О неевклидовой геометрии[1)]

Э. Б. Винберг

Открытие того, что евклидова геометрия не является единственно возможной, сделанное в начале прошлого века Гауссом, Лобачевским и Больяи, оказало влияние на мировоззрение человечества, сравнимое с влиянием таких великих открытий естественных наук, как гелиоцентрическая система Коперника или эволюционная теория Дарвина. Однако мало кому из неспециалистов известно, что начиная с конца прошлого века неевклидова геометрия, наряду с евклидовой, является одним из рабочих инструментов математики, несмотря на то что «пространство, в котором мы живём», в доступных нашему пониманию пределах является скорее евклидовым, чем неевклидовым.

Характер математических теорий таков, что, различным образом интерпретируя их основные понятия (в геометрии это точки, прямые, движения и т. д.), мы можем применять их к объектам различного рода. В частности, и геометрия может применяться не только к пространству, в котором мы живём, но и к другим пространствам, возникающим в математических и физических теориях. Геометрии этих пространств оказываются различными; в частности, они могут не быть евклидовыми.

Если под неевклидовой геометрией понимать любую геометрию, отличную от евклидовой, то имеется необозримое множество таких геометрий. Было бы трудно сказать что-либо обо всех них сразу. В настоящей статье мы будем понимать термин «неевклидова геометрия» в узком смысле, подразумевая под этим геометрию Лобачевского или двойственную ей сферическую геометрию (о двойственности см. ниже). Среди геометрий, в которых имеется понятие расстояния между точками, эти две геометрии вместе с евклидовой геометрией занимают особое положение. Их можно охарактеризовать как геометрии максимальной подвижности

[1)] Соросовский образовательный журнал. 1996. № 3. С. 104–109.

или геометрии постоянной кривизны, они являются в известном смысле наиболее совершенными.

Первые приложения геометрия Лобачевского получила в трудах самого Лобачевского, которому удалось с её помощью вычислить некоторые интегралы. Это были весьма частные результаты, не получившие дальнейшего развития. Тем не менее некоторые интегралы, найденные Лобачевским, до сих пор фигурируют в таблицах интегралов.

В конце прошлого века в работах Пуанкаре и Клейна была установлена прямая связь геометрии Лобачевского с теорией функций комплексной переменной и с теорией чисел (точнее, арифметикой неопределённых квадратичных форм). С тех пор аппарат геометрии Лобачевского стал неотъемлемым компонентом этих разделов математики.

В последние 15 лет значение геометрии Лобачевского ещё более возросло благодаря работам американского математика Тёрстона (лауреата Филдсовской медали[2)] 1983 г.), установившего её связь с топологией трёхмерных многообразий. Десятки работ ежегодно публикуются в этой области. В связи с этим можно говорить о конце романтического периода в истории геометрии Лобачевского, когда основное внимание исследователей было обращено на её осмысление с точки зрения оснований геометрии вообще. Современные исследования всё больше требуют делового владения геометрией Лобачевского.

В этой статье приводятся некоторые примеры теорем неевклидовой геометрии и формулируется принцип, позволяющий получать теоремы геометрии Лобачевского из теорем сферической геометрии. Затем обсуждаются некоторые задачи неевклидовой геометрии, играющие центральную роль в её приложениях. Читателю, желающему более подробно ознакомиться с затронутыми вопросами, можно рекомендовать статьи [1, 2], где также имеется довольно обширная библиография по этому разделу математики.

Сферический аналог теоремы Пифагора

Сферическая геометрия (по крайней мере, двумерная) хорошо представляется в рамках евклидовой геометрии. Это геометрия обычной сферы, в которой прямыми считаются большие круги, а расстояниями — длины дуг больших кругов или, что то же, соответствующие центральные углы, умноженные на радиус сферы. При изменении радиуса сферы все

[2)] Филдсовская медаль является самой престижной математической наградой. Филдсовские медали, в количестве от двух до четырёх, присуждаются один раз в 4 года на международном конгрессе математиков.

расстояния умножаются на одно и то же число. Поэтому нет принципиальной разницы между геометриями сфер разных радиусов. Удобно считать радиус равным 1. Всякий раз, когда не будет оговорено противное, мы будем иметь в виду именно это.

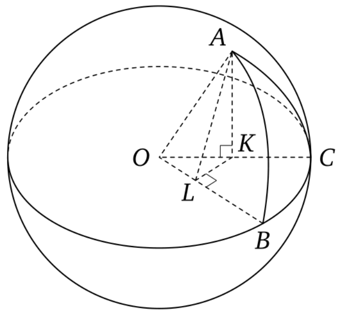

Рис. 1

Выведем аналог теоремы Пифагора на сфере, т. е. выражение гипотенузы прямоугольного сферического треугольника через его катеты.

На рис. 1 изображён прямоугольный треугольник ABC (C — вершина прямого угла) на сфере с центром в точке O. Положим

$$|BC| = a, \quad |CA| = b, \quad |AB| = c \tag{1}$$

(здесь имеются в виду длины отрезков в смысле сферической геометрии, т. е. длины соответствующих дуг больших кругов сферы.)

Проведём теперь некоторые построения в евклидовом пространстве, в котором находится наша сфера. Опустим из точки A перпендикуляр AK на радиус OC. Поскольку плоскости AOC и BOC перпендикулярны, отрезок AK будет перпендикулярен плоскости BOC (изображённой на рис. 1 как «экваториальная» плоскость). Опустим из точки K перпендикуляр KL на радиус OB. По теореме о трёх перпендикулярах отрезок AL будет также перпендикулярен радиусу OB. Имеем

$$a = \angle BOC, \quad b = \angle COA, \quad c = \angle AOB. \tag{2}$$

Из прямоугольных треугольников AOK, AOL и KOL находим:

$$OK = \cos b, \quad OL = \cos c = OK \cos a, \tag{3}$$

откуда

$$\cos c = \cos a \cos b. \tag{4}$$

Это и есть теорема Пифагора в сферической геометрии.

Для сферы произвольного радиуса R мы получаем формулу

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}. \tag{5}$$

При $R \to \infty$ сфера становится всё более и более плоской и её геометрия стремится к евклидовой. Считая a и b постоянными и пользуясь приближённым равенством

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \tag{6}$$

верным при $x \to 0$, мы получаем из (5):

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right) = \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)\left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) = \\ = 1 - \frac{a^2+b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (7)$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2 + o(1). \quad (8)$$

В пределе при $R \to \infty$ получаем, как и следовало ожидать, обычную теорему Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (9)$$

Принцип двойственности. Гиперболический аналог теоремы Пифагора

Плоскость Лобачевского — это «сфера радиуса i» (где i — мнимая единица). Это высказывание имеет тот смысл, что из всякой формулы сферической геометрии получается формула геометрии Лобачевского (или, как ещё говорят, гиперболической геометрии), если все линейные размеры разделить на i. При этом фигурирующие в формуле функции линейных размеров следует предполагать продолженными до аналитических функций в комплексной области.

Для продолжений тригонометрических функций в комплексную область справедливы равенства

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad (10)$$

где по определению

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (11)$$

Переписывая эти равенства несколько по-другому, получаем

$$\cos \frac{x}{i} = \operatorname{ch} x, \quad \sin \frac{x}{i} = \frac{1}{i} \operatorname{sh} x. \quad (12)$$

Таким образом, при переходе от формул сферической геометрии к формулам гиперболической геометрии следует тригонометрические функции всех линейных величин заменить соответствующими гиперболическими функциями. (Мнимые единицы, возникающие от синусов, должны автоматически сократиться.) Читатель, не знакомый с теорией функций комплексной переменной, может принять этот последний рецепт (с некоторыми дополнениями, которые будут сделаны ниже) за формулировку принципа двойственности.

В частности, из формулы (4) сферической геометрии таким образом получается следующий аналог теоремы Пифагора в гиперболической геометрии:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \tag{13}$$

На «сфере радиуса iR» формула (13) превращается в формулу

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}\operatorname{ch}\frac{b}{R}, \tag{14}$$

откуда при $R \to \infty$ аналогично тому, как это было сделано выше для обычной сферы, получается обычная теорема Пифагора.

Длина окружности

Окружность радиуса r в неевклидовой плоскости, так же как и в евклидовой, определяется как геометрическое место точек, находящихся на расстоянии r от заданной точки, называемой центром окружности.

Как легко видеть, окружность радиуса r на сфере представляет собой евклидову окружность радиуса $\sin r$. Поэтому её длина L даётся формулой

$$L = 2\pi \sin r. \tag{15}$$

Применяя сформулированный выше принцип двойственности, получаем отсюда формулу для длины окружности радиуса r на плоскости Лобачевского:

$$L = 2\pi \operatorname{sh} r. \tag{16}$$

Мы видим, что длина окружности в геометрии Лобачевского не прямо пропорциональна её радиусу, как в евклидовой геометрии, а растёт гораздо быстрее. Соответственно этому в круге на плоскости Лобачевского гораздо больше места, чем в круге такого же радиуса на евклидовой плоскости. То же самое можно сказать и о шаре в пространстве.

Площадь треугольника

В рассмотренных выше двух примерах формулы неевклидовой геометрии просто имели иной вид, нежели соответствующие формулы евклидовой геометрии. Однако имеются такие формулы неевклидовой геометрии, для которых нет никакого евклидова аналога. К их числу относится формула, выражающая площадь треугольника через его углы.

Выведем формулу для площади сферического треугольника ABC (рис. 2). Треугольник ABC является пересечением трёх полусфер P, Q, R, граничные окружности которых содержат стороны BC, CA, AB соответ-

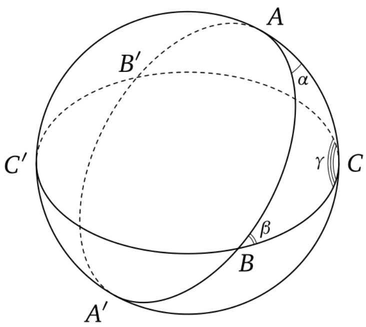

Рис. 2

ственно. (На рис. 2 P — «верхняя» полусфера, Q — «передняя» полусфера, R — «правая» полусфера.)

Площадь любой полусферы равна, как известно, 2π. Площадь пересечения двух полусфер — «поверхность арбузной дольки» — прямо пропорциональна углу между ограничивающими их окружностями. Если этот угол равен π, то пересечение само есть полусфера и его площадь — «поверхность половины арбуза» — равна 2π. Следовательно, коэффициент пропорциональности равен 2. Значит, пересечения Q с R, R с P, P с Q имеют площади 2α, 2β, 2γ соответственно (где α, β, γ — углы нашего треугольника, как изображено на рис. 2).

Объединение полусфер P, Q, R есть вся сфера минус треугольник $A'B'C'$ — антипод треугольника ABC. Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда площадь треугольника $A'B'C'$ также равна S и, следовательно, площадь объединения полусфер P, Q, R равна $4\pi - S$.

С другой стороны, площадь объединения может быть подсчитана как сумма площадей полусфер P, Q, R минус сумма площадей их попарных пересечений, которые были учтены дважды, плюс площадь треугольника ABC, которая в результате не была учтена вовсе (мы её учли трижды, когда суммировали площади полусфер P, Q, R, но затем трижды вычли, когда вычитали площади попарных пересечений этих полусфер). В результате получаем

$$4\pi - S = 2\pi + 2\pi + 2\pi - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma + S, \tag{17}$$

откуда

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{18}$$

Мы видим, таким образом, что сумма углов сферического треугольника всегда больше π, причём избыток равен площади треугольника. Для очень маленького сферического треугольника сумма его углов почти равна π. Это соответствует тому, что такой треугольник почти евклидов.

Согласно принципу двойственности, чтобы получить формулу для площади треугольника на плоскости Лобачевского, надо в формуле (18) все линейные размеры разделить на i. При этом правая часть, не содержащая линейных размеров, не изменится, а площадь разделится на $i \cdot i = -1$. После умножения обеих частей на -1 мы получим формулу

$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \tag{19}$$

Таким образом, сумма углов гиперболического треугольника, наоборот, всегда меньше π, причём недостаток равен площади треугольника. Сумма углов очень маленького гиперболического треугольника почти равна π.

Вообще в малой части пространства неевклидова геометрия близка к евклидовой, причём чем меньше эта часть, тем ближе к евклидовой её геометрия. Поэтому если «пространство, в котором мы живём», является евклидовым, мы никогда не сможем это установить. В самом деле, мы всегда имеем дело с ограниченной частью пространства (пусть и очень большой по нашим масштабам) и точность наших измерений всегда ограничена. Если в пределах этой части пространства мы не обнаруживаем отклонений от евклидовой геометрии, то всегда можно предположить, что на самом деле пространство неевклидово, но обследованная нами его часть слишком мала в масштабах Вселенной, чтобы эта неевклидовость проявилась при нашей точности измерений.

(В действительности всё обстоит ещё сложнее. Согласно теории относительности пространство нельзя рассматривать отдельно от времени. Поэтому сама постановка вопроса о евклидовости пространства нуждается в уточнении.)

Параллельные прямые в геометрии Лобачевского

Чтобы понять ситуацию с параллельными прямыми на плоскости Лобачевского, рассмотрим вначале подробно, как с этим обстоит дело на евклидовой плоскости, хотя читателю это и может показаться тривиальным.

Две прямые евклидовой плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Как известно, через любую точку A евклидовой плоскости, не принадлежащую прямой l, проходит ровно одна прямая m, параллельная l. Это так называемый Пятый постулат Евклида.

Прямая m может быть получена как предельное положение прямой AB, соединяющей точку A с точкой B прямой l, уходящей в бесконечность в каком-либо фиксированном направлении. В самом деле, опустим перпендикуляр AC из точки A на прямую l и проследим за изменением углов

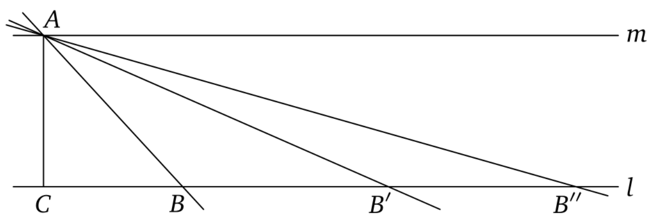

Рис. 3

ABC и BAC. Пусть точка B, удаляясь от C, занимает новое положение B' (рис. 3). Угол ABC, являясь внешним углом треугольника ABB', равен сумме углов BAB' и $AB'B$ (это равносильно утверждению о том, что сумма углов треугольника ABB' равна π). Следовательно,

$$\angle AB'C < \angle ABC. \tag{20}$$

Более того, если $|BB'| = |AB|$, т. е. треугольник ABB' равнобедренный, то $\angle BAB' = \angle AB'B$ и, следовательно,

$$\angle AB'C = \frac{1}{2}\angle ABC. \tag{21}$$

Всё это показывает, что когда точка B удаляется в бесконечность, угол ABC монотонно стремится к нулю.

Далее, так как сумма углов треугольника ABC равна π, получаем, что

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle ABC \tag{22}$$

и, следовательно, угол BAC стремится к $\pi/2$. Это означает, что предельное положение прямой AB есть прямая m, перпендикулярная AC. Ту же прямую мы получим, если точка B будет удаляться в бесконечность в противоположном направлении. Прямая m и есть та единственная прямая, параллельная l, которая проходит через точку A.

Проделаем теперь аналогичные построения на плоскости Лобачевского, где, как мы уже знаем, сумма углов треугольника меньше π. Неравенство (20) лишь усилится, а равенство (21) превратится в неравенство

$$\angle AB'C < \frac{1}{2}\angle ABC. \tag{23}$$

Поэтому окончательный вывод относительно характера изменения угла ABC останется в силе: он монотонно стремится к нулю.

Равенство (22) превратится в неравенство

$$\angle BAC < \frac{\pi}{2} - \angle ABC, \tag{24}$$

причём разность между его правой и левой частями, равная площади треугольника ABC, будет лишь возрастать. Следовательно, угол BAC стремится к некоторому острому углу δ. Предельная прямая m, образующая угол δ с перпендикуляром AC, не пересекает прямую l. В терминологии, принятой в геометрии Лобачевского, именно эта прямая (а не просто всякая прямая, не пересекающая l) называется параллельной l.

Если точка B двигается в противоположном направлении, то прямая AB стремится к другой прямой m', также образующей угол δ с перпендикуляром AC, но отложенный в другую сторону от этого перпендикуляра.

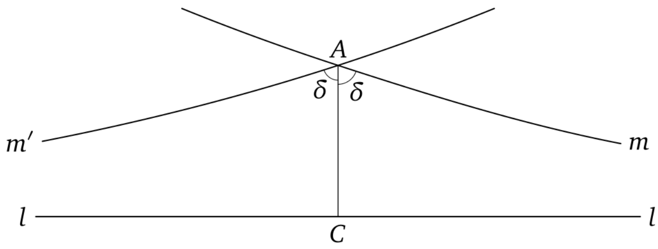

Рис. 4

Прямая m' также считается параллельной l (но «в другом направлении»). Эта ситуация условно изображена на рис. 4 (условно, потому что невозможно точное изображение неевклидовой фигуры на евклидовой плоскости, каковой является плоскость рисунка).

Таким образом, на плоскости Лобачевского через точку A, не лежащую на прямой l, проходит ровно две прямые, параллельные l. Все проходящие через точку A прямые, лежащие между ними, также не пересекают l (но не называются параллельными).

Угол δ называется углом параллельности. Он зависит лишь от расстояния $|AC| = d$. Более точно,

$$\delta = 2 \operatorname{arctg} e^{-d}. \tag{25}$$

Читатель может попытаться вывести эту формулу самостоятельно. Для этого надо сначала, подобно тому как был доказан сферический аналог теоремы Пифагора, вывести необходимые соотношения между сторонами и углами сферического прямоугольного треугольника, затем с помощью принципа двойственности получить соответствующие соотношения между сторонами и углами гиперболического треугольника ABC (в обозначениях рис. 3) и совершить предельный переход. Если вы сумеете это сделать, то вы хорошо усвоили материал настоящей статьи.

Разбиения плоскости на равные правильные многоугольники

Клетчатая бумага и соты представляют собой разбиения евклидовой плоскости на равные правильные многоугольники (в первом случае на квадраты, во втором — на шестиугольники).

Так как сумма углов евклидова p-угольника равна $(p-2)\pi$, каждый угол правильного p-угольника равен $(1-2/p)\pi$. Если в разбиении плоскости на равные правильные p-угольники в каждой вершине сходится q многоугольников, то должно быть

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi = \frac{2\pi}{q}, \tag{26}$$

откуда

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}. \tag{27}$$

Это уравнение имеет три решения:

$$(p,q)=(3,6); \quad (4,4); \quad (6,3). \tag{28}$$

Последним двум решениям соответствуют уже упомянутые разбиения на квадраты и на правильные шестиугольники. Первому решению соответствует разбиение на правильные треугольники.

Формула для суммы углов p-угольника в евклидовой геометрии выводится из формулы для суммы углов треугольника путём разбиения p-угольника на $p-2$ треугольника диагоналями, проведёнными из какой-либо его вершины. Таким же способом доказывается, что сумма углов сферического (соответственно гиперболического) p-угольника равна $(p-2)\pi$ плюс (соответственно минус) площадь этого p-угольника.

Отсюда следует, что угол правильного сферического p-угольника больше, чем $(1-2/p)\pi$, причём в отличие от евклидова случая он зависит от радиуса многоугольника. Если радиус мал, то многоугольник близок к евклидову и его угол лишь ненамного больше $(1-2/p)\pi$. Когда радиус приближается к максимально возможному значению $\pi/2$, то сам многоугольник приближается к полусфере, а его угол приближается к π. Таким образом, угол правильного сферического p-угольника может быть любым числом, лежащим между $(1-2/p)\pi$ и π.

Поэтому разбиение сферы на равные правильные p-угольники, сходящиеся по q в каждой вершине, возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}. \tag{29}$$

Это неравенство имеет следующие решения:

$$(p,q)=(3,3); \ (3,4); \ (3,5); \ (4,3); \ (5,3). \tag{30}$$

Таким образом, имеется ровно пять разбиений сферы на равные правильные многоугольники.

Эти разбиения взаимно однозначно соответствуют правильным многогранникам в евклидовом пространстве. А именно, проектируя границу правильного многогранника из его центра на описанную сферу, мы получаем разбиение сферы на равные правильные многоугольники (проекции граней многогранника). Обратно, для всякого разбиения сферы на равные правильные многоугольники выпуклый многогранник, вершинами которого служат вершины разбиения, является правильным.

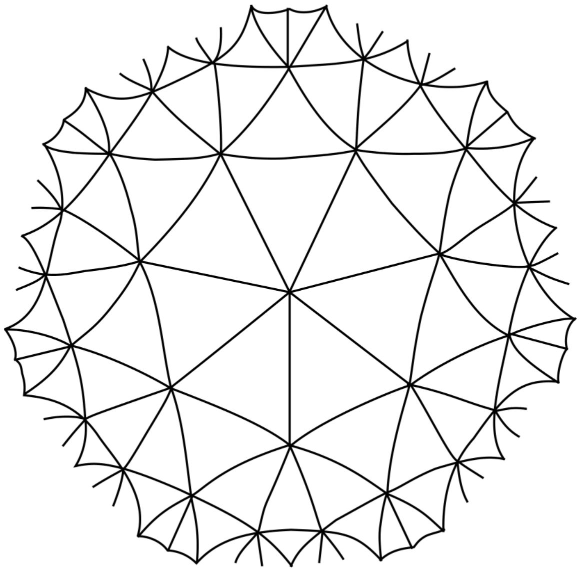

Рис. 5

Полученный выше результат означает, что имеется ровно пять правильных многогранников. Это известные с древних времён тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб, додекаэдр.

Аналогично угол правильного гиперболического p-угольника меньше, чем $(1-2/p)\pi$, причём если радиус многоугольника мал, то его угол лишь ненамного меньше этой величины, а когда радиус стремится к бесконечности, то угол стремится к нулю. Таким образом, угол правильного гиперболического p-угольника может быть любым (положительным) числом, меньшим $(1-2/p)\pi$.

Поэтому для разбиений плоскости Лобачевского на равные правильные многоугольники мы получаем неравенство

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}, \tag{31}$$

решениями которого являются все пары чисел (p,q), кроме тех, которые являются решениями уравнения (27) или неравенства (29), то есть все пары, кроме перечисленных выше восьми. Разбиение, отвечающее решению $(3,7)$, условно изображено на рис. 5.

Мы видим, что, по крайней мере в отношении разбиений на правильные многоугольники, плоскость Лобачевского представляет куда больше возможностей, чем евклидова плоскость и сфера.

Ещё больше возможностей представляется, если отказаться от (на самом деле искусственного) требования правильности многоугольников разбиения (сохранив, однако, требование их равенства). Именно с такими разбиениями связаны упоминавшиеся в начале этой статьи приложения геометрии Лобачевского к теории чисел и теории функций комплексной переменной.

Аналогичным образом можно рассматривать разбиения пространства на равные многогранники. В случае евклидова пространства изучение таких разбиений имеет тесную связь с кристаллографией, а в случае пространства Лобачевского — с топологией трёхмерных многообразий. В последнем случае теория таких разбиений ещё далека от завершения, хотя разбиения пространства Лобачевского на равные правильные многогранники были описаны Коксетером ещё в 1954 г.

Список литературы

[1] *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 29. С. 1–146.

[2] *Винберг Э. Б., Шварцман О. В.* Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Там же. С. 147–259.