Решения задач из прошлых выпусков

1.2$'$ (выпуск 22, с. 234). Условие. Последовательность цифр бесконечна влево, а вправо оканчивается на 36. Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что 2^{N_k} оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. *Существование* искомой последовательности доказано в решении задачи 1.2, принадлежащем В. М. Тихомирову (выпуск 5, с. 218). *Непериодичность* доказывается как в решении задачи 1.2$''$ (см. ниже). Отметим, что если в задаче 1.2$''$ последовательность цифр отвечает нетривиальному идемпотенту, то в данном случае получается 10-адическое решение трансцендентного уравнения $2^x = x$, которое заведомо иррационально. (*А. Я. Канель-Белов*)

1.2$''$ (выпуск 25, с. 170). Условие. Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на 76. Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что N_k^2 оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична.

(*Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Вначале докажем *существование* такой последовательности. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. *Последовательное построение числа N_k индукцией по k.* Для $k = 1$ такие числа существуют. Пусть искомое k-значное число N_k (возможно, начинающееся с нуля) уже построено. Рассмотрим $(k+1)$-ю цифру b_k числа N_k^2. Положим $X_k = c_k 10^{k+1} + N_k$. Тогда

$$X_k^2 = c_k^2 10^{2(k+1)} + N_k^2 + 2c_k N_k 10^{k+1} \equiv \\ \equiv N_k^2 + 2c_k 10^{k+1} N_k \equiv N_k^2 + 2c_k 10^{k+1} \cdot 6 \pmod{10^{k+2}}$$

(так как по условию $N_k \equiv 6 \pmod{10}$ при всех k). Далее,

$$N_k^2 + 2c_k 10^{k+1} \cdot 6 \equiv N_k + (b_k + 2c_k) 10^{k+1} \pmod{10^{k+2}}.$$

Требуется подобрать цифру c_k так, чтобы $(k+1)$-я цифра числа X_k^2 совпала с $(k+1)$-й цифрой числа X_k; тогда можно положить $N_{k+1} = X_k$ и продолжить процесс по индукции.

Это условие совпадения означает, что $b_k + 2c_k \equiv c_k \pmod{10}$, т. е. $c_k + b_k \equiv 0 \pmod{10}$, чего очевидным образом можно добиться.

Способ 2. *Построение числа N_k в явном виде.* В качестве X_n можно взять число, состоящее из последних n цифр числа 6^{5^n}. В самом деле,

$$(6^{5^n})^2 - 6^{5^n} = 6^{5^n}(6^{5^n} - 1).$$

Число 6^{5^n} делится на 2^{n+1}, а число $6^{5^n} - 1$ делится на 5^{n+1} в силу следующего частного случая *леммы Гензеля*:

Если $a \equiv 1 \pmod{p^k}$, *то* $a^{p^\ell} \equiv 1 \pmod{p^{k+\ell}}$ (положим $a = 6$, $p = 5$, $k = 1$, $\ell = n$).

Применение этого утверждения для решения олимпиадных задач — важная тема для кружка, см.: *Канель-Белов А. Я.*, *Трепалин А. С.*, *Ященко И. В.* Олимпиадный ковчег. М.: МЦНМО, 2016. С. 33.

Теперь докажем *апериодичность*. Рассмотрим бесконечные влево последовательности десятичных цифр $\ldots a_k \ldots a_1$. Их можно естественным образом складывать и умножать. То, что получится, называется *кольцом целых* 10*-адических чисел*. Если же в этой последовательности ставить запятую и разрешать *конечное число знаков после запятой*, то получится *кольцо* 10*-адических чисел* (см. *Дынкин Е. Б.*, *Успенский В. А.* Математические беседы. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. С. 67 и далее).

Кольцо обычных целых чисел можно изоморфно вложить в кольцо 10-адических целых чисел: каждому целому числу n нужно сопоставить бесконечную влево последовательность, крайние справа k членов которой при любом k составляют остаток от деления n на 10^k. Это вложение продолжается до изоморфного вложения поля рациональных чисел в кольцо 10-адических чисел. При этом рациональным числам отвечают периодические (возможно, с предпериодом) 10-адические дроби и только они. Доказательство утверждения «только» см. ниже в комментарии 3. В другую сторону доказательство по существу такое же, как для обычных периодических дробей.

Остаётся заметить, что если α — рациональное число, то равенство $\alpha^2 = \alpha$ возможно только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Для нашей последовательности последние два равенства не выполнены, а предыдущее выполнено. Значит, она соответствует иррациональному числу и потому апериодична. Задача решена.

Комментарии. 1. Аналогично 10-адическим числам определяются m-адические числа для любого натурального $m > 1$. Кольцо p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ при простом p является полем. Над полем $\mathbb{Q}_p$ можно строить матанализ, рассматривать логарифм и экспоненту, удовлетворяющие тем же функциональным уравнениям, что и в вещественном случае, и т. д.

2. Кольцо 10-адических чисел есть прямая сумма полей 2-адических и 5-адических чисел: $\mathbb{Q}_{10} = \mathbb{Q}_2 \bigoplus \mathbb{Q}_5$ (т. е. $\mathbb{Q}_{10}$ представляется в виде векторов с покоординатным сложением и умножением, причём первая координата принадлежит $\mathbb{Q}_2$, а вторая — $\mathbb{Q}_5$). *Идемпотент* есть элемент e такой, что $e^2 = e$. В любом поле есть два идемпотента: 0 и 1. Поэтому в кольце $\mathbb{Q}_{10}$ имеется четыре идемпотента: тривиальные $0 = (0,0)$ и $1 = (1,1)$ и нетривиальные $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$. Нашей последовательности отвечает идемпотент $e_2 = (0,1)$, а аналогичной последовательности $\ldots 625$ — идемпотент $e_1 = (1,0)$.

3. В «Математическом просвещении», сер. 2, вып. 5, с. 255 была предложена задача на близкую тему:

Докажите, что для любого натурального N найдётся такой номер n, что числитель несократимой дроби A_n/B_n, равной $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n}$, делится на 2^N. (*Д. К. Фаддеев*[1])

Решение. В условии приведено разложение в ряд 2-адического логарифма для $\log(1-x)$ при $x = 2$. Но $\log(1-2) = \log(-1)$ и $2\log(-1) = \log((-1)^2) = \log(1) = 0$, что и означает требуемое в задаче.

4. Отметим, что верен и факт, обратный использованному выше: если $\alpha = p/q$ — рациональное число, то его 10-адическое разложение периодично (возможно, с предпериодом). Действительно, при некотором m величина $\alpha \cdot 10^m$ имеет вид $x + p'/q'$, где x — целое, q' взаимно просто с 10, $p' < q'$. Покажем, что тогда p'/q' разлагается в чисто периодическую 10-адическую дробь. Поскольку 10 взаимно просто с q, то q делит $10^k - 1$ при некотором k. тогда $q = (10^k - 1)/t$ для некоторого натурального t. Отсюда $\alpha = x + r/(10^k - 1)$ для некоторого натурального r, $0 \leqslant r < 10^k - 1$.

Теперь заметим, что $-1 = \ldots 999 \ldots 9$. Отсюда

$$-1 = 9\ldots9 \text{ (k девяток)} \cdot [\ldots(0\ldots01)\ldots(0\ldots01)] = \\ = (10^k - 1) \cdot [\ldots(0\ldots01)\ldots(0\ldots01)]$$

[1] Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989) — член-корреспондент АН СССР, профессор ЛГУ, специалист в области алгебры, теории чисел, вычислительной математики. Один из создателей школы, ныне носящей его имя (см. настоящий выпуск, с. 9–34).

(период $(0\dots01)$ содержит $(k-1)$ нуль и одну единицу). Поэтому

$$\dots(0\dots01)\dots(0\dots01) = \frac{-1}{10^k-1}.$$

Умножив обе части этого равенства на $r < 10^k-1$, получаем, что 10-адическая дробь $r/(10^k-1)$ — чисто периодическая вида $\dots\bar{r}\dots\bar{r}\dots\bar{r}$, где $\bar{r}$ — результат дополнения r нулями слева до k-значного числа.

5. Заинтересованному читателю советуем обратиться к книге: *Коблиц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.

См. также: *Джамбетов Э. М., Канель-Белов А. Я., Шудуева И. С.* Свойства степенных вычетов натуральных чисел в различных системах счисления («Математическое образование», № 1(93), январь – март 2020 г., с. 46–50). (*Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов*)

8.10. Условие. Существует ли векторное пространство нильпотентных матриц некоторого порядка, произведения элементов которого порождают всю матричную алгебру? (Матрица A называется *нильпотентной*, если $A^k=0$ для некоторого k.) (*П. Якобианов*)

Решение. Такое пространство можно найти среди матриц 3×3. Легко проверить, что при любых a и b матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

нильпотентна, и такие матрицы образуют линейное пространство N. Несложно также проверить, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В алгебре, порождённой пространством N, есть следующие *матричные единицы*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая получается из матрицы (2) при $a=1$, $b=0$, вторая — из той же матрицы при $a=0$, $b=-1$. Третью и четвёртую матричные единицы можно получить из первых двух линейной комбинацией с матрицей (1) при различных значениях параметров. Среди произведений этих матриц есть все остальные матричные единицы, а значит, пространство N порождает полную матричную алгебру. (*И. Митрофанов*)

9.3. Условие. Узлы k-мерной целочисленной решётки раскрашены в ℓ цветов. Докажите, что найдётся прямоугольный параллелепипед с рёбрами, параллельными осям решётки, с вершинами одного цвета. Постарайтесь получить оценки на размер области решётки, где можно наверняка найти параллелепипед, в зависимости от k и ℓ. (*А. Я. Белов*)

Решение. *Верхняя оценка*. Покажем, что требуемая конструкция найдётся внутри куба $N \times \ldots \times N$ при достаточно большом N. Если $A \subseteq B$ — два конечных множества, назовём *плотностью* A в B отношение их мощностей $|A|/|B|$.

Лемма. *Пусть в клетчатом $(k+1)$-мерном кубе со стороной N есть подмножество X плотности λ. Тогда в кубе можно выбрать два параллельных k-мерных слоя так, что пересечение двух полученных сечений множества X, если их совместить внутри k-мерного куба, будет иметь в нём плотность больше чем $\lambda(\lambda - 1/(N-1))$.*

Доказательство. Выберем одну из координат. Соответствующее направление будем называть *вертикальным*, а множество клеток, у которых эта координата одинакова, будем называть *горизонтальным слоем*. Количество точек множества X на каждой из $M = N^k$ вертикальных линий обозначим через $a_1, \ldots, a_M$ соответственно. Тогда $a_1 + \ldots + a_M = \lambda NM$.

Число неупорядоченных пар (x_1, x_2), где точки x_1, x_2 принадлежат X и находятся на одной вертикали, можно оценить по неравенству о средних:

$$\frac{a_1(a_1-1)}{2} + \ldots + \frac{a_M(a_M-1)}{2} \geqslant \frac{\lambda^2 N^2 M - \lambda NM}{2}.$$

Значит, в какой-то паре слоёв не менее чем $\lambda(\lambda N - 1)M/(N-1)$ таких пар, а плотность пересечения больше чем $\lambda(\lambda - 1/(N-1))$. □

Плотность одного из цветов в кубе размерности k со стороной N составляет хотя бы $1/\ell$. Будем искать параллелепипед именно данного цвета. Положим

$$f(x) := x\Big(x - \frac{1}{N-1}\Big).$$

Пользуясь доказанной леммой, можно перейти к кубу с той же стороной, размерностью на 1 меньшей и плотностью $f(1/\ell)$. Таким образом, параллелепипед найдётся, если k итераций отображения f дадут положительную величину.

Это выполняется при достаточно больших N. Пусть $N > (2\ell)^{2^k}$, тогда индукцией по d получаем при $d \leqslant k$ оценку

$$f^d\Big(\frac{1}{\ell}\Big) > 2(2\ell)^{-2^d} > 0.$$

Нижняя оценка. Рассмотрим случайную раскраску куба со стороной N в ℓ цветов. Параллелепипедов будет всего

$$m = \Big(\frac{N(N-1)}{2}\Big)^k,$$

и каждый из них одноцветный с вероятностью $p = \ell^{-(2^k-1)}$. Если $mp < 1$, то заведомо существует раскраска без одноцветных параллелепипедов. Для этого можно взять, например, $N < \ell^{2^k/k}$. (*И. Митрофанов*)

Комментарий. По этой теме см. также статью: *Знак Е. И.* Разбиения целочисленных решёток и принцип Дирихле («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 19, с. 241–247) и комментарий А. Я. Канель-Белова к этой статье (там же, с. 248).

17.6 (в формулировке из выпуска 25, с. 169). Условие. Если целые m и n взаимно просты, а числа $x^n + x^{-n}$, $x^m + x^{-m}$ — ненулевые целые, то $x + 1/x$ — тоже целое число ($x \in \mathbb{C}$).

Решение. При $|x| = 1$ условие задачи равносильно тому, что x^n и x^m — корни шестой степени из 1, но тогда то же самое верно и для x. Далее считаем $|x| \neq 1$.

Пусть $x^m + x^{-m} = a$, $x^n + x^{-n} = b$. Если a или b равно ± 1 или ± 2, то получаем, что $|x| = 1$.

При целом $|a| > 2$ у уравнения $\lambda + \lambda^{-1} = a$ два различных решения, оба действительные и одного знака. А значит, у уравнения $z^m + z^{-m} = a$ ровно $2m$ различных комплексных решений. Модули любых двух решений либо равны, либо в произведении дают 1, а аргумент отношения любых двух решений имеет вид $2\pi k/m$ с целым k. Множество решений выглядит как два правильных m-угольника, гомотетичных с положительным коэффициентом.

Аналогичный факт верен и для решений уравнения $z^n + z^{-n} = b$.

Число x — общий корень многочленов $z^{2m} - az^m + 1$ и $z^{2n} - bz^n + 1$. Обозначим наибольший общий делитель этих двух многочленов через $P(z)$. Его вычисление по алгоритму Евклида показывает, что он приведённый с целыми коэффициентами. Допустим, x' — корень $P(z)$, отличный от x. Тогда

$$\frac{2\pi k}{m} = \arg\Big(\frac{x'}{x}\Big) = \frac{2\pi\ell}{n}$$

с целыми k и ℓ. Так как m и n взаимно просты, то у x и x' одинаковый аргумент. Значит, у многочлена $P(z)$ не более двух корней, и его степень 1 или 2.

В первом случае x — целое число, но тогда $x^n + x^{-n}$ не может быть целым при $|x| \neq 1$.

Во втором случае у $P(z)$ два корня с одинаковым аргументом и взаимно обратными модулями. Так как $P(z)$ имеет вещественные коэффициенты, оба корня тоже вещественные. Значит, корнями $P(z)$ являются числа x и $1/x$. Тогда по теореме Виета коэффициент в $P(z)$ при z (целое число) равен $-(x+1/x)$. Поэтому и $x+1/x$ — целое число.

Замечание. Без ограничения, что x^n+x^{-n} и x^m+x^{-m} не равны нулю, утверждение задачи не обязательно верно. Например, если

$$x = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6},$$

то $x^3+x^{-3}=0$, $x^2+x^{-2}=1$, но $x+x^{-1}=\sqrt{3}$. (*И. Митрофанов*)

22.5в. Условие. Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: не существует.

Решение[2]. Пусть такой многочлен от двух переменных существует. Тогда его коэффициенты рациональны. Действительно, если многочлен имеет вид $p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$, то

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}(p(2,0)-2p(1,0)+p(0,0)),\\
b &= \frac{1}{2}(p(1,1)-p(1,0)-p(0,1)+p(0,0)),\\
c &= \frac{1}{2}(p(0,2)-2p(0,1)+p(0,0)),\\
f &= p(0,0),\\
d &= p(1,0)-p(0,0)-a,\\
e &= p(0,1)-p(0,0)-c.
\end{aligned}$$

Как известно, аффинным преобразованием с рациональными коэффициентами $(x,y) -> (x,y)$ можно привести такой многочлен к одной из следующих форм:

1) Ax^2+By^2+C, $AB>0$ (эллиптический случай);
2) $A(x^2-By^2)+C$, B — не квадрат целого числа (первый гиперболический случай);

[2] О решениях пп. а, б см. С. Б. Гашков, «Замечания к задачнику „Математического просвещения“», настоящий выпуск, с. 259–262.

3) $Axy + C$ (второй гиперболический случай);
4) $Ax^2 + y$ (невырожденный параболический случай);
5) $Ax^2 + C$ (вырожденный параболический случай);
6) x (линейный случай).

При указанном преобразовании решётка целочисленных точек переходит в некоторую решётку из точек с рациональными координатами. Эти точки можно представить в виде $z + mu + nv$, где z — фиксированная точка, u_1, u_2 — фиксированные векторы, m, n — произвольные целые числа. У векторов u_1, u_2 есть такие линейные комбинации w_1, w_2 с целыми коэффициентами, что вектор w_1 горизонтален, w_2 вертикален и их координаты целые. Положим $N = |w_1||w_2|$ и рассмотрим подрешётку, порождённую точкой z и векторами $|w_2|w_1$, $|w_1|w_2$. Применим гомотетию $(x, y) \to (kx, ky)$, где k — наименьший общий знаменатель координат точки z. Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из полученной решётки L. Тогда L состоит из всех целочисленных точек (x, y), для которых $(x, y) \equiv (x_0, y_0) \bmod (N)$.

На решётке L многочлен P имеет одну из перечисленных форм. Мы покажем, что либо многочлен не инъективен, либо он не принимает значений из некоторого луча. Эти свойства не меняются при умножении нашего многочлена на ненулевую константу. Умножив его на подходящее число, можно считать A натуральным числом, а C целым. Обозначим полученный многочлен через $P(x, y)$ и разберём вышеперечисленные случаи.

Случаи 1 *и* 5. Многочлен P не принимает достаточно далёких от нуля отрицательных значений.

Случай 2. Представим многочлен в виде

$$P(x, y) = A(x^2 - By^2 - 1) + (C + A).$$

Поскольку B не является полным квадратом, уравнение Пелля $x^2 - By^2 = 1$ имеет решение в натуральных числах (x_1, y_1). Линейное преобразование T, заданное матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 & By_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix},$$

является биекцией на решётке всех целочисленных точек и сохраняет значения многочлена P. Оно индуцирует биекцию на $(\mathbb{Z}/N)^2$, которая при возведении в некоторую степень $d > 1$ даёт тождественное отображение. Следовательно, T^d переводит в себя решётку L. При этом T^d не имеет неподвижных точек, кроме начала координат. Поэтому любая точка из L

переходит в другую точку из L с тем же значением P. Следовательно, P не биективен.

Случай 3. Рассмотрим произвольную точку $(x, y) \in L$. Если $x = 0$, то изменение другой координаты не меняет значение многочлена и утверждение доказано. Если $x \neq 0$, положим $q = N + 1$. Тогда $qx_0 \neq 1$, $qx \equiv x \bmod (N)$, $qy \equiv y \bmod (N)$. Следовательно, точки (qx, y) и (x, qy) различны и принадлежат L. При этом $A \cdot qx \cdot y + C = A \cdot x \cdot qy + C$, т. е. P не биективен.

Случай 4. Возьмём $N + 1$ точек решётки L с различными значениями x и одинаковым значением y. Хотя бы в двух из этих точек z_1, z_2 значения P сравнимы по модулю N. Прибавив в точке z_1 к координате y величину $P(z_2) - P(z_1)$, кратную N, получим точку $z' \in L$, для которой $P(z') = P(z_2)$. Следовательно, P не биективен.

Случай 6. Многочлен P не зависит от y и потому принимает каждое своё значение бесконечно много раз. (Это относится и к рассмотренному выше случаю 5.) Утверждение доказано.

Аналогичные рассуждения показывают, что и в трёхмерном пространстве искомый многочлен не существует.

(*А. Я. Канель-Белов, Л. Радзивиловский*)

25.1. Условие. *Индекс Хирша* исследователя — это максимальное такое n, что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: 56.

Решение. *Оценка*. После 50 месяцев у аспиранта набирается достаточно работ «нобелевского уровня». Чтобы на последнюю работу остальные 9 аспирантов сделали 50 ссылок, требуется еще по крайней мере 6 месяцев.

Пример. Аспиранты цитируют все ранее вышедшие работы своих коллег.

Список литературы

[1] *Крылов И. А.* Кукушка и петух (басня).

(*А. Я. Канель-Белов*)