срока окончания аспирантуры. Вообще, в те времена считалось, что в аспирантуре главное — учиться и заниматься наукой; получится диссертация — хорошо, не получится — тоже не большая беда. Поэтому и И. Г. сказал мне: «Вы собираетесь писать диссертацию? Что, если...». Он предложил посмотреть, нельзя ли провести рассмотрение 2-й краевой задачи для уравнения Лапласа в той же (или хотя бы в сравнимой) общности, что известна для задачи Дирихле. Больше никаких указаний он мне не давал. Как это непохоже на современное «вымучивание» диссертации!

Начав заниматься этим вопросом, я довольно быстро ушёл в сторону так называемой видоизменённой 1-й краевой задачи. Первые результаты я доложил на семинаре СПТ, причём помню, как А. Н. Тихонов тут же предложил на основе физической аналогии элементарное доказательство одного из центральных утверждений, которое я считал особенно трудным. За дальнейшими моими потугами в этой области уже никто не следил, и я нагораживал одну трансфинитную индукцию за другой, пока не родил сочинение страниц в 150. Одним из оппонентов был А. Н. В день защиты я за полчаса рассказал ему основные результаты диссертации, после чего он в моё отсутствие написал отзыв, удививший меня глубиной и указанием на связи (в частности, с так называемой задачей Робена), о которых я по своей необразованности даже не подозревал.

И. Г. с моей диссертацией не знакомился. Он только спросил, что всё-таки из неё вытекает для 2-й краевой задачи; пришлось мне сказать, что довольно мало. Это не помешало ему за небольшой срок до защиты предложить мне её как докторскую, защитив предварительно в качестве кандидатской работу по единственности решения задачи Коши. Но я сразу же отказался.

Я уже отклонился от строгой хронологии. Приведу ещё отдельные эпизоды того моего периода жизни, так или иначе связанные с кафедрой ДУ.

Большой шум наделаала защита докторской диссертации Н. А. Леднева. Способный, но весьма самоуверенный и недостаточно культурный молодой человек объявил о создании им нового, самого общего метода решения УрЧП. На защите он держался вызывающе. Вывел из себя С. Л. Соболева, повторив несколько раз, что результаты С. Л. содержатся как весьма частный случай в его теории; в конце концов С. Л. спросил, почему он не говорит, что речь идёт о дипломной работе С. Л. С В. В. Степановым конфликт разгорелся так, что присутствующим на мгновение показалось, что дело дойдёт до физических действий: В. В. кричал «Мальчишка!» и т. д. Впрочем, голосование было положительным. Впоследствии оказалось, что основные результаты Н. А. Леднева, хотя и полученные им самостоятельно, содержались в более ранних работах французских авторов. В обзорной статье И. Г., о которой упоминалось выше, фамилия «Леднев» была в последний момент изменена на «Рикье», что хорошо видно по различию набора. И. Г., который также был оппонентом, чувствовал себя неловко; утешая себя, он повторял: «Н. А. Леднев всё-таки распространил теорему Коши – Ковалевской на случай функций, неаналитических по  $t$ , пусть он за это будет доктором.» (Впрочем, по-моему, ещё позже обнаружилось, что и этот результат содержался в работе одного японского автора. Н. А. Леднев после защиты почти не занимался математикой, а переключился на опровержение теории относительности, проблему Атлантиды, «обоснование» антисемитизма и т. д.)

Вспоминается ещё, как во время защиты одной из аспиранток И. Г. или С. Л. председатель Совета предупредил её, что время выступления истекает: на это докладчица заявила «Я могу говорить быстрее!», после чего ошеломила слушателей темпом своей речи.

Но довольно о пустяках.

Летом 1947 г. меня как военнослужащего перевели на работу в Ригу. Связи с мехматом МГУ и, в частности, с кафедрой ДУ, естественно, стали ослабевать. Впрочем, первое время я старался каждый месяц бывать в Москве и обязательно приходил на семинар СПТ. Несколько раз по старой памяти принимал участие в экзаменах — при простых порядках того времени это было возможно. И. Г. продолжал давать мне на просмотр некоторые из поступавших к нему рукописей. Кроме того, я много внимания уделял известным учебникам И. Г., о чем хочу сказать подробнее.

Больше всего я занимался его «Лекциями по теории ОДУ»: был издательским редактором II (1947) и IV (1952) изданий, а также готовил к печати III (1949), V (1964), VI (1970) и посмертное VII (1984) издания. С ростом объёма обязанностей, особенно после назначения его в 1951 г. ректором МГУ, И. Г. всё меньше внимания мог уделять своим книгам. Поэтому подготовка очередного переиздания проходила так. Когда

И. Г. сообщал о предстоящем переиздании, мы (чаще всего С. А. Гальперн, О. А. Олейник и я) вносили свои предложения, совместно обсуждали их, затем обсуждали вместе с И. Г., после чего я, а также О. А. Олейник составляли окончательный текст; я также держал за автора корректуру. Учебник, сохраняя общее направление и характер, постепенно расширялся и модернизировался. Помню, как мы долго уговаривали И. Г. перейти для линейных систем от скалярных к векторно-матричным обозначениям: И. Г. опасался, что последние приведут к более формальному усвоению этого раздела курса. Лишь убедившись, что такой переход осуществляется повсюду, И. Г. решился на него. Были и многие другие изменения и добавления, причем при обсуждениях И. Г. особенно старался сдерживать расширение основного текста и с облегчением вздыхал, когда мы договаривались о переносе предлагаемых добавлений в упражнения. Всё это в конце концов привело к тому, что когда я как-то, после 6-го издания, при разговоре с И. Г. сказал «Ваша книга», он заметил (как мне показалось, с некоторой досадой): «Она уже больше Ваша, чем моя». Конечно, это преувеличение.

Принимал я участие, — впрочем, гораздо меньшее, — и в подготовке двух других книг И. Г.: был редактором первого издания (1948) книги «Лекции по теории интегральных уравнений», написал раздел, посвящённый теории потенциала, для книги «Лекции по теории УрЧП» (1950) и т. п. В дальнейшем «шефство» над этими книгами взяла на себя О. А. Олейник. Полагаю, что все эти книги, переведенные на многие языки, и сейчас в значительной степени сохранили своё значение.

Когда я бывал в Москве, И. Г. обычно приглашал меня зайти к нему домой, а летом — на дачу. Часто к этим визитам присоединялись С. А. Гальперн и М. А. Крейнс. Вспоминаю, как однажды мы с С. А. шли к И. Г. (кто был ещё, не помню), и С. А. мне сказал: «Почему Вы говорите — гистеродифференциальные уравнения?» (А я этот термин взял из западных статей, мне он показался каким-то солидным, учёным, что ли.) «Назвали бы по-русски — ДУ с запаздывающим аргументом, например». Такое название прижилось, однако позже С. А. не мог припомнить этот эпизод. Впрочем, С. А. некоторое время с недоверием относился к этому новому направлению и не раз спрашивал у меня: «А что из Ваших результатов вытекает нового для обычных ДУ?»

Вспоминаю также, как во время одной из длительных прогулок на даче у И. Г., вместе с С. А. и М. А., состоялся ожесточённый спор о правомерности «нестрогого» изложения математики при её преподавании прикладникам. Я тогда постепенно приходил к идее об относительности понятия строгости и отстаивал законность одновременного сосуществования различных уровней строгости. На меня особенно активно нападал М. А., его поддерживал С. А. И. Г. больше слушал, иногда задавал вопро-

сы, и его точку зрения на эту проблему я не смог уловить: думаю, что она была очень широкой, как и на многое другое. (Как часто бывает, серьёзному сопутствовало смешное: когда мы втроём, возвращаясь домой, подошли к платформе, у противоположной её стороны стояла электричка; мы с С. А. быстро залезли на платформу, но невысокий полный М. А. несколько раз попытался подпрыгнуть и в конце концов жалобно простонал: «А как же я?»; пришлось нам возвращаться и подсаживать его.) Вскоре И. Г. сказал мне, что Я. Б. Зельдович, исходя из аналогичных соображений, написал вводный курс высшей математики на физическом уровне строгости. И. Г. свёл меня с Я. Б., и этот контакт оказался в дальнейшем одним из самых существенных в моей жизни.

Весной 1953 года И. Г. предложил мне подать документы на конкурс в МГУ на должность профессора кафедры ДУ. Дело зашло довольно далеко, даже состоялся разговор о предоставляемой жилплощади. Однако в Латвийском государственном университете, где я тогда работал, мои отношения с администрацией были весьма напряжёнными и в порядке мелкой мести (так было тогда принято) мне дали официальную характеристику только тогда, когда срок конкурса уже истёк. И. Г. мне потом говорил, как всех удивили слова в этой характеристике, необычные для такого документа: «По характеру самолюбив и вспыльчив». Возможно, встревоженный этим, либо распространившимся слухом о происшедшем скандале, И. Г. при очередной встрече потребовал от меня полную информацию по этому поводу («Как на духу» — сказал он) — и успокоился, узнав, что в конфликте не было никакой политической подоплеки. Но срочно уезжать из Риги мне было необходимо, и поэтому я подал документы на замещение должности зав. кафедрой ДУ Белорусского госуниверситета и сразу же прошел конкурс. Через месяц после моего приезда в Минск я получил телеграмму от И. Г. с повторным предложением подать документы на конкурс в МГУ. Возможно, это был момент, когда от моего решения могла в корне измениться моя судьба. Не уверен, что я был прав, я долго колебался, но в конце концов счёл неэтичным сразу же после прохождения одного конкурса подать на другой. Больше такой возможности мне не представлялось; живешь, увы, всего один раз.

Вот еще несколько разрозненных воспоминаний, связанных с И. Г.

Пока у И. Г. не было постоянной автомашины, он, естественно, пользовался городским транспортом; однако поездок в метро избегал, говоря, что пребывание под землёй ему неприятно. Собственной машины у И. Г. никогда не было.

И. Г. старался не прикасаться голой ладонью к дверным ручкам в общественных зданиях; при необходимости он прикрывал ладонь чем-нибудь.

Во время беседы И. Г. вдруг принялся щипать себя за ресницы. Заметив мой взгляд, он сказал: «У меня короткие ресницы, и они подворачиваются».

И. Г. очень любил живопись, у него дома были картины и альбомы. Показывая мне одну картину и рассказывая о ней, И. Г. неожиданно назвал фиолетовый цвет синим. С удивлением я узнал, что И. Г. — дальтоник. Как он мне объяснил, для нормального зрения множество цветов двумерно (если не учитывать яркости), а у дальтоников — одномерно.

И. Г. всегда произносил «Холмогоров», говоря, что так правильнее.

Долгое время И. Г. не любил никуда ездить — ни по Советскому Союзу, ни за границу. Он говорил, что поездки выбивают его из рабочей колеи, и предпочитал любым поездкам свой дом и свою дачу. Позже он, по-видимому, в этом отношении изменился.

Как-то у меня с И. Г. зашла речь о том, что, став ректором, он существенно ослабил, а несколько позже и практически прекратил свою личную работу в области математики. Конечно, он переживал это обстоятельство; к тому же он знал, что кое-кто порицает его за «измену» математике. Я сказал, что считаю его деятельность как ректора важнее его возможных упущенных личных достижений в науке и что, вообще, честные квалифицированные люди, имеющие способности к важной организационной работе и возможности её проводить, не должны уклоняться от неё, передоверяя её людям неквалифицированным или нечестным. И. Г. полностью согласился с этим. Ему очень понравилось, когда я напомнил высказывание Л. Толстого о том, что для начальника главное не столько проявлять инициативу, как не запрещать ничего хорошего и не разрешать ничего дурного. И. Г. сказал, что он именно так и поступает. (Впрочем, мы знаем, что в ряде существенных случаев И. Г. проявлял и инициативу.) Его способность быстро и неформально решать организационные вопросы была несомненной. Думаю, что эта сторона деятельности И. Г. заслуживала бы серьёзного рассмотрения.

Разговор о доказательстве ослабленной гипотезы Гольдбаха. Я выразил сомнение в том, что подобного рода результат может оказаться для чего-либо полезным, кроме других утверждений того же характера. И. Г. не согласился: «Не может быть, чтобы такой красивый результат, с простой формулировкой и столь сложным доказательством, не нашёл в своё время приложений».

Чем, вообще, надо заниматься в математике? И. Г. говорил, что работами двоякого характера: либо тем, что непосредственно для чего-то нужно, либо же проблемами в наиболее общей постановке. (Впрочем, из сказанного перед этим видно, что он отдавал должное также эстетической и спортивной сторонам.) Он как-то сказал, что считает несправедливым по отношению к преподавателям университетов наличие

академических математических институтов, в которых учёные проводят исследования в области «чистой» математики без педагогической нагрузки и непосредственных контактов с молодежью.

Оценивая значимость деятельности того или иного математика, И. Г. на первый план выдвигал те трудные теоремы, представляющие общий интерес, которые тот доказал. (Когда о ком-либо И. Г. говорили, что тот сильный математик, он часто так и спрашивал: «А что он доказал?».) Создание концепций, новых подходов И. Г. ценил меньше. Может быть, по этой причине он некоторое время испытывал определённое недоверие к применению в теории ДУ методов функционального анализа: возможно, ему казалось, что здесь порой речь идёт не о доказательстве трудных теорем, а о словесных спекуляциях. Позже он изменил эту точку зрения: в частности, это проявилось в полном признании значения работ С. Л. Соболева. Он стал соглашаться с тем, что кроме математиков «пробивного» типа (к которым он себя справедливо относил) существенную пользу могут принести и математики другого склада.

«Я могу ошибиться в доказательстве, но не в утверждении» — как-то сказал И. Г., имея в виду свою работу, восполняющую пробел в его статье, в которой доказывалась разрешимость задачи Коши для гиперболических систем уравнений. Правда, в последних работах, посвященных оценке числа предельных циклов для ОДУ с рациональной правой частью, интуиция подвела И. Г.; хотя его основная идея топологического анализа решений после перехода к комплексным значениям всех участвующих величин, несомненно, весьма глубока и перспективна.

Из-за перегруженности центральных математических журналов одно время стали в большом количестве появляться вузовские, региональные и т. п. сборники. И. Г. был решительным противником этого. Он говорил, что с хорошими работами центральные издания справятся, а плохие вообще нигде не нужно публиковать. (Думаю, что такой подход несколько прямолинеен.)

И. Г. не очень внимательно следил за новыми работами и журнальных статей не читал. Он был невысокого мнения о своей математической эрудиции. Так, известно, что его работа по особым точкам для систем ОДУ имела пересечение с более ранней работой О. Перрона. И. Г. объяснял это так: «Мне сказали, что надо решить эту задачу, я и решил её». Однако время от времени он читал математические книги, не относящиеся непосредственно к теме его научных работ. Он говорил в шутку, что любит болеть, так как может в это время спокойно предаваться такому чтению. Помню, например, как он читал «Математический анализ на многообразиях» М. Спивака.

Пожалуй, более внимательно И. Г. следил за развитием естественных наук — физики, биологии и т. д., более всего предпочитая популярную

литературу высокого уровня типа «Учёные о своей науке»; не раз он мне рекомендовал такие книги. Он обдумывал математические модели общих явлений. Помню, как он говорил о необходимости изменения теории относительности: «Не может быть, чтобы скорость света имела такое фундаментальное значение». Он говорил, что мечтает написать книгу «История человеческих заблуждений».

Как-то я сказал И. Г., что чем бы я в математике ни занимался, меня всегда заносит в ТФДП и в классический анализ. И. Г. ответил, что последние годы его всё время «заносит» в алгебраическую геометрию.

Однажды об одной группе людей я сказал, что они мне напоминают собак в том смысле, что общее название может скрывать в себе совсем различное содержание. И. Г. сразу ответил: «А мне профессора напоминают собак» — и тут же назвал несколько профессоров, которых он считал весьма слабыми («аховыми»).

Когда в 1950 г. я перешёл на работу в Латвийский государственный университет, я решил для повышения педагогической квалификации посетить несколько учебных лекций и практических занятий на мехмате МГУ, поглядеть на них с позиции преподавателя. Быть может, мне особенно не повезло, но все эти занятия, хотя и проведённые известными учеными, оказались, за исключением лекций А. Г. Куроша, неудачными. Когда я, не называя фамилий, поделился своим недоумением с И. Г., тот сказал, что это его не удивляет, но что он считает главным достоинством МГУ не обязательные учебные занятия, а исследовательские семинары.

Разговор о преподавании математики в пединститутах. И. Г. считал главным укрепление не методического цикла (методику как науку он вообще невысоко ставил), а собственно математического. Он полагал, что преподаватель математики в школе должен в первую очередь знать саму математику, тогда и остальное приложится. По этому вопросу у него было много противников.

Как-то И. Г. вспоминал свои молодые годы. Я спросил, как получилось, что при окончании школы он получил 4 по математике, тогда как все остальные оценки (кажется, кроме еще одной четверки) были отличные. И. Г. ответил, что в школьном курсе математики были вопросы, которые ни он, ни учитель не понимали; но учитель это скрывал, а он — нет. Еще он рассказал, как в начале 20-х из-за материальных трудностей был дворником детского сада (по-моему, в течение года). Там он и познакомился с Ольгой Афанасьевной, которая заведовала этим садом.

В институте, где я работал, обсуждался вопрос об организации всесоюзной конференции по ОДУ. Я позвонил И. Г. и спросил, не согласится ли он быть председателем Оргкомитета, сказав, что организационная работа его совершенно касаться не будет, а его функции будут номинальные

и представительские, что не должно отнять у него много времени. И. Г. сразу решительно отказался, сказав, что не хочет быть «свадебным генералом».

Когда И. Г., став ректором, приглашал зайти к нему домой, он иногда это делал так: просил прийти к концу рабочего дня к нему в приёмную и подождать, пока он освободится. Я хорошо видел, как любой человек, имеющий дело к И. Г., мог с ним встретиться. После каждого посетителя И. Г. выходил в приёмную, внимательно взглядывал на присутствующих, спрашивал: «Вы ко мне?», и по какой-то своей системе приглашал кого-либо в кабинет. Когда все проходили, И. Г. приглашал меня, просил принести чаю и не спеша говорил о текущих делах, с огромной скоростью распределял вновь полученные бумаги, порой звонил в «высокие» инстанции («Да нам нужен пустяк, всего 10 миллионов рублей») и т. п. (Я как-то спросил у И. Г.: с кем из членов Политбюро он непосредственно общался; он ответил: с Хрущевым.) Потом мы уходили, причем И. Г. обязательно прощался с гардеробщицей и вахтёром. Раньше мы шли пешком от МГУ до дома И. Г., потом эти прогулки стали сокращаться (часть пути мы проезжали на машине) и, в конце концов, совсем отпали. Кстати, в последние годы И. Г. очень плохо засыпал и поэтому принимал на ночь снотворное, от влияния которого не сразу отходил по утрам.

Как-то, в начале 50-х годов, я оказался дома у И. Г. после такой прогулки довольно поздно. С удивлением я узнал, что к 12 часам ночи он должен ехать в Министерство высшего образования для беседы с министром. Такими были порядки в «высших сферах» того времени.

Однажды я пришел в приёмную к И. Г. с сыном, тогда студентом МГУ: И. Г. знал его ребёнком и захотел вновь увидеть. Дел у нас никаких к И. Г. не было и мы вскоре стали прощаться. И. Г. задержал нас, сказав, что он обычно видит у себя студентов — кандидатов на отчисление; надо же ему и с нормальными студентами иногда встречаться.

Анекдот: И. Г. со смехом рассказывал, что он как-то подписал приказ по МГУ, в котором был пункт об отчислении одного студента за пьянство. Приказ пошёл в типографию для размножения, откуда вернулся обратно, поскольку упомянутый пункт, как оказалось, был сформулирован так: «За нарушение установленных мной правил пьянки и хулиганства и т. д.».

Гораздо более серьёзный случай: группа студентов была отчислена из МГУ за создание «организации». Они написали устав, собирали взносы (уходившие, в основном, на чай), собирались на дому и обсуждали разные вопросы. При отчислении им собирались выдать характеристику, в которой кроме общих слов было сказано: «Отчислен из МГУ за участие в антисоветской организации». И. Г. говорил, что он с трудом добился изменения этой формулировки.



Когда кто-либо жаловался на чрезмерную занятость, И. Г. любил повторять восточную пословицу: «По милости Аллаха каждому человеку дано столько забот, сколько он сам того желает».

Рассказывая (с определённым порицанием) о весьма известном математике, беспартийном, который об одном своём сотруднике сказал, что тот плохой член партии, И. Г. вспомнил анекдот. Прокурор сказал судьям: «Совесть подсудимого такая же чёрная, как его борода», на что подсудимый ответил: «А у Вас, гражданин прокурор, совсем бороды нет». И. Г. тоже был беспартийным, но по специальному решению ЦК КПСС он имел право посещать закрытые партийные собрания в университете.

И. Г. прямо-таки из себя выходил, говоря о случаях сознательного замалчивания недостатков перед «высокими» инстанциями, которое может затормозить развитие нашей науки. Он с возмущением говорил мне: «N обманывает правительство, говоря, что наша наука передовая... Никакая она не передовая!». О. А. рассказывала (уже после смерти И. Г.), что однажды, разговаривая с N на эту тему по телефону, он пришел в такое возбуждение, что она, серьезно боясь за его жизнь, на коленях умоляла его прекратить разговор.

В последние годы большого культа был в ходу термин «учение»: «учение Мичурина», «учение Павлова» и т. д. И. Г. весьма отрицательно относился к этому, небезосновательно усматривая в этом не только канцеляризм, но и стремление создать как бы маленькие культы, ведущие к омертвлению науки. Чуть позже всюду стали появляться «маяки». Когда мы с О. А. Олейник писали статью для УМН, посвященную 60-летию И. Г., я употребил этот термин по отношению к его узловым результатам в области УрЧП как вполне адекватную характеристику. Однако когда мы показали И. Г. проект статьи, он категорически отверг этот эпитет.

И. Г. решительно осуждал проявления антисемитизма. Помню, как он с возмущением рассказывал об одном математике, что тот, подав докторскую диссертацию, написал в заявлении, чтобы среди его оппонентов не было евреев. Когда я выразил сомнение в возможности столь откровенного поступка, И. Г. сказал: «А он и мне написал, — почему среди моих друзей и учеников так много евреев?».

«А женщины, вообще, лучше мужчин» — как-то сказал И. Г. По-моему, шла речь о том, что, как правило, у женщины из-за заботы о детях выше чувство ответственности, чем у мужчины.

Однажды в тяжёлые послевоенные годы И. Г. рассказывал с осуждением об одном из влиятельных митрополитов (кажется, Николае): того спросили, нужно ли в условиях длительного недоедания строго соблюдать пост, и он ответил, что нужно. И. Г. прекрасно знал историю христиан-

ства в России. Помню, в частности, как он мне с увлечением рассказывал о проропопе Аввакуме.

Вспоминаются ожесточённые споры по поводу периода «культ личности». И. Г. возмущался эксцессами, но, идя против распространённого мнения, считал необходимым отмечать и положительные стороны, связанные с дисциплинирующим началом. «При Сталине был порядок» — это его слова, которые надо понимать, конечно, не как одобрение Сталина, а как решительное осуждение расхлябанности, необязательности, с которыми он всё чаще сталкивался в последние годы. Характерная деталь: И. Г. очень нравился известный нестеровский портрет И. П. Павлова за то, что на нём прекрасно передан его волевой характер.

И. Г. как-то сообщил мне, что один из его учеников, оставшись на оккупированной территории, сменил русскую фамилию на немецкую, а теперь прислал письмо из ФРГ, спрашивая, нельзя ли ему вернуться. И. Г. ему не ответил. Рассказав об этом, он с досадой добавил: «Не повезло мне на учеников...». Он пояснил, что имел в виду также тех из них, кто после получения учёной степени практически перестал заниматься наукой. Тех же, кто не перестал, было не очень много. (Среди них укажу С. А. Гальперна, Е. М. Ландиса, В. П. Михайлова, О. А. Олейник, В. С. Рябенского, Л. А. Чудова. Заодно хочу отметить, что И. Г. никогда не создавал своим ученикам каких-то особо благоприятных условий, не «проталкивал» их и т. п., как это порой делают.)

Несколько слов о моих контактах с В. В. Немыцким. Хотя мои интересы уже давно лежат гораздо ближе к ОДУ, чем к УрЧП, мои постоянные контакты с В. В. установились после моего отъезда из Риги. (Впрочем, я не раз бывал на «большом» семинаре В. В., даже выступал на нём с докладами, да и оппонентом я был впервые у аспиранта В. В.) Помню, как примерно в 1956 г. я пригласил В. В. в Минск в качестве официального оппонента по диссертации, посвящённой «полувыврожденным» автономным системам на плоскости. В. В. выступал экспромтом, как тогда было принято, и, оценивая работу, указал на такие глубокие связи, о которых я только догадывался.

В дальнейшем я не раз участвовал вместе с В. В. в разнообразных конференциях и совещаниях в различных городах. Бросалась в глаза объединяющая роль В. В. во всесоюзном масштабе в классических направлениях теории ОДУ. Думаю, что после его смерти у нас пока нет человека, играющего подобную роль.

По вопросу о стиле преподавания математики во втузах я имел с В. В. небольшое столкновение на пленарном заседании Научно-методического совета по математике при МВССО СССР. Речь шла об уровне строгости, и В. В. сказал примерно следующее: назовём условно строгие математические рассуждения «правильными», а другие — «неправильными»; так

давайте обучим прикладников рассуждать правильно, а рассуждать неправильно они и без нас научиться (поддержано аплодисментами многих присутствующих). Я не мог с этим согласиться.

При поездках по различным городам я видел острый интерес В. В. к историческим, природным и архитектурным памятникам, его знания в этой области. Единственный раз я был дома у В. В.; он тогда готовился к докладу на заседании Географического общества об одном из своих походов в горы.

Как известно, к 50-летию Советской власти готовился сборник обзорных статей о развитии математики в СССР за 1957–1967 гг. Статью, посвящённую ОДУ, поручили готовить М. А. Красносельскому и мне. Мы разбили её на главы и для каждой выбрали автора с тем, чтобы за нами остались согласование и доделка, а вся статья шла бы под коллективным соавторством. В частности, мы попросили В. В. написать главу, посвящённую автономным системам в  $\mathbb{R}^n$ . Он охотно откликнулся и вскоре прислал рукопись. Однако работа по согласованию глав оказалась более значительной, чем предполагалось, и в главу В. В. пришлось внести существенные изменения и добавления. Прodelав это, мы оставили фамилию В. В. как автора главы (возможно, в этом была наша ошибка) и послали рукопись ему на просмотр. Он довольно резко отказался от авторства, написав нам, что это уже не его статья, эту статью он не писал и т. п. Пришлось нам фамилию В. В. снять, оставив только выражение благодарности за присланные материалы. (Впрочем, как известно, этот сборник, хотя и был набран, в свет по решению некой комиссии не вышел.) Судя по дальнейшим контактам, на мои добрые отношения с В. В. этот эпизод не повлиял.

Мои заметки подходят к концу. Конечно, были и более поздние контакты с членами кафедры ДУ, особенно с О. А. Олейник и М. И. Вишиком. (Вероятно, здесь наиболее яркими были: совместная работа над двумя большими обзорными статьями по развитию теории УрЧП в СССР, из которых, впрочем, была опубликована только одна; работа над юбилейной статьёй к 60-летию И. Г.; совместное участие в различных конференциях и школах; участие в защитах диссертаций и т. д. Я надеюсь, что ещё может представиться случай вернуться к этому.) Но и эти контакты постепенно затухают, превращаясь в память о чём-то большом и светлом.