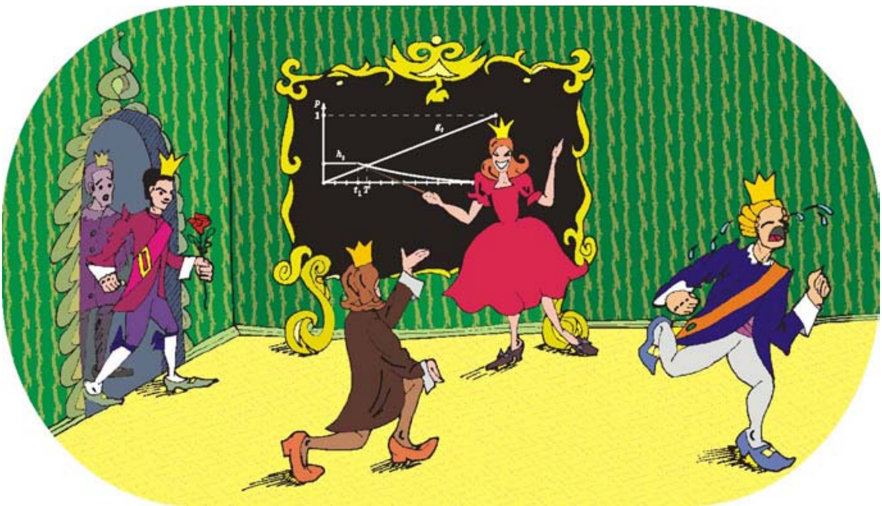
Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 25

С. М. Гусейн-Заде

РАЗБОРЧИВАЯ НЕВЕСТА



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2003

УДК 519.216
ББК 22.171
Г96

Аннотация

Примерно 40 лет тому назад М. Гарднер придумал такую задачу: «В некотором царстве, в некотором государстве пришло время принцессе выбирать себе жениха. В назначенный день явились 1000 царевичей. Их построили в очередь в случайном порядке и стали по одному приглашать к принцессе. Про любых двух претендентов принцесса, познакомившись с ними, может сказать, какой из них лучше. Познакомившись с претендентом, принцесса может либо принять предложение (и тогда выбор сделан навсегда), либо отвергнуть его (и тогда претендент потерян: царевичи гордые и не возвращаются). Какой стратегии должна придерживаться принцесса, чтобы с наибольшей вероятностью выбрать лучшего?».

В 1965 году формулировку этой задачи и её решение рассказал на своём семинаре Е. Б. Дынкин. Но его метод был необобщаем на другие варианты задачи: например, когда целью является выбор не наилучшего, а одного из трёх лучших. В таком виде задача была решена автором при помощи метода, который легко переносится и на ряд близких задач. Так из полушуточной задачи вырос новый раздел математики — теория оптимальной остановки случайных процессов.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной автором 30 ноября 2002 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов (запись Ю. Л. Притыкина).

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей: школьников, студентов, учителей.

Издание осуществлено при поддержке
Департамента образования г. Москвы
и Московской городской Думы.

ISBN 5-94057-076-3

Сабир Меджидович Гусейн-Заде.

Разборчивая невеста.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 25).
М.: МЦНМО, 2003. — 24 с.: ил.

Редактор *Ю. Л. Притыкин.*
Художник *А. Ю. Шамшурина.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 14/VII 2003 года.
Формат бумаги 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Физ. печ. л. 1,50.
Усл. печ. л. 1,47. Уч.-изд. л. 1,44. Тираж 3000 экз. Заказ 2711.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 72 85, 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

Невеста-девушка смышляла жениха;
Тут нет ещё греха,
Да вот что грех: она была спесива.
Сыщи ей жениха, чтоб был хорош, умён,
И в лентах, и в чести, и молод был бы он
(Красавица была немножко прихотлива):
Ну, чтобы всё имел. Кто ж может всё иметь?
Ещё и то заметь,
Чтобы любить её, а ревновать не сметь.
Хоть чудно, только так была она счастлива,
Что женихи, как на отбор,
Презнатные катили к ней на двор.
Но в выборе её и вкус и мысли тонки:
Такие женихи другим невестам клад,
А ей они на взгляд
Не женихи, а женишонки!
Ну, как ей выбирать из этих женихов?

И. А. Крылов
Разборчивая невеста

Речь в данной брошюре пойдёт о задаче, которая, с одной стороны, достаточно элементарна, чтобы её можно было рассказать от начала и до конца, и, с другой стороны, была придумана не когда-то там в девятнадцатом веке или раньше, а во вполне обозримом прошлом, в веке двадцатом, причём положила начало новому разделу теории вероятностей или даже прикладной теории вероятностей, который называется теорией оптимальной остановки случайных процессов. История этой задачи такова. В 1960 году её придумал Мартин Гарднер, автор огромного количества книг с увлекательными задачами и головоломками, связанными с математикой. Его можно назвать популяризатором математики. Оказалось, что на тот момент эта задача в теории вероятностей не рассматривалась. В 1963 году её решил Евгений Борисович Дынкин, замечательный математик, а также известный организатор сначала вечерних математических кружков, а потом и математических классов в школе, сегодня имеющей название «Лицей „Вторая школа“». Я расскажу прямо ту задачу, которую решил Дынкин, так как это самый простой вариант формулировки, а вот его метод решения предназначен только для этой задачи и не работает в самых простых обобщениях. В 1966 году под влиянием и по совету того же Дынкина я занялся этой задачей и нашёл решение в достаточно общем виде. Позже с этой задачей оказался связанным очень известный в современной России человек, фамилия которого Березовский. Борис Абрамович Березовский известен как бизнесмен и политический деятель, но когда-то он был математиком и защитил докторскую диссертацию по проблемам, связанным как раз с обобщениями этой задачи.

Теперь я расскажу саму задачу, ровно так, как её формулировал Гарднер. Это задача о разборчивой невесте. Пусть в некотором царстве, в некотором государстве принцесса решила, что ей пора найти себе жениха. Созвали царевичей и королевичей со всего света, и явилось 1000 претендентов. Про любых двух когда-либо увиденных принцесса может сказать, кто из них лучше. При этом царевичи, как говорят математики, образуют упорядоченное множество, т. е. если Иван Царевич лучше Василия Царевича, а Василий Царевич лучше Фёдора Царевича, то Иван Царевич лучше Фёдора Царевича. Претенденты входят к принцессе по очереди, по одному, причём их порядок определён случайным образом, т. е. вероятность появления какого-то царевича первым, или пятисотым, или тысячным совершенно одинакова. Принцесса, разумеется, умея их сравнивать, может сказать, что, например, вошедший тридцатым является десятым по качеству, т. е. девять из предыдущих были лучше, а остальные — хуже, и т. д. Цель принцессы — получить самого хорошего жениха, т. е. даже второй её не устраивает. На каждом шаге, т. е. после встречи с каждым из царевичей, она решает, берёт ли она его в мужья. Если берёт, то на этом смотр претендентов заканчивается, они все разъезжаются по домам. Если же принцесса ему отказывает, то царевич, будучи отвергнутым, тут же уезжает домой, потому что все царевичи и королевичи — люди гордые. Показ претендентов на замужество при этом продолжается. Если в конце концов принцесса не получает лучшего, то считается, что она проиграла, выходить замуж вообще не будет, а уйдёт в монастырь (про монастырь я уже от себя придумал, у Гарднера этого не было). Спрашивается, как действовать принцессе, чтобы с наибольшей вероятностью получить лучшего жениха.

В основе решения задачи заложен простой принцип, имеющий громкое название «динамическое программирование». На самом деле это просто планирование, решение задачи с конца. Сейчас я поясню, что имеется в виду. Предположим, что принцесса пропустила 999 претендентов и сейчас встречается с последним. Тогда у неё нет никакой альтернативы, всё совершенно ясно. Если последний и есть самый лучший, то принцесса выиграла, добилась своего, если он не самый лучший, то принцесса проиграла и уходит в монастырь. В любом случае отвергать последнего претендента бессмысленно, это к победе точно не приведёт. Теперь предположим, что принцесса знает, как вести себя на 601-м шаге. Попробуем понять, что делать при встрече с 600-м, т. е. за шаг до этого. Ясно, что если 600-й претендент не лучше всех предыдущих, то и думать нечего, ему нужно отказывать. Вообще в нашей задаче принцесса будет останавливаться только на тех, кто лучше всех предыдущих, иначе она точно проиграет, ведь её устраивает только самый лучший. Если же он действительно лучше всех предыдущих, то у принцессы есть выбор. Например, когда приходит первый, то, естественно, он лучше всех предыдущих, так как и предыдущих-то никаких не было, но останавливаться на нём как-то очень странно, шансов победить мало, с таким же успехом можно и на десятом остановиться, лучше ещё подождать хоть немного, может, кто-нибудь получше появится. Итак, пусть 600-й лучше всех предыдущих, и принцессе нужно оценить (она, наверное, и не может, но ведь для этого математики и существуют), что лучше: выбрать этого самого 600-го или отказать ему, перейти к следующему, а там, как мы помним, уже всё известно, понятно, как нужно поступать, и шансы на получение лучшего жениха мы посчитать сможем.

Итак, объявим для начала, что 1000 мы обозначим за n, т. е. решим задачу для произвольного количества претендентов. Далее, пусть принцесса находится на шаге t (это номер шага, т. е. натуральное число). Первое, что ей нужно знать — это вероятность победы в случае выбора жениха в момент t, при условии, что он лучше всех предыдущих, т. е. вероятность того, что он не только лучше всех предыдущих, а вообще лучше всех. Обозначим эту вероятность за g_t. Кроме того, необходимо знать ещё одну величину — это вероятность того, что она в конце концов получит самого хорошего жениха, при условии, что она пропустит первых t претендентов и дальше будет пользоваться оптимальной стратегией (здесь подразумевается наше предположение о том, что принцесса знает, как себя оптимально вести начиная с шага $t+1$, это и есть принцип, используемый в динамическом программировании). Обозначим эту вероятность за h_t. Зная эти две величины для любого t, мы можем легко понять оптимальную стратегию поведения для принцессы: если на шаге t претендент не лучше всех предыдущих, то, ясное дело, его нужно отвергнуть, если же он действительно лучший среди первых t претендентов, то нужно сравнить g_t и h_t, если больше g_t, то нужно остановиться на претенденте t, если больше h_t, то нужно его отвергнуть и перейти к следующему, такая стратегия следует прямо из определения этих вероятностей. Что же делать в случае равенства? Понятно, что это неважно, так как вероятность победы в каждом из случаев одинакова, поэтому давайте договоримся, что в случае равенства g_t и h_t принцесса будет, например, всё время останавливаться на текущем претенденте.

Стратегия нами уяснена, осталось только посчитать g_t и h_t. Вероятность g_t я посчитаю прямо сейчас, явно, а h_t пока считать не буду, только скажу достаточно очевидный факт о том, как эта вероятность себя ведёт в зависимости от t.

Итак, посчитаем g_t. Начнём, как и было обещано, считать с конца, т. е. сначала посчитаем g_n, потом g_{n-1}, и т. д., заполняя

g_t					
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 1

g_t					1
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 2

таблицу на рис. 1. Итак, если на шаге n претендент оказался лучше всех предыдущих, то какова вероятность того, что он действительно самый лучший среди всех претендентов? Сто процентов, или единица (рис. 2; кстати, вероятность можно мерить в процентах, но проценты — это те же доли, а именно, сотые доли, поэтому вероятность также меряют в долях от единицы). Далее, пусть принцесса оказалась на шаге $n-1$, и перед ней предстал претендент, который лучше всех предыдущих. Какова же будет вероятность проигрыша в случае, если принцесса его выберет? Это будет вероятность того, что последний, n-й царевич окажется лучше всех. Но давайте представим всех царевичей и королевичей упорядоченными по возрастанию «хорошести», «качества» (как мы помним, по условию это можно сделать). Поскольку царевичи равновероятно разбросаны по этому списку (что тоже следует из условия), то вероятность самого хорошего претендента оказаться на n-м месте (т. е. как раз вероятность проигрыша) точно такая же, как оказаться на 1-м, на 57-м, на 600-м или на любом другом. Значит, они все (эти вероятности) равны $\frac{1}{n}$, и поэтому вероятность победы равна $g_{n-1}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ (рис. 3).

Теперь хорошо бы уже начать строить гипотезы относительно того, чему равно g_t в общем случае, но для этого пока ещё слишком мало данных, поэтому сначала посчитаем g_{n-2}. Это уже сложнее, чем в предыдущих двух случаях, но тут нам поможет один очень полезный способ подсчёта такого рода вероятностей. Представим себе следующую ситуацию. Иван Царевич стоит на перепутье, перед ним лежит камень, на котором написано: направо пойдёшь, с вероятностью 0,5 утонешь, налево пойдёшь, с вероятностью 0,4 шею сломаешь, а прямо пойдёшь, с вероятностью 0,3 волки загрызут. Иван Царевич решает, что выберет себе дорогу, кинув монетку: если выпадет орёл, то он пойдёт прямо, если решка, то он ещё раз кинет монетку и при выпадении орла пойдёт налево, а при

g_t				$\frac{n-1}{n}$	1
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 3

выпадении решки направо. Спрашивается, с какой вероятностью Иван Царевич погибнет? Понятно, что вероятность пойти прямо равна 0,5, пойти налево — 0,25, пойти направо — 0,25. Конечно, сумма этих вероятностей равна единице. Погибнуть Иван Царевич может в одном из трёх случаев, в соответствии с количеством направлений. К примеру, вероятность того, что Иван Царевич выберет прямой маршрут и погибнет, равна $0{,}5\cdot 0{,}3$ (важно понимать, что 0,3 — это вероятность Ивана Царевича погибнуть, только если он уже решил пойти прямо, так называемая *условная* вероятность; но ещё не зная своего будущего выбора, он может посчитать вероятность гибели, состоящую из трёх слагаемых, одно из которых как раз $0{,}5\cdot 0{,}3$). Таким образом, полная вероятность гибели Ивана Царевича равна $0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}25\cdot 0{,}4+0{,}25\cdot 0{,}5=0{,}375$, т. е. нужно умножить вероятность каждого случая на соответствующую условную вероятность, а потом результаты сложить. Эта формула в теории вероятностей называется *формулой полной вероятности*.

Вернёмся теперь к подсчёту g_{n-2}. Предположим, $(n-2)$-й претендент оказался самым лучшим среди всех предыдущих, и посчитаем, какова вероятность того, что он действительно лучше всех, т. е. вероятность того, что ни n-й, ни $(n-1)$-й не являются самыми лучшими. Заметим, что вероятность $(n-1)$-го оказаться лучше $(n-2)$-го равна $\dfrac{1}{n-1}$ (действительно, рассуждая аналогично тому, как мы рассуждали при подсчёте g_{n-1}, получаем, что эта вероятность равна вероятности того, что $(n-1)$-й претендент окажется именно на последнем месте в списке всех $n-1$ претендентов, упорядоченных по возрастанию «качества»). Соответствующая вероятность того, что $(n-1)$-й будет не лучше $(n-2)$-го, равна $1-\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{n-2}{n-1}$. Посчитаем условные вероятности победы. Если $(n-1)$-й лучше $(n-2)$-го, то тогда $(n-2)$-й точно не самый лучший среди всех n претендентов, т. е. вероятность победы в этом случае равна 0. Если $(n-1)$-й хуже $(n-2)$-го, то тогда $(n-2)$-й является лучшим среди первых $n-1$ претендентов. А какая вероятность победить в этом случае? Иными словами, какова вероятность лучшего среди первых $n-1$ остаться лучшим среди всех n? Но ведь мы эту вероятность уже считали, она равна $\dfrac{n-1}{n}$, т. е. в точности g_{n-1}. Итак,

$$g_{n-2}=\frac{1}{n-1}\cdot 0+\frac{n-2}{n-1}\cdot g_{n-1}=\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-2}{n},$$

и мы можем заполнить нашу таблицу немного дальше (рис. 4).

g_t			$\frac{n-2}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	1
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 4

Теперь уже у нас возникает подозрение насчёт общей формулы для g_t. И действительно, несложно доказать, пользуясь методом математической индукции, что $g_t = \frac{t}{n}$ (обязательно проведите доказательство!).

Вернёмся к h_t. Вспомним, как определялась нами эта величина. Именно, h_t — это вероятность принцессы победить, т. е. получить в конце концов самого хорошего жениха, если она дойдёт до шага t и пропустит претендента, который ей на этом шаге встретится, а дальше будет действовать по оптимальной стратегии. Иными словами, это вероятность победить, оптимально действуя начиная с шага $t+1$, а происходящее до этого ни принцессу, ни нас вообще не волнует. Дальше мы посчитаем эту самую вероятность h_t, а сейчас просто заметим одно сразу бросающееся в глаза свойство этой функции. Из определения вероятности h_t вытекает, что какую бы стратегию, при которой принцесса может делать свой выбор только начиная с шага $t+1$, мы не предложили, вероятность успеха в случае действия принцессы в соответствии с этой стратегией не превосходит h_t. Предложим тогда такую: принцесса, вместо того чтобы сразу, с $(t+1)$-го шага, действовать оптимально, прогоняет $(t+1)$-го претендента и действует оптимально, но уже начиная с $(t+2)$-го шага. Тогда, с одной стороны, вероятность победы в случае выбора такой стратегии равна h_{t+1}, а с другой стороны, это же одна из стратегий для какого бы то ни было действия начиная с шага $t+1$, отсюда сразу получаем неравенство $h_t \geqslant h_{t+1}$ для любого t. Этот факт можно переформулировать так: чем раньше принцесса начнёт действовать по оптимальной стратегии, тем больше у неё шансов на победу. Значит, h_t — монотонно невозрастающая функция (правда, от целочисленного аргумента). К примеру, $h_n = 0$, потому что если принцесса отвергает последнего претендента, то будь её последующая стратегия хоть трижды оптимальной, всё равно принцесса уже не выиграет, так как больше никого из претендентов не осталось, однако h_1 — вовсе даже и не ноль, а какое-то вполне положительное число, предмет всего нашего изучения, т. е. $h_1 > h_n$.

Посмотрим, что же у нас получилось. Изобразим графики функций h_t и g_t, при этом будем рисовать их плавной линией, хотя на самом деле они точечные, можете считать, что мы эти точки просто соединяем. По одной оси отложим t — время, номер ша-

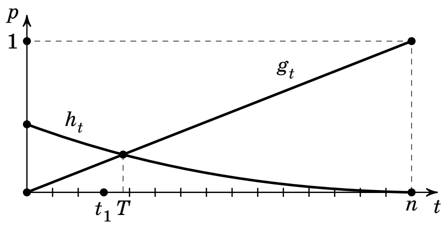


Рис. 5

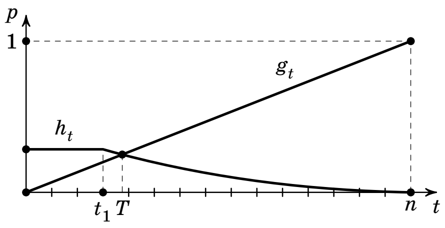


Рис. 6

га, а по другой p — шансы, вероятность, она принимает значения от 0 до 1. При построении учтём уже полученные результаты — линейность g_t и монотонность h_t. Тогда у нас получится примерно то, что изображено на рис. 5. Ясно, что построенные графики двух функций пересекутся. Обозначим абсциссу точки пересечения за T (функции определены только в целых точках, но мы их каким-то образом продлили на все числа, поэтому T не обязано быть целым). Вспомним нашу стратегию, которую мы придумали для принцессы: если на шаге t вероятность h_t больше g_t, то продолжать независимо от претендента, если h_t не превосходит g_t, то останавливаться в случае, когда текущий претендент лучше всех предыдущих и продолжать в случае, когда он не является лучшим среди всех предыдущих. Если t_1 — это последнее целое число перед T, то тогда стратегия, как видно из рис. 5, преображается в следующую: пропустить первые t_1 человек, только посмотрев на них для будущего сравнения с остальными, а дальше остановиться на первом же, который лучше всех своих предыдущих. Теперь можно понять, какую ошибку, а вернее, неточность, мы допустили при построении графика. Сравним, например, h_1 и h_2. Скорее всего, t_1 заведомо больше двух, а значит, и больше единицы. Поэтому на шаге 1 и на шаге 2 стратегия одна и та же: нужно ждать до шага t_1, а сейчас претендента-королевича пропустить. Отсюда и вероятность победы в этих случаях совершенно одинакова и совпадает с h_{t_1}. Таким образом, заключаем, что до момента t_1 функция h_t остаётся постоянной и имеет вид, примерно изображённый на рис. 6.

Для решения задачи осталось только посчитать h_t, а значит, и t_1, чем мы сейчас и займёмся. Делать это мы тоже будем с конца, причём в силу вышеприведённого замечания будем считать h_t только для $t \geqslant t_1$. Как уже отмечалось, $h_n = 0$ (рис. 7). Посмотрим,

h_t					0
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 7

h_t				$\frac{1}{n}$	0
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 8

что у нас с h_{n-1}. Это вероятность того, что принцесса получит лучшего жениха, если пропустит $(n-1)$-го претендента. Но это произойдёт в единственном случае — если последний окажется лучше всех. Вероятность этого мы уже считали. Она равна $\frac{1}{n}$ (рис. 8). Попробуем разобраться с h_{n-2}. Здесь будет уже не столь простая выкладка. Предположим, что принцесса пропустила претендента с номером $n-2$ и дальше действует по оптимальной стратегии. Тогда возможны два варианта: $(n-1)$-й является лучшим среди первых $n-1$ претендентов (вероятность этого, как уже неоднократно отмечалось, равна $\frac{1}{n-1}$) и $(n-1)$-й не является лучшим среди первых $n-1$ претендентов (вероятность этого, соответственно, равна $\frac{n-2}{n-1}$). В первом случае очевидно, что этого последнего нужно брать, это соответствует оптимальной стратегии (напомним, что мы договорились вычислять h_t в предположении, что $t \geqslant t_1$), причём вероятность победы просто равна $g_{n-1}=\frac{n-1}{n}$. Во втором случае принцесса должна автоматически отказать царевичу, и тогда шансы на победу равны $h_{n-1}=\frac{1}{n}$. По уже обсуждавшейся формуле полной вероятности получаем, что

$$h_{n-2}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-2)+(n-1)}{n(n-1)}$$

(оставим пока это в таком виде, рис. 9).

Сформулировать гипотезу насчёт общего вида h_t пока затруднительно. Однако нам всё равно придётся потом сравнивать h_t и g_t. Сделать это можно, к примеру, проследив за величиной $\frac{h_t}{g_t}$. Если она больше 1, то h_t больше, чем g_t, если она меньше 1, то, соответственно, наоборот, g_t больше h_t. Поделив числа из таблицы рис. 9

h_t			$\frac{(n-2)+(n-1)}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n}$	0
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 9

$\frac{h_t}{g_t}$			$\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	0
t		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

Рис. 10

на числа из таблицы рис. 4, несложно получить результаты, представленные на рис. 10 (проделайте это!). Закономерность, бросающаяся в глаза при рассмотрении этих данных, неслучайна. Давайте попробуем доказать, что

$$h_t=\frac{t}{n}\cdot\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

(здесь мы использовали уже известный нам факт о том, что $g_t=\frac{t}{n}\Big)$. Будем рассуждать по индукции с конца. База ($t=n$, $n-1$ и $n-2$) у нас есть. Предположим, что для h_t формулу мы уже получили, получим её для h_{t-1}. Итак, пусть на шаге $t-1$ принцесса пропустила претендента и перешла на шаг t. Тогда возможны два случая: t-й претендент может оказаться лучше всех предыдущих $\left(\text{вероятность этого равна } \frac{1}{t}\right)$ и может не оказаться таковым $\left(\text{вероятность этого } \frac{t-1}{t}\right)$. В первом случае вероятность в итоге победить равна $\frac{t}{n}=g_t$ (потому что, напомню, мы считаем h_t для тех t, которые больше t_1, а для них оптимальная стратегия поведения принцессы заключается в том, чтобы выбирать претендента в женихи, как только он лучше всех предыдущих). Во втором случае вероятность итоговой победы принцессы равна

$$h_t=\frac{t}{n}\cdot\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

(эта формула нам уже «известна» по предположению индукции). Таким образом,

$$\begin{aligned}h_{t-1}&=\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{n}+\frac{t-1}{t}\cdot\frac{t}{n}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=\\&=\frac{1}{n}+\frac{t-1}{n}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=\\&=\frac{t-1}{n(t-1)}+\frac{t-1}{n}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=\\&=\frac{t-1}{n}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right).\end{aligned}$$

Формула для h_t доказана.

Теперь для окончательного решения задачи нужно сравнить h_t и g_t. Чтобы это сделать, мы некоторое время назад пытались сравнить величину $\frac{h_t}{g_t}$ с единицей. Как сейчас уже понятно, для $t \geqslant t_1$ имеет место формула

$$\frac{h_t}{g_t}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Поэтому способ нахождения t_1 нами получен: нужно, постоянно уменьшая t, складывать $\frac{1}{t}$, начиная с $t=n-1$, пока сумма не станет больше 1; то самое t, при котором это произойдёт, и есть t_1 (а при каком-то t это заведомо произойдёт, если конечно у нас не крайний случай и n не равно 1, впрочем, в этом случае у принцессы нет никаких проблем). Например, если $n=5$, то $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}<1$, а $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}>1$, т. е. стратегия такая: первого пропустить, второго пропустить, а дальше, начиная с третьего, брать в мужья первого попавшегося, который лучше всех предыдущих. Такой способ в принципе всегда может привести к ответу, но всё же хотелось бы ещё упростить его, тем более что, как сейчас окажется, это действительно возможно. Попробуем посчитать сумму, которая у нас записана в правой части формулы для $\frac{h_t}{g_t}$. При этом сразу необходимо оговориться, что сумму эту мы будем считать лишь приближённо, а для этого требуется предположить, что и t, и n — достаточно большие числа (в оригинале задача была сформулирована для большого $n=1000$, а из предыдущих рассуждений следует, что t_1 — также большое, поэтому наше предположение оправдано).

Итак, будем считать сумму $S=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}$. Для начала сделаем следующее. Нарисуем график функции $y=\frac{1}{x}$. Отметим на нём точки с абсциссами t, $t+1$, $t+2$, ..., n. А дальше будем рисовать прямоугольники. Первый расположен между t и $t+1$, причём его основание лежит на оси Ox, а высота равна $\frac{1}{t}$. Второй расположен аналогичным образом между $t+1$ и $t+2$, а его высота равна $\frac{1}{t+1}$. Аналогично третий, четвёртый, и т. д., последний будет расположен между $n-1$ и n (рис. 11). Прямоугольников будет много, потому что, как мы помним, t и n — большие числа.

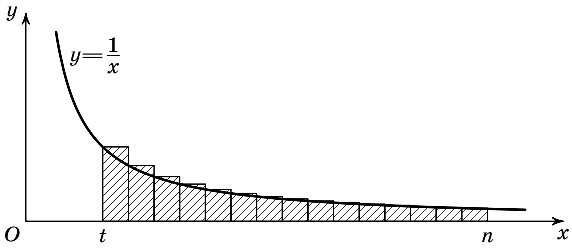


Рис. 11

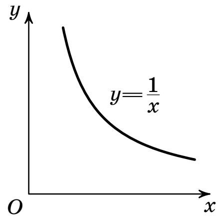


Рис. 12

Заметим следующее: площадь изображённой фигуры, являющейся объединением всех прямоугольников, в точности равна сумме S, которую нам нужно посчитать.

Теперь будем делать совсем странные вещи. Нарисуем опять отдельно график функции $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 12). Сделаем с ним такую операцию: сожмём его вдоль оси Ox в 10 раз. Что это значит? А просто приблизим каждую точку графика к оси Oy на расстояние, в 10 раз меньшее того, на котором она находится от этой оси сейчас (точка при этом будет двигаться вдоль оси Ox, поэтому такое преобразование и называется сжатием). График станет узеньким, прижимающимся к осям координат (рис. 13). Теперь растянем получившийся график вдоль оси Oy в 10 раз, т. е. удалим каждую точку графика от оси Ox на расстояние, в 10 раз большее того, на котором она находится от этой оси сейчас (рис. 14). Спрашивается, что же у нас получилось? Оказывается, что после этих

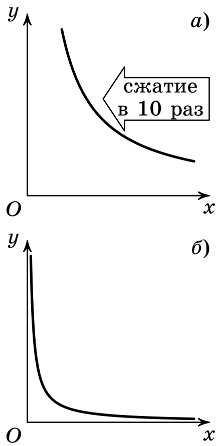


Рис. 13

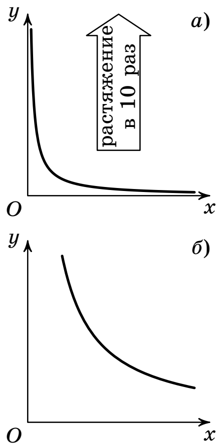


Рис. 14

двух преобразований график функции $y=\frac{1}{x}$ переходит сам в себя, т. е. в график функции $y=\frac{1}{x}$. Действительно, после первого преобразования точка графика с координатами $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ переходит в точку с координатами $\left(\frac{x}{10}, \frac{1}{x}\right)$, а уже эта точка после второго преобразования переходит в точку $\left(\frac{x}{10}, \frac{10}{x}\right)$, которая лежит на исходном графике. (На самом деле мы лишь проверили, что точки исходного графика переходят в какие-то другие точки исходного графика, но мы не проверили, что каждая точка графика является образом какой-то точки, т. е. что в каждую точку графика перешла какая-то другая. Однако важно только понимать, что эта проверка необходима, так как проделать её можно абсолютно аналогично той, которую мы провели.)

Добавим к исходному графику фигуру из прямоугольников (см. рис. 11) и проделаем те же операции. Что произойдёт с графиком, мы уже знаем. Перейдёт в себя. А вот что произойдёт с фигурой? Понятно, что она как-то будет сжиматься и растягиваться, поэтому форму не сохранит. Но зато можно смело утверждать, что её площадь (как раз то, что нас интересует) не изменится. Действительно, возьмём один какой-нибудь прямоугольник из этой фигуры. Сначала первым преобразованием мы его площадь уменьшаем в 10 раз, а потом вторым увеличиваем в 10 раз, т. е. она становится такой же, как и была. Значит, и площадь всей фигуры не меняется.

Для чего же нам всё это было надо? Вот для чего. Сделаем опять те же операции с картинкой на рис. 11, но только сжимать и растягивать будем не в 10, а в t раз. Посмотрим, что получится. Если раньше мы изображали график с непонятными масштабами по осям, потому что, с одной стороны, t — очень большое, $\frac{1}{t}$ — очень маленькое, и адекватно их изобразить сложно, а с другой стороны, хочется иметь хоть сколько-нибудь наглядную картинку, то теперь можно спокойно объявить масштабы по осям равными, так как точка с координатами $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ переходит в точку с координатами (1, 1). Все прямоугольники теперь очень узенькие, ширины $\frac{1}{t}$ (потому что t — большое), расположены они от 1 до $\frac{n}{t}$ (рис. 15). Из-за того, что все прямоугольники такие узенькие, та часть фигуры, которая расположена над гиперболой (гра-

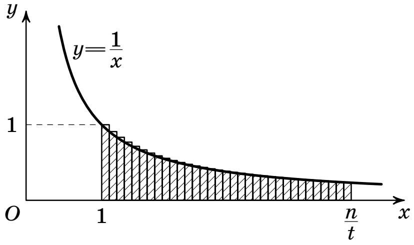


Рис. 15

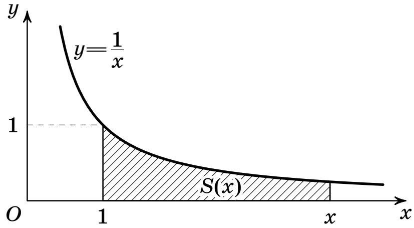


Рис. 16

фиком функции $y=\frac{1}{x}\Big)$, имеет очень маленькую площадь, поэтому площадь фигуры, равная нашей сумме S, практически в точности равна площади под гиперболой от 1 до $\frac{n}{t}$. Введём обозначение: будем обозначать через $S(x)$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой, от 1 до x (рис. 16). Таким образом, имеем: $S\approx S\left(\frac{n}{t}\right)$. Наша задача, напомню, заключается в том, чтобы найти первое такое t, что сумма S для него больше 1. Это, как только что стало понятно, равносильно задаче о решении уравнения $S(x)=1$.

Для решения этого уравнения попробуем сначала выяснить некоторые свойства функции $S(x)$. Первое очевидное свойство заключается в том, что $S(1)=0$. Действительно, при $x=1$ криволинейная трапеция вырождается в отрезок, а его площадь — ноль. Второе свойство: при $x>1$ выполняется неравенство $S(x)>0$. Третье свойство заключается в том, что функция $S(x)$ монотонно возрастает. Четвёртое свойство ключевое: утверждается, что для любых x, $y>1$ имеет место равенство $S(xy)=S(x)+S(y)$. Для доказательства сначала изобразим, что эта формула означает. Нарисуем в который раз уже график функции $y=\frac{1}{x}$, отметим на нём точки с абсциссами 1, x, y и xy (рис. 17). Заметим, что площадь криволинейной трапеции от x до xy в точности равна $S(xy)-S(x)$ (по определению функции $S(x)$). Теперь сделаем такое преобразование всей картинки: сначала сожмём её вдоль оси Ox в x раз, а потом растянем вдоль оси Oy в x раз. Как мы помним, при таком преобразовании график перейдёт сам в себя. Кроме того, точка

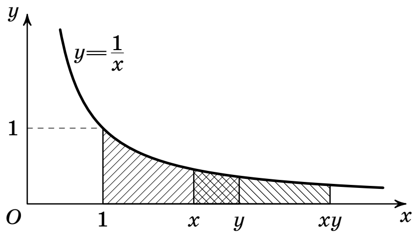


Рис. 17

с координатами $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ перейдёт в точку с координатами $(1, 1)$, а точка с координатами $\left(xy, \frac{1}{xy}\right)$ — в точку с координатами $\left(y, \frac{1}{y}\right)$. Значит, криволинейная трапеция под гиперболой от x до xy перейдёт в криволинейную трапецию от 1 до y. При этом, как мы помним, площадь при проведённом нами преобразовании сохраняется, отсюда имеем равенство $S(xy) - S(x) = S(y)$, что и требовалось. (Внимательный читатель помнит, что мы доказали инвариантность, т. е. неизменность, площади при таких преобразованиях только для прямоугольника. Доказательство для криволинейных фигур несколько сложнее и упирается непосредственно в определение площади, однако всё-таки факт остаётся верным и для криволинейной фигуры, если её площадь может быть сколь угодно точно приближена суммарной площадью каких-нибудь покрывающих эту фигуру прямоугольников.)

Такие свойства напоминают свойства одной из функций, хорошо известных по школьной программе. Что же это за функция? Логарифмическая! Сейчас мы это докажем.

В школе до логарифмической изучается сначала показательная функция, являющаяся обратной к логарифмической. Давайте запишем свойство обратной к $S(x)$ функции, которую обозначим за $F(x)$, получающееся из уже известного четвёртого свойства самой $S(x)$: $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$. Отсюда тут же получаем, что $F(x)$ — показательная. Действительно, пусть $F(1) = a$. Тогда $F(2) = a^2$, $F(3) = a^3$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a} = a^{1/2}$, и т. д., для всех рациональных x имеем: $F(x) = a^x$. Поскольку $F(x)$ монотонна (что следует из соответствующего свойства функции $S(x)$), равенство $F(x)$ и a^x имеет место для всех действительных чисел, откуда и получаем, что $F(x) = a^x$ для всех x (доказательство, как видно, не совсем полное, предоставляем читателю возможность провести полное и строгое доказательство самостоятельно). Эти рассуждения удобно воспринимать, имея перед собой картинку. Изобразим графики функций $S(x)$ и $F(x)$ (рис. 18). Кстати, легко доказать ещё одно интересное свойство $S(x)$, не имеющее, правда, непосредственного отношения к излагаемому материалу. А именно, можно доказать (и это видно из рисунка), что функция $S(x)$ бесконечно возрастает, т. е. принимает сколь угодно большие значения. Действительно, если $S(2) = c$, то $S(4) = 2c$, $S(8) = 3c$, и вообще, $S(2^n) = n \cdot c$. Поэтому $S(x)$ неограниченно возрастает. От-

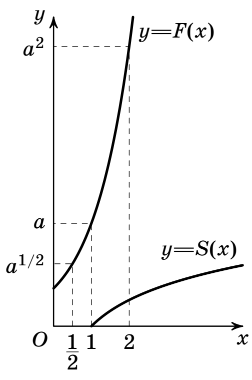


Рис. 18

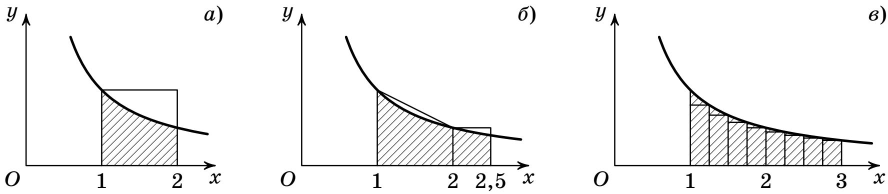


Рис. 19

сюда мы получили интересный факт: площадь под гиперболой от 1 и до бесконечности сама бесконечна, что вообще говоря, не следует только из того, что эта фигура неограничена и бесконечно удаляется вдоль оси Ox; существуют бесконечные фигуры с конечной площадью.

Итак, мы доказали, что $F(x)=a^x$. Отсюда получаем, что обратная к ней функция $S(x)=\log_a(x)$. Что такое a? Это $F(1)$, т. е. число, для которого функция $S(x)$ (обратная к $F(x)$) равна 1. Значит, $S(a)=1$, т. е. a — то самое число, найти которое мы условились ещё в самом начале поиска суммы S. Оно нам нужно было, чтобы знать, когда принцессе делать свой выбор. Попробуем это число оценить.

Для оценки числа a нужно пытаться оценивать различные площади под графиком $y=\frac{1}{x}$. Посмотрим, например, на площадь криволинейной трапеции под этим графиком от 1 до 2, которая изображена на рис. 19, *а*. Её площадь строго меньше площади квадрата, изображённого на том же рисунке, а площадь квадрата — единица. Значит, $S(2)<1$ и поэтому $a>2$. Попробуем сравнить a и 2,5. Для этого оценим площадь $S(2{,}5)$, изображённую на рис. 19, *б*. Эта площадь строго ограничена сверху суммарной площадью трапеции и квадрата, изображённых на том же рисунке, а их площадь равна $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, значит, $S(2{,}5)<1$ и $a>2{,}5$. Попробуем оценить a сверху. Это несколько сложнее, потому что теперь нужно приближать площадь фигурами, которые содержатся в криволинейной трапеции, а не содержат её. Из рис. 19, *в* видно, что

$$S(3)>\frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}>\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+$$
$$+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{70+252+105+120+140+168}{840}=\frac{855}{840}>1,$$

поэтому $a<3$. Таким образом, мы только что установили, что a — некоторое число из отрезка $[2{,}5; 3]$. Догадливые уже давно

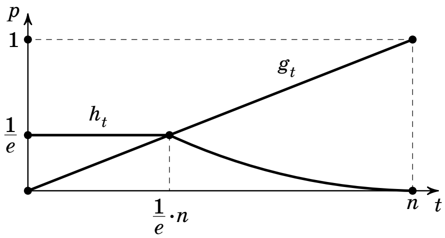


Рис. 20

поняли, что на самом деле число a — не что иное, как известное из школьного курса или из курса математического анализа число e, равное примерно 2,718281828...

Таким образом, стало понятно, когда $\frac{h_t}{g_t}=1$ (в реальности этого, как мы помним, скорее всего не случится, так как t целое, поэтому будет лишь $\frac{h_t}{g_t}\approx 1$). Это происходит, когда $\frac{n}{t}=e$ или $\frac{t}{n}=\frac{1}{e}$. Вспомним наш рисунок, на котором были изображены графики функций h_t и g_t (рис. 20).

Как мы только что выяснили, то число, которое соответствует точке пересечения на графике, равно $t=\frac{n}{e}$. При этом

$$h_t=g_t=\frac{t}{n}=\frac{1}{e},$$

т. е. вероятность успеха принцессы, которую мы искали с самого начала, равна $\frac{1}{e}\approx 0{,}368$. Таким образом, ответ на поставленную вначале задачу выглядит так: принцесса должна сначала пропустить первую $\frac{1}{e}$ часть женихов (в случае $n=1000$ это примерно 368 человек), только запоминая их для будущего сравнения, а дальше она должна брать в мужья первого же, который обладает тем свойством, что он лучше всех своих предшественников. При этом вероятность получить в конце концов самого лучшего жениха из всех n претендентов равна примерно 0,368.

* * *

Как уже говорилось выше, здесь был рассказан метод решения задачи, отличный от первоначального, придуманного Е. Б. Дынкиным. Этот метод довольно легко обобщается на ряд близких задач. Например, можно предположить, что принцесса не настолько привередлива, чтобы требовать только самого лучшего жениха, а её устроит и второй по качеству или, например, один из трёх лучших. В более общем случае она ставит своей целью выбор одного из m лучших женихов (m — фиксированное заранее число), при этом какой именно из этих m женихов ей достанется — безразлично. (Задача, которую мы подробно рассмотрели, соответствует $m=1$.)

Ещё более общей постановкой (чуть более сложно формулируемой) является следующая. Принцесса заранее решает, насколько счастлива (удовлетворена) она будет, если ей достанется k-й по качеству среди всех женихов. При этом уровень её удовлетворения может измеряться в баллах или в условных единицах (не путать с у. е. в магазинах). Естественно предполагать, что уровень счастья тем выше, чем лучше жених (в смысле его рейтинга в общем смысле). Так, принцесса может решить, что если ей достанется самый лучший жених, она будет счастлива на 1000 баллов, если второй по качеству — на 500, третий — на 330 и т. п. Оптимальной в этом случае является стратегия принцессы, при которой в среднем количество полученных ей баллов было бы максимально возможным. Некоторую сложность здесь составляет объяснить, что значит «в среднем». В теории вероятностей понятие среднего (или, как его ещё называют, *математического ожидания*) определяется через понятие вероятности. Мы здесь не обсуждали определение вероятности, предпочитая использовать некоторые её свойства, объясняемые «на пальцах». Поэтому определять понятие среднего, описывать его свойства и обсуждать сколь-нибудь подробно последнюю постановку задачи представляется несколько затруднительным. (Впрочем, в описанной ситуации средний балл равен сумме

$$\sum_{i=1}^{n} b_i p_i,$$

где p_i — вероятность того, что выбранный жених окажется i-м по качеству среди всех претендентов, а b_i — количество баллов «зарабатываемых» в этом случае.)

Поэтому ограничимся случаем, когда принцесса хочет получить одного из m лучших женихов, неважно какого. Схема, описанная выше, будет работать следующим образом. Если принцесса дождалась последнего — n-го претендента, её стратегия очевидна. Если он оказался одним из m лучших, она его выбирает и она выиграла. Если нет, она проиграла (и отправляется в монастырь). Предположим, что мы уже разобрались как должна вести себя принцесса, если она не сделала выбора до t-го претендента включительно. Пусть перед ней предстал t-й претендент. Обозначим через h_t вероятность того, что принцесса сделает удачный выбор, если она откажет t-му претенденту, а дальше будет пользоваться оптимальной стратегией (мы предположили, что эта стратегия уже известна). Вероятность h_t, конечно, не зависит от того, какой по рангу среди предшествующих был t-й претендент: первый, последний, ... А вот вероятность того, что принцесса выиграет, остановив свой выбор как раз на t-м претенденте, от этого зависит. Если он был хуже, чем m-й (по качеству) среди уже прошедших, никаких шансов, что принцесса выиграет, выбрав его, нет. Если он лучший среди первых t, то вероятность сделать удачный выбор, остановившись на нём, по-видимому, выше, чем если он второй (по качеству) среди них. Обозначим через $g_t(k)$ вероятность удачи, если принцесса остановит свой выбор на t-м претенденте при условии, что он является k-м по качеству среди первых t. Здесь k может быть любым (целым) числом от 1 до t, однако, очевидно, что если $k>m$, то $g_t(k)=0$. Мы знаем (см. выше), что $g_n(k)=1$ при $k\leqslant m$ и $g_n(k)=0$ при $k>m$.

Одна из стратегий принцессы, отвергнувшей t-го претендента (возможно, и даже вероятно, не оптимальной), является отказ $(t+1)$-му претенденту в любом случае. Отсюда следует, что вероятность h_t (которая равна вероятности удачного выбора при оптимальном поведении принцессы после того, как был отвергнут t-й претендент), по крайней мере не меньше, чем вероятность h_{t+1} (вероятность удачного выбора, если и $(t+1)$-й претендент отвергнут): $h_t\geqslant h_{t+1}$.

Попробуем разобраться как ведёт себя вероятность $g_t(k)$ как функция от t и k. Более-менее очевидно следующее. Во-первых, при фиксированном t вероятность $g_t(k)$ не возрастает с ростом k, т. е. она тем больше (или, точнее, не меньше), чем меньше k. Во-вторых, при фиксированном k вероятность $g_t(k)$ не убывает с ростом t: при выборе из 1000 претендентов лучше остановиться на третьем по качеству среди прошедших, если таковым оказался 990-й, чем если таковым оказался 10-й (здесь, конечно, предполагается, что $m\geqslant 3$). Строго эти свойства могут быть выведены из равенств (*) и (**) ниже.

Если мы (или, точнее, принцесса) уже знаем h_t и $g_t(k)$, то, как это нетрудно понять из рассуждения, приведённого выше для $m=1$, оптимальная стратегия выглядит следующим образом. Предположим, что перед принцессой предстал t-й претендент на её руку (предыдущих $t-1$ она отвергла) и он оказался k-м по качеству среди первых t. Тогда принцесса сравнивает вероятности h_t и $g_t(k)$. Если вероятность h_t оказалась больше, то она претендента отвергает. Если больше оказалась вероятность $g_t(k)$, она даёт ему своё согласие. (Если случайно оказалось, что вероятности h_t и $g_t(k)$ в точности равны, то она может поступить любым образом. Выше в подобной ситуации мы предлагали принцессе не тянуть время, а принять предложение претендента.) Вероятность успеха принцессы в этом случае оказывается равной $\max(h_t, g_t(k))$ (наибольшему из двух указанных чисел). Кстати, нетрудно сообразить, что исходная вероятность успеха принцессы (до начала смотрин) может быть вычислена как h_0.

Из описанных выше свойств монотонности вероятностей h_t и $g_t(k)$ как функций от t и k (невозрастание h_t с ростом t, неубывание $g_t(k)$ с ростом t и её невозрастание с ростом k) вытекает следующее общее описание оптимальной стратегии. Существуют неотрицательные (целые) числа $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m < n$ (зависящие от n и m), через которые оптимальная стратегия описывается так. Принцесса должна пропустить первые t_1 человек, не давая согласия на брак ни в коем случае (только оценивая их для будущего сравнения с остальными). Претенденту с номером от t_1+1 до t_2 она даёт согласие на брак если (и только если) он лучше всех предыдущих. Претендента с номером от t_2+1 до t_3 она выбирает, если он не хуже чем второй по качеству среди всех прошедших (включая его самого), и т. д. Претендента с номером больше t_m она выбирает, если он оказывается одним из m лучших среди прошедших. Если претендент, удовлетворяющий описанным свойствам, не встретится, то принцесса проиграла.

Возникает естественный вопрос: как могут быть найдены вероятности h_t и $g_t(k)$? Их, как и раньше, можно вычислить последовательно (начиная с конца!). Очевидно, что $h_n=0$, $g_n(k)$ равно единице при $k \leqslant m$, и нулю при $k > m$. Предположим, что мы уже знаем (вычислили) вероятности h_{t+1} и $g_{t+1}(k)$ для всех k. Вычислим h_t. (В этом месте можно даже допустить, что $t=0$. В результате мы получим вероятность h_0, которая равна абсолютной вероятности успеха принцессы на момент начала смотрин.) Если принцесса пропустила t-го претендента, перед её глазами предстаёт $(t+1)$-й. Он может быть лучшим среди всех предыдущих (включая, естественно, его самого), либо вторым по качеству, либо третьим, и т. д., вплоть до $(t+1)$-го. Легко сообразить, что вероятность каждого из этих случаев одна и та же и равна $\dfrac{1}{t+1}$. Если $(t+1)$-й претендент оказался k-м по качеству, вероятность успеха принцессы при оптимальной стратегии выбора равна, как мы знаем, $\max(h_{t+1}, g_{t+1}(k))$. Таким образом, с вероятностью $\dfrac{1}{t+1}$ вероятность успеха равна $\max(h_{t+1}, g_{t+1}(1))$, с той же вероятностью она равна $\max(h_{t+1}, g_{t+1}(2))$, и т. д. Применяя обсуждавшуюся выше формулу полной вероятности, получаем, что

$$h_t=\frac{1}{t+1}\sum_{k=1}^{t+1}\max(h_{t+1}, g_{t+1}(k))=$$

$$=\frac{1}{t+1}\sum_{k=1}^{m}\max(h_{t+1}, g_{t+1}(k))+\frac{t+1-m}{t+1}h_{t+1} \qquad (*)$$

(последнее равенство имеет место, поскольку при $k>m$ заведомо $g_{t+1}(k)=0$ и, значит, $\max(h_{t+1}, g_{t+1}(k))=h_{t+1}$).

Обсудим теперь вычисление вероятностей $g_t(k)$. Предположим, что принцесса решила остановить свой выбор на претенденте с номером t, который оказался k-м по качеству среди предыдущих (включая его самого). Чтобы вычислить вероятность её успеха, представим себе, что (уже сделав свой выбор) принцесса решила (любопытства ради) посмотреть и на $(t+1)$-го претендента. С вероятностью $\frac{1}{t+1}$ этот претендент оказался бы самым лучшим из прошедших, с вероятностью $\frac{1}{t+1}$ — вторым, и т. д. В списке из первых $t+1$ претендентов избранник принцессы (предложение которого она уже приняла на предыдущем шаге) может либо сохранить свои позиции и остаться k-м по качеству, либо уступить одну позицию в рейтинге и оказаться $(k+1)$-м. Легко видеть, что вероятность второго исхода (избранник теряет свои позиции и оказывается $(k+1)$-м в списке из $t+1$ претендентов) равна $\frac{k}{t+1}$ (это — вероятность того, что $(t+1)$-й претендент окажется не хуже чем k-м по качеству), а вероятность первого исхода (избранник сохраняет свои позиции) равна $\frac{t-k+1}{t+1}$. Нетрудно сообразить, что при первом исходе вероятность успеха принцессы оказывается равной $g_{t+1}(k)$, а при втором — $g_{t+1}(k+1)$. Применяя всё ту же формулу полной вероятности, получаем

$$g_t(k)=\frac{k}{t+1}\,g_{t+1}(k+1)+\frac{t-k+1}{t+1}\,g_{t+1}(k). \qquad (**)$$

Формулы (*) и (**) позволяют последовательно, начиная с конца, т. е. с $t=n$, вычислить вероятности h_t и $g_t(k)$ и, таким образом, найти оптимальную стратегию принцессы. Для небольших n это можно сделать, например, заполняя таблицу вроде той, которая приведена на рис. 21 для $n=9$, $m=2$.

Из таблицы и графика, изображённого на рис. 22, можно увидеть, что в указанном случае $t_1=3$, $t_2=6$, т. е. оптимальная стратегия принцессы состоит в том, чтобы отвергнуть первых трёх претендентов в любом случае, остановить свой выбор на четвёртом, пятом или шестом, если он окажется лучше всех предыдущих, а далее (т. е. при знакомстве с претендентами, начиная с седьмого) соглашаться и на второго по качеству среди прошедших. При этом вероятность удачного выбора (h_0) оказывается равной

$$\frac{233}{360}\approx 0{,}65.$$

	k									
$g_t(k)$:	1	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{35}{36}$	1	1
	2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{9}$	1
h_t:	$\frac{233}{360}$	$\frac{233}{360}$	$\frac{233}{360}$	$\frac{233}{360}$	$\frac{28}{45}$	$\frac{41}{72}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	0
t:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Рис. 21

Мы выяснили, что при $m=1$ при большом количестве претендентов n отношение $\frac{t_1}{n}$ почти постоянно (т. е. почти не зависит от n) и приблизительно равно $\frac{1}{e}$. Более точно можно сказать, что отношение $\frac{t_1}{n}$ стремится к $\frac{1}{e}$ при n стремящемся к бесконечности ($n \to \infty$). Оказывается, подобное свойство имеет место для любого фиксированного m: для любого i ($i=1, \ldots, m$) отношение $\frac{t_i}{n}$ имеет предел при $n \to \infty$. При этом и вероятность удачного выбора при оптимальной стратегии имеет некоторый предел при $n \to \infty$. Так, при $m=2$ отношение $\frac{t_2}{n}$ стремится к $\frac{2}{3}$, а отношение $\frac{t_1}{n}$ стремится к (меньшему) корню x_0 уравнения

$$x-\ln x=1+\ln\frac{3}{2}.$$

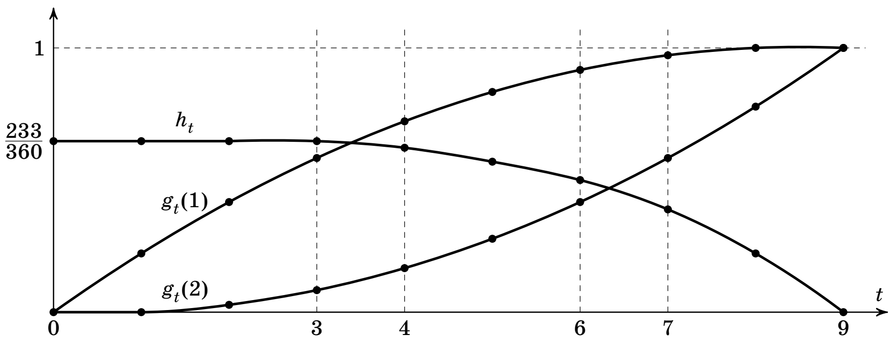


Рис. 22

Величина x_0 приблизительно равна 0,347. Таким образом, при большом количестве претендентов n и при $m=2$ оптимальная стратегия принцессы состоит в следующем. Она должна пропустить приблизительно 34,7% претендентов, не давая согласия на брак, из следующих приблизительно 32% (вплоть до 66,7% всех претендентов) давать согласие на брак только тому, кто лучше всех предыдущих, а из оставшихся 33,3% претендентов соглашаться и на второго по качеству среди уже прошедших. При этом вероятность удачного выбора (опять-таки при большом n, т. е. при $n \to \infty$) оказывается равной $2x_0 - x_0^2$, что приблизительно равно 0,574. Таким образом, в этом случае шансы принцессы на удачный выбор (при оптимальной стратегии) больше 50%.