Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 31

В. Ю. Протасов

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ В ГЕОМЕТРИИ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2005

УДК 514.177.2
ББК 22.151.0
П78

Аннотация

Текст брошюры подготовлен по материалам лекции, прочитанной автором 21 февраля 2004 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Читатель познакомится с такими классическими задачами на максимум и минимум, как задача Фаньяно, задача о построении фигуры максимальной площади заданного периметра, задача Штейнера о кратчайшей системе дорог и многими другими. Одна из глав посвящена коническим сечениям и их фокальным свойствам. В брошюре излагаются решения перечисленных выше задач, особое внимание уделено проблеме доказательства существования решения в экстремальных задачах. В конце каждого раздела помещён набор задач для самостоятельного решения.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, а также школьных учителей, руководителей математических кружков. При чтении последних разделов будет полезным (но не обязательным) знакомство с началами математического анализа.

ISBN 5-94057-193-X

Владимир Юрьевич Протасов.

Максимумы и минимумы в геометрии.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2005. — 56 с.: ил.

Редакторы *Р. О. Алексеев*, *Н. М. Нетрусова* Техн. редактор *М. Н. Вельтищев*
Рисунки *М. Н. Вельтищева*, иллюстрация на обложке *Н. М. Нетрусовой*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 22/IV 2005 года. Формат бумаги 60×88 1/16. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 3,5. Тираж ?000 экз. Заказ ????.

Брошюра соответствует гигиеническим требованиям к учебным изданиям для общего и начального профессионального образования (заключение государственной санитарно-эпидемиологической службы Российской Федерации № 77.99.02.953.Д.003873.06.04 от 2/VI 2004 года).

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 72 85, 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ВВЕДЕНИЕ

Экстремальные задачи — задачи на максимум и минимум — во все времена привлекали внимание учёных. Из попыток решить ту или иную экстремальную задачу возникали и развивались новые теории, а иногда и целые направления математики.

В чём причина такого интереса? Во-первых, среди задач на максимум и минимум много красивых задач, которые интересно и приятно решать. Но люди занимаются ими отнюдь не только «из любви к искусству». Много экстремальных задач, ложащихся на письменный стол учёного, приходит из практики. Максимумы и минимумы постоянно возникают в инженерных расчётах, в архитектуре, экономике... Кроме того, экстремальные задачи самым неожиданным образом находят применение в науках о природе: физике, химии, биологии. Давно уже было замечено, что окружающий мир во многом устроен по экстремальным законам. Леонард Эйлер (1707—1783), один из величайших математиков, говорил: «В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

С экстремальными задачами человек начинает знакомиться в средней школе. Вот, пожалуй, самая известная из них:

1. На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма $AM+BM$ наименьшая.

Для решения отразим точку B относительно прямой l, получим точку B' (рис. 1). Отрезок BM переходит при симметрии в отрезок $B'M$, следовательно, $AM+BM=AM+B'M$. Согласно неравенству треугольника, сумма $AM+B'M$ принимает наименьшее значение, когда точка M лежит на отрезке AB'. Таким образом, M — точка пересечения прямой l с отрезком AB'; для этой точки сумма $AM+BM$ равна длине отрезка AB', при другом выборе точки M эта сумма будет больше AB'.

Один из американских школьных учебников по геометрии начинается не с понятий «точка», «прямая» и не с первых аксиом, а сразу с разбора этой задачи. Настолько наглядно, просто и поучительно её решение! С её помощью можно объяснить закон отражения света «угол падения равен углу отражения», поскольку в однородной среде свет распространяется по кратчайшему пути. Кроме того, эта простая задача лежит в основе так называемых фокальных свойств конических сечений — эллипса, гиперболы и параболы. Об этом речь пойдёт в § 2.

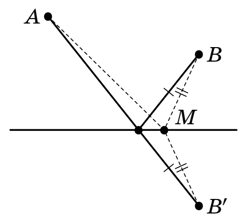

Рис. 1

Считается, что впервые задача о кратчайшем пути между двумя точками с заходом на прямую, или задача об отражении света, была решена древнегреческим математиком Героном Александрийским (I век н. э.) в трактате «О зеркалах». Поэтому её иногда называют задачей Герона. Её можно интерпретировать и как сугубо практическую: где на прямой дороге нужно поставить автобусную остановку, чтобы суммарный путь до неё от деревень A и B был наименьшим?

Однако обобщить задачу Герона и её решение не так-то просто. Что будет, например, если деревень не две, а три?

2. На плоскости дана прямая l и три точки A, B и C по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма $AM+BM+CM$ наименьшая.

Все попытки решить эту задачу при помощи симметрии ни к чему не привели. Для решения этой и многих других задач на максимум и минимум математикам пришлось изобретать совершенно новый метод, называемый теперь вариационным. Мы займёмся им в §§ 6, 7. А вот другой пример:

3. На плоскости дан выпуклый четырёхугольник. Найти точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

Решение совсем просто: искомая точка M является точкой пересечения диагоналей четырёхугольника. В самом деле: по неравенству треугольника, сумма расстояний $AM+CM$ не меньше диагонали AC, а сумма расстояний $BM+DM$ не меньше BD. Поэтому минимум суммы расстояний равен $AC+BD$ и достигается в точке пересечения диагоналей (рис. 2).

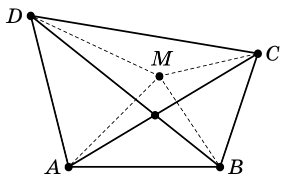

Рис. 2

Та же задача, но для треугольника, требует более тонких рассуждений. Для формулировки ответа понадобится так называемая точка Торричелли треугольника (§ 3). А для того чтобы решить эту задачу для произвольного многоугольника, вновь придётся прибегнуть к вариационному методу. При этом ответ может быть подсказан из физических соображений (§ 8). Рассмотрим другое обобщение:

4. Соединить вершины данного четырёхугольника системой дорог наименьшей суммарной длины.

Решение этой задачи приведёт к понятию сети Штейнера для данной системы точек. Об этом речь пойдёт в § 3. Как видим, похожие между собой задачи на максимум и минимум могут требовать совершенно различных путей решения.

В §§ 2—5 будет рассказано о задачах, которые решаются геометрически; в §§ 6, 7 мы коснёмся вариационных методов, а в § 8 — физических методов; § 9 и приложения целиком посвящены теоремам существования в экстремальных задачах.

Вернёмся теперь к геометрическим решениям. Приём, которым решается задача Герона, можно назвать «выстраиванием отрезков в прямую линию». Суть его проста: с помощью движений плоскости несколько отрезков выстраиваются в ломаную, которая, по неравенству треугольника, будет иметь наименьшую длину, когда её звенья лежат на одной прямой. Так, в задаче Герона в качестве движения использовалась симметрия относительно прямой l.

5. Внутри угла дана точка M. Найти на сторонах угла точки A и B (по одной на каждой стороне), для которых периметр треугольника MAB наименьший.

6. Внутри угла даны точки M и N. Найти на сторонах угла точки A и B (по одной на каждой стороне), для которых периметр четырёхугольника с вершинами в точках M, A, B, N наименьший.

7. Дана прямая l и точки A и B по разные стороны от неё. Найти на прямой точку M, для которой величина $|AM-BM|$ принимает наименьшее значение.

8. Деревни A и B разделены рекой, берега которой параллельны. Где на реке нужно поставить мост, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (мост перпендикулярен берегам реки)?

9. Деревни A и B разделены двумя параллельными реками разной ширины. На каждой реке нужно поставить по мосту так, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (мосты перпендикулярны берегам).

§ 1. ЗАДАЧА ФАНЬЯНО

В начале XVIII века итальянский инженер и математик Фаньяно деи Тоски (1682—1766) поставил следующую задачу:

10. Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника.

Воспользуемся тем же приёмом: с помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной. А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой.

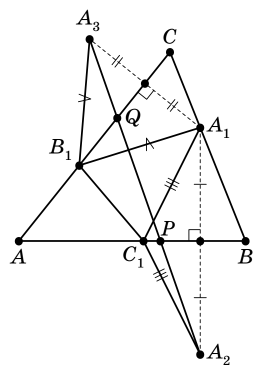

Рис. 3

Итак, пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC (A_1 — на стороне BC и т. д.). Отразим точку A_1 симметрично относительно сторон AB и AC, получив точки A_2 и A_3 соответственно (рис. 3). Длина трёхзвенной ломаной $A_3B_1C_1A_2$ равна периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Для того, чтобы периметр

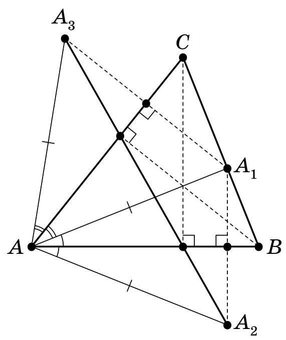

Рис. 4

был наименьшим (равным отрезку A_2A_3), нужно, чтобы вершины B_1 и C_1 лежали в точках пересечения отрезка A_2A_3 со сторонами треугольника AB и AC. Осталось понять, как выбрать точку A_1 на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка A_2A_3 была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник A_2AA_3 — равнобедренный ($A_3A{=}A_2A{=}A_1A$), а угол при его вершине A равен $2\angle BAC$ и потому не зависит от выбора точки A_1 (рис. 4).

Итак, при движении точки A_1 по стороне BC углы треугольника A_2AA_3 не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона A_2A, которая равна A_1A. Значит, A_1A — высота, опущенная на сторону BC.

Мы видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина A_1 — основание высоты. Если провести те же рассуждения с вершинами B_1 и C_1, получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра — единственный!)

Теорема Фаньяно. Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник (т. е. треугольник с вершинами в основаниях высот).

11. Две смежные стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующей стороной исходного треугольника. Среди всех треугольников, вписанных в данный треугольник, только ортотреугольник обладает указанным свойством*).

12. Высоты треугольника являются биссектрисами углов ортотреугольника.

Луч света, пущенный вдоль одной из сторон ортотреугольника, отразится последовательно от всех сторон треугольника ABC и вернётся в исходную точку. Таким образом, контур ортотреугольника представляет собой замкнутую траекторию луча света. Если сдвинуть три зеркала так, чтобы они образовали остроугольный треугольник, то луч света, идущий по сторонам ортотреугольника, замкнётся и никогда не выйдет наружу. Математики говорят, что стороны ортотреугольника образуют *биллиард* для данного треугольника.

13. Периметр ортотреугольника равен удвоенному произведению высоты треугольника на синус угла, из которого она исходит.

*) В задачах на доказательство мы будем только формулировать утверждение, а слова «доказать, что» будем опускать.

Получаем, что три таких произведения в треугольнике равны между собой. Докажите, что на самом деле они равны удвоенной площади, делённой на радиус описанной окружности.

14. Исследуйте задачу Фаньяно для тупоугольного треугольника.

15. Исследуйте задачу Фаньяно для четырёхугольника. Для каких четырёхугольников вписанный четырёхугольник минимального периметра существует? Будет ли он единственным?

§ 2. ФОКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КОНИК

«Закон гиперболических зеркал таков: лучи света, падая на внутреннюю поверхность гиперболического зеркала, сходятся все в одной точке, в фокусе гиперболы. Это известно».

А. Н. Толстой, «Гиперболоид инженера Гарина».

Коникой, или *коническим сечением*, или *квадрикой* называется кривая, полученная в пересечении плоскости с конусом. Под конусом, как обычно, понимается прямой круговой конус: фигура, которая состоит из прямых, проходящих через данную точку A и образующих данный угол $\alpha<90^\circ$ с прямой l, проходящей через точку A. При этом мы считаем, что конус образован именно прямыми, а не лучами или отрезками (как определяется в школьных учебниках). Эти прямые называются *образующими* конуса (поскольку именно они образуют конус), прямая l — его *осью*, а точка A — его *вершиной*. Таким образом, конус является неограниченной фигурой и состоит из двух половинок, центрально-симметричных относительно вершины A.

Если пересечь конус плоскостью, не проходящей через вершину, получим коническое сечение. Конические сечения бывают трёх видов: эллипс, гипербола и парабола. *Эллипс* получается, когда плоскость не параллельна ни одной из образующих и пересекает только одну половину конуса (рис. 5, *а*), *гипербола* — когда плоскость пересекает обе половины (рис. 5, *б*), а *парабола* — когда плоскость параллельна одной из образующих (рис. 5, *в*). Мы не будем рассматривать вырожденные коники, соответствующие случаю, когда плоскость проходит через вершину конуса (в этом случае может получиться либо пара прямых, либо одна прямая, либо точка).

«Позвольте», — возразит читатель, — «в школе давались совсем другие определения. Парабола задаётся уравнением $y{=}ax^2$, гипербола — уравнением $y{=}\frac{k}{x}$, а эллипс — уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}{=}1$. Эллипс, к тому же, является геометрическим местом точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек постоянна. Так это те же кривые или другие?». Кривые, конечно, те же. Все определения этих кривых равносильны, за исключением, разве что, гиперболы, которая не всегда задаётся уравнением $y{=}k/x$.

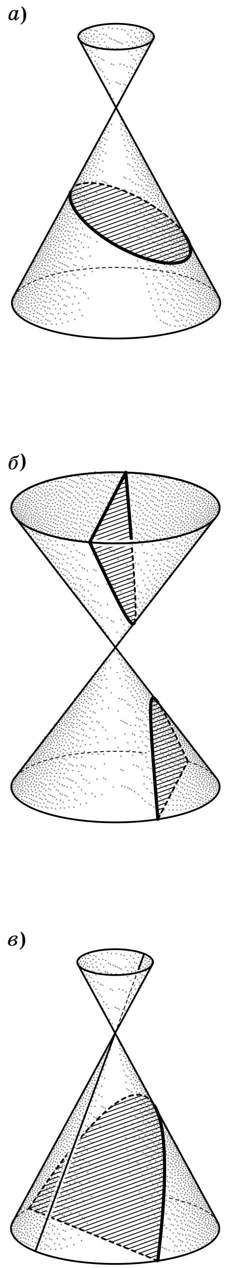

Рис. 5

Второе определение конических сечений. Эллипс является геометрическим местом точек M плоскости, таких что $F_1M+F_2M=c$, где F_1 и F_2 — данные точки плоскости, c — данное число, причём $c>F_1F_2$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса. Гипербола — геометрическое место точек M, для которых $|F_1M-F_2M|=c$ (точки F_1, F_2 — *фокусы* гиперболы). Парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки F и от данной прямой d (точка F — *фокус* параболы, прямая d — её *директриса*).

Для того чтобы показать, что это определение равносильно предыдущему, впишем в конус две сферы S_1 и S_2, касающиеся плоскости сечения (они называются *сферами Данделена*). Через F_1 и F_2 обозначим точки касания этих сфер с плоскостью (рис. 6). Сфера касается поверхности конуса по окружности, которую мы назовём поясом сферы. Для любой точки M эллипса отрезки MF_1 и MT_1 равны как касательные из одной точки к сфере (T_1 — точка пересечения пояса сферы S_1 с образующей конуса, проходящей через точку M), а $MF_2=MT_2$. Таким образом, $MF_1+MF_2=T_1T_2$, значит, сумма расстояний от точки эллипса до фокусов равна расстоянию между двумя поясами и потому не зависит от точки M.

Точно так же доказывается, что для гиперболы величина $|MF_1-MF_2|$ равна расстоянию между поясами (рис. 7).

Если же плоскость сечения параллельна образующей, то существует только одна сфера, вписанная в конус и касающаяся плоскости сечения (почему?). Обозначим через F точку касания сферы и плоскости, а через d — прямую, по которой эта плоскость пересекается с плоскостью пояса (рис. 8). Тогда $MF=MT$, а кроме того, если опустить перпендикуляр MH на прямую d, то $MT=MH$, поскольку эти отрезки образуют равные углы с плоскостью пояса (первый лежит на образующей конуса, второй параллелен другой образующей). Таким образом, расстояния от точки M до фокуса F и до директрисы d равны.

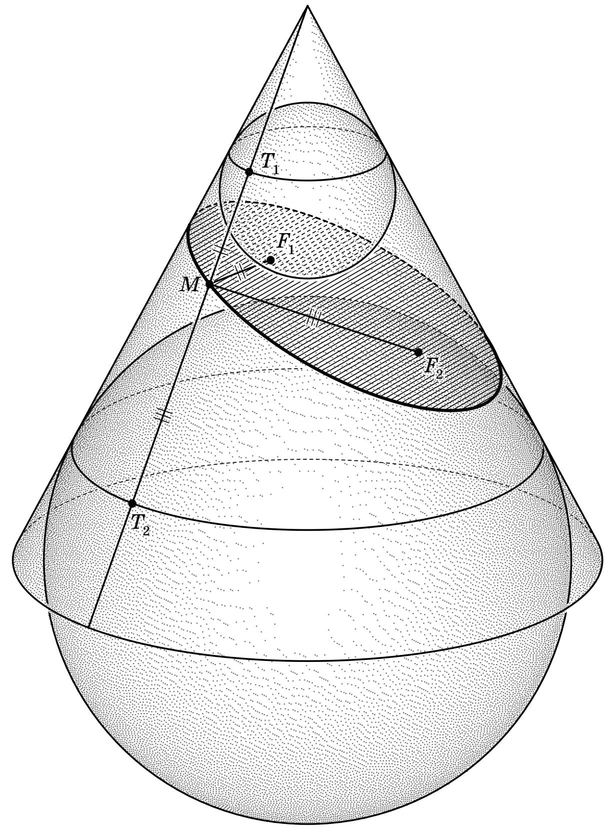

Рис. 6

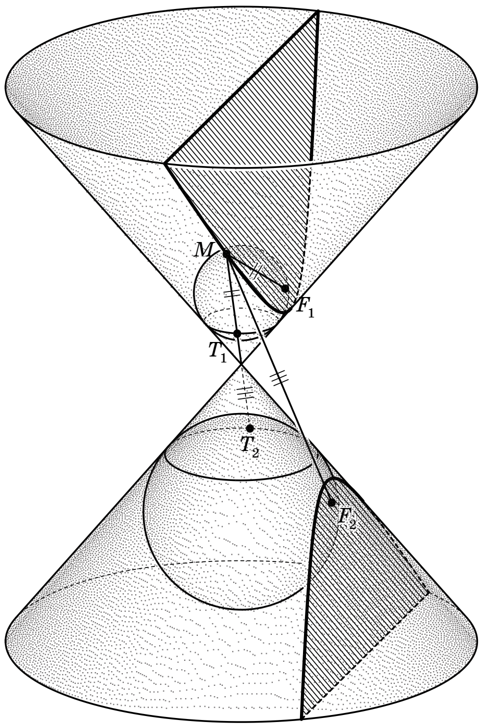

Рис. 7

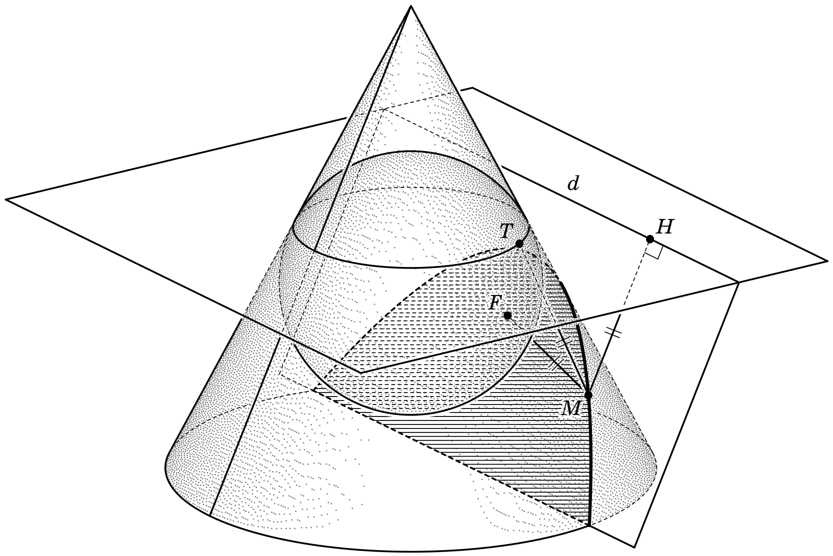

Рис. 8

Конические сечения были известны ещё математикам Древней Греции. Так, Менехм в середине IV века до н. э. доказал, что эллипс, гипербола и парабола являются сечениями конуса. Наиболее полное исследование конических сечений изложено в книге «Коника» Аполлония Пергского, написанной, как считается, между 210 и 200 годами до н. э. Аполлоний был третьим после Евклида и Архимеда великим представителем Александрийской школы. Его «Коника» — настоящий научный подвиг. Это грандиозный труд, состоящий из восьми книг. В первых семи книгах, дошедших до нас, содержится 387 теорем, подчас весьма сложных, с подробными доказательствами. В течение двух тысячелетий «Коника» была настольной книгой математиков и главным руководством по изучению конических сечений. Теория конических сечений изложена Аполлонием настолько подробно и глубоко, что математикам мало что удавалось добавить нового, несмотря на бурный прогресс математической науки.

16. На плоскости даны прямая d и точка F. Пусть задано положительное число k. Найдите геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до F и до d равно k.

17. На плоскости даны две окружности. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей, касающихся двух данных.

Конические сечения обладают многими замечательными свойствами, из которых оптические, или, как их называют, «фокальные», свойства занимают особое место. Перед тем как сформулировать и доказать эти свойства, дадим ещё одно, аналитическое определение коник, без которого наш рассказ был бы не полон.

Третье определение конических сечений. Эллипс задаётся на координатной плоскости уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гипербола — уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, парабола — уравнением $y=ax^2$. Читатель без труда выведет уравнения этих кривых, при этом фокусы эллипса и гиперболы нужно расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат, а фокус параболы — на оси Oy. Если $a=b$, то эллипс превращается в окружность радиуса a, а гипербола в этом случае становится так называемой *прямой гиперболой*, которая после поворота на 45° относительно начала координат принимает вполне знакомый вид $y=k/x$, где $k=a^2/2$.

Из уравнения эллипса видно, что он получается из окружности после сжатия вдоль оси Oy в a/b раз, чем оправдывает слова о том, что он является «сжатой окружностью». Это можно было бы установить и без уравнения. Дело в том, что эллипс получается в сечении не только конуса, но и цилиндра (рис. 9), при этом доказательство почти не меняется. Следовательно, при проецировании на основание цилиндра эллипс переходит в окружность. Остаётся заметить, что проецирование на плоскость эквивалентно сжатию относительно подходящей прямой.

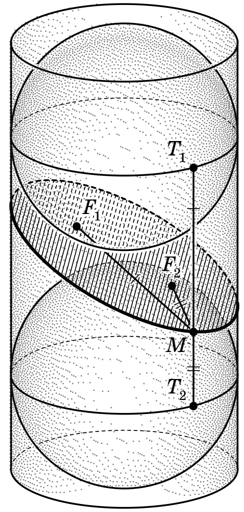

Рис. 9

Всякое уравнение второй степени

$$p(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

если имеет действительные корни, задаёт конику. Чтобы убедиться в этом, нужно повернуть плоскость на угол α, такой что

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{c-a}{2b},$$

тем самым уничтожив слагаемое $2bxy$, затем сделать параллельный перенос так, чтобы уничтожить линейные члены $2dx$ и $2ey$. Получившееся уравнение либо будет задавать вырожденную конику (пару прямых, прямую или точку), либо (возможно, после перемены местами координат x и y) совпадёт с уравнением эллипса, гиперболы или параболы.

Теперь всё готово для изучения фокального свойства коник.

Теорема. Касательная к эллипсу (гиперболе) образует равные углы с отрезками, соединяющими точку касания с фокусами. В случае гиперболы касательная является биссектрисой угла F_1MF_2, а в случае эллипса — биссектрисой смежного угла. Касательная к параболе, проведённая в точке M, образует равные углы с прямой MF и осью параболы (рис. 10).

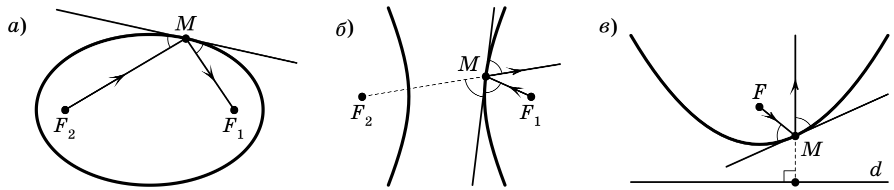

Рис. 10

Таким образом, луч света, вышедший из фокуса эллипса, отразится от его поверхности и попадёт во второй фокус. Если в фокусе эллипса находится источник света, то пучок световых лучей после отражения от поверхности эллипса сойдётся во втором фокусе.

Если источник света поместить в одном из фокусов гиперболы, то отражённый пучок световых лучей будет расходящимся, а воображаемые продолжения лучей соберутся во втором фокусе.

Наконец, пучок света, выходящий из фокуса параболы, отразившись от её поверхности, становится пучком параллельных лучей.

Фокальное свойство параболы, открытое ещё Аполлонием, ныне используется повсеместно. Параболическое зеркало в карманном фонарике создаёт узкий направленный световой луч. Принцип работы параболической антенны или параболического зеркала в телескопе также основан на свойстве параболы превращать пучок параллельных лучей (а значит, и лучей, идущих от далёкого источника) в пучок, сходящийся в одной точке.

В фантастическом романе Алексея Толстого «Гиперболоид инженера Гарина» устройство страшного разрушительного оружия — гиперболоида, которым Гарин хотел покорить мир, — описывалось так:

«Гарин, раскрывая чемодан, посматривал на неё обведёнными синевой блестящими глазами.

— Вот мой аппарат, — сказал он, ставя на стол два металлических ящика: один — узкий, в виде отрезка трубы, другой — плоский, двенадцатигранный — втрое большего диаметра...

Он наклонился над Зоиным креслом (вдохнул запах её волос), развернул чертёжик, размером с половину листа писчей бумаги.

— Вы хотели, Зоя, чтобы я также рискнул всем в нашей игре... Смотрите сюда... Это основная схема... Это просто, как дважды два. Чистая случайность, что это до сих пор не было построено. Весь секрет в гиперболическом зеркале A, напоминающем формой зеркало обыкновенного прожектора, и в кусочке шамонита B, сделанном также в виде гиперболической сферы. Закон гиперболических зеркал таков: лучи света, падая на внутреннюю поверхность гиперболического зеркала, сходятся все в одной точке, в фокусе гиперболы. Это известно. Теперь, вот что неизвестно: я помещаю в фокусе гиперболического зеркала вторую гиперболу (очерченную, так сказать, навыворот) — гиперболоид вращения B, выточенный из тугоплавкого, идеально полирующегося минерала — шамонита, — залежи его на севере России неисчерпаемы. Что же получается с лучами? Лучи, собираясь в фокусе зеркала A, падают на поверхность гиперболоида B, и отражаются от него математически параллельно, — иными словами, гиперболоид B концентрирует все лучи в один луч, или в «лучевой шнур» любой толщины... Путём установки гиперболоида B, я доводил «лучевой шнур» до толщины вязальной спицы и легко разрезывал им дюймовую доску... Здания, крепости, дредноуты, воздушные корабли, горы, кора земли — всё пронижет, разрежет мой луч...»

Вы наверняка заметили несколько неточностей в конструкции гиперболоида. Гиперболическое зеркало переводит пучок световых лучей, выходящих из фокуса, не в сходящийся, а, напротив, в расходящийся пучок света. Как мы теперь знаем, лучи вовсе не сойдутся в фокусе гиперболы. Это их воображаемые продолжения сойдутся в фокусе. Для того чтобы отражённые лучи сошлись в фокусе, внешнее зеркало A должно иметь форму не гиперболы, а эллипса. А чтобы внутреннее зеркало B переводило пучок отражённых лучей в параллельный пучок («лучевой шнур»), оно должно иметь форму, опять же, не гиперболы, а параболы (рис. 11). В этом писатель ошибся. Парадоксально, но в известном

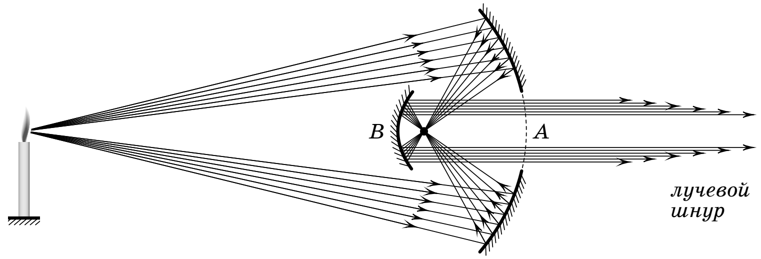

Рис. 11

теперь всему миру гиперболоиде инженера Гарина на самом деле нет ни одного гиперболоида. Внешнее зеркало A должно иметь форму эллипсоида, а внутреннее B — параболоида.

Нам осталось доказать фокальные свойства коник.

Доказательство теоремы. Проведём касательную к эллипсу в точке M. Точка M лежит на эллипсе, поэтому MF_1+ $+MF_2=c$, все остальные точки касательной лежат вне эллипса, поэтому для остальных точек сумма расстояний до фокусов больше c. Таким образом, в точке M достигается минимум суммы расстояний до точек F_1 и F_2. Значит, точка, симметричная F_2 относительно касательной, лежит на прямой F_1M, откуда следует фокальное свойство. Точно так же доказывается фокальное свойство гиперболы (при этом применяется результат задачи 7).

Докажем фокальное свойство параболы. Опустим из произвольной точки M параболы перпендикуляр MH на директрису и проведём прямую, которая делит угол HMF пополам (рис. 12). Любая точка этой прямой равноудалена от точек F и H, а значит, расстояние от неё до точки F больше, чем до директрисы (если только эта точка не совпадает с M). Поэтому все точки этой прямой, кроме M, лежат вне параболы. Значит это — касательная. Таким образом, касательная образует равные углы с прямой FM и осью параболы.

18. Дано семейство эллипсов с фокусами в двух данных точках F_1 и F_2, а также семейство гипербол с фокусами в тех же точках F_1, F_2. Тогда любой эллипс первого семейства перпендикулярен любой гиперболе второго семейства (две линии называются перпендикулярными, если касательные к ним, проведённые в их точке пересечения, перпендикулярны).

19. Рассмотрим множество углов на плоскости, у каждого из которых одна сторона лежит на данной прямой, а другая проходит через данную точку.

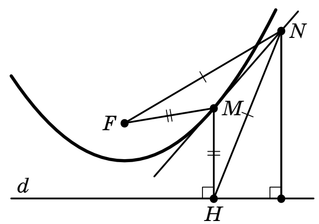

Рис. 12

Тогда биссектрисы всех этих углов касаются одной параболы. (В таком случае говорят, что эта парабола является *огибающей* данного семейства прямых.)

20. Из любой точки директрисы парабола видна под прямым углом.

21. На плоскости дан угол. Найти огибающую всевозможных прямых, отсекающих от него треугольник данной площади.

22. На плоскости дана окружность и точка A. На окружности берётся произвольная точка N и через неё проводится перпендикуляр к прямой AN. Тогда

а) если A лежит внутри окружности, то все такие перпендикуляры касаются эллипса;

б) если A лежит вне окружности, то все перпендикуляры касаются гиперболы.

в) Соответствует ли «пограничный» случай (точка A лежит на окружности) параболе? Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное а) и б), которое бы соответствовало параболе.

23. Все точки, из которых эллипс виден под прямым углом, образуют окружность.

24 (теорема Шюллера). К параболе проведены три касательные. Описанная окружность треугольника, образованного этими касательными, проходит через фокус, а точка пересечения высот этого треугольника лежит на директрисе.

25. На плоскости дана прямая, точка C, лежащая на ней, и точки A и B, не лежащие на ней. На прямой берётся точка M. Найти огибающую прямых, симметричных прямой BM относительно биссектрисы угла AMC.

26. Луч света, идущий внутри эллипса и не проходящий через его фокусы, последовательно отражается от его поверхности, двигаясь по ломаной линии. Докажите, что все стороны этой ломаной касаются некоторого эллипса. Где расположены его фокусы? Во что превращается этот эллипс, если луч проходит через фокус исходного эллипса?

§ 3. ЗАДАЧА ФЕРМА—ТОРРИЧЕЛЛИ—ШТЕЙНЕРА

История этой задачи насчитывает более трёх с половиной столетий. Она была помещена в книге итальянского физика и механика Вивиани «О максимальных и минимальных значениях» в 1659 году. Винченто Вивиани (1622—1703) был учеником великого Галилео Галилея. Нам он более известен как изобретатель ртутного барометра (прибора для измерения атмосферного давления), а своим современникам — как один из лучших специалистов по задачам на максимум и минимум, а также по теории конических сечений. Своё сочинение Вивиани, следуя традициям того

времени, снабдил длинным названием: «Пятая книга сочинений Аполлония Пергского о конических сечениях, заключает в себе первые исследования о наибольших и наименьших величинах и признаётся самым замечательным памятником этого великого геометра» («De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergoei nunc desideratum»). Среди множества задач на максимум и минимум, помещённых в этой книге, есть такая:

27. На плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Для какой точки T плоскости сумма расстояний $AT+$ $+BT+CT$ наименьшая?

Ещё до книги Вивиани этой задачей интересовался итальянский математик Бенавентура Кавальери (1598—1647), автор знаменитого «принципа Кавальери» для вычисления площадей и объёмов, предвосхитившего интегральное исчисление, а также математик и физик Эванджелиста Торричелли (1608—1647). Говорят, что именно Торричелли получил первое решение этой задачи (скорее всего, основанное на физических соображениях). Торричелли, как и Вивиани, был учеником Галилея. Именно им в конце своей жизни уже ослепший Галилей диктовал главы из своей книги «Беседы о механике». Подобно многим учёным позднего Возрождения, Торричелли был разносторонним человеком. Будучи профессором математики Флорентийского университета, он много занимался задачами физики (его закон распределения давления жидкости известен теперь каждому школьнику), а также механики, баллистики и оптики, и даже написал несколько работ по конструированию оптических приборов и шлифовке линз. Согласно другим источникам, независимо от Торричелли, эту задачу решил и величайший французский математик Пьер Ферма (1601—1665). А первое чисто геометрическое решение принадлежит, по-видимому, швейцарскому геометру Якобу Штейнеру (1796—1863), о котором речь ещё впереди.

Р е ш е н и е. Вновь воспользуемся тем же приёмом: выстроим отрезки AT, BT и CT в ломаную линию. Теперь, однако, вместо симметрии применим поворот. Повернём плоскость на 60° вокруг точки A, при этом точка C перейдёт в некоторую точку D, а точка T — в точку N. Треугольник AND равен треугольнику ATC, поскольку переходит в него при повороте на 60°, значит $TC=ND$. Треугольник ANT — равносторонний, так как $AT=$ $=AN$ и $\angle TAN=60^\circ$, поэтому $TA=TN$. Итак, сумма $AT+BT+CT$ равна длине ломаной $BTND$, а значит, она не меньше длины отрезка BD (рис. 13).

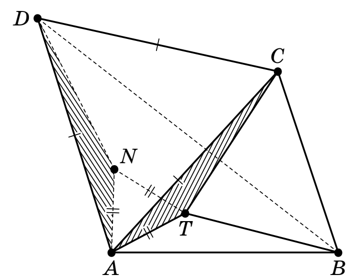

Рис. 13

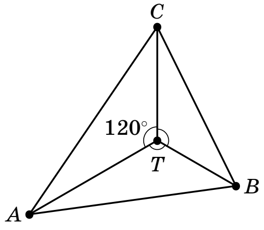

Рис. 14

Равенство достигается, когда точки B, T, N, и D лежат на одной прямой (в указанной последовательности). Это означает, что $\angle BTA + \angle ATN = 180^\circ$ и, следовательно, $\angle BTA = 120^\circ$; а также $\angle AND + \angle ANT = 180^\circ$, значит, $\angle AND = 120^\circ$, поэтому $\angle ATC = 120^\circ$. Таким образом, лучи TA, TB и TC образуют два угла в 120°, поэтому и третий угол между ними также равен 120° (рис. 14).

Точка T, из которой все стороны треугольника видны под углами 120°, имеет несколько названий. Иногда её называют точкой Ферма, иногда — точкой Торричелли, иногда — точкой Штейнера. Доказательство, которое мы привели, с поворотом плоскости на 60°, принадлежит Якобу Штейнеру. С его замечательными результатами мы ещё не раз встретимся в этой книге. А первым по времени из этих трёх математиков был Торричелли. Поэтому мы будем называть эту точку, по праву первенства, точкой Торричелли (мы и обозначили её буквой T). Это ещё одна замечательная точка треугольника, наряду с центром тяжести (точкой пересечения медиан), ортоцентром (точкой пересечения высот), центрами вписанной и описанной окружностей. Правда, в отличие от четырёх замечательных точек, точка Торричелли существует не у любого треугольника. Однако мы уже доказали, что

Если у треугольника есть точка Торричелли, то она является единственной точкой минимума суммы расстояний до вершин треугольника.

Когда же точка Торричелли существует? Пусть из трёх углов треугольника угол при вершине A является наибольшим. Построим на сторонах AC и AB вовнутрь треугольника ABC дуги окружностей, содержащие по 120°. Эти дуги пересекаются в точке A. Если же угол A меньше 120°, то эти дуги имеют ещё и вторую точку пересечения (докажите это!), которую мы обозначим через T. Это и есть точка Торричелли. В самом деле, так как углы ATC и ATB по построению равны 120°, то и третий угол BTC также получается равен $360^\circ - 120^\circ \cdot 2 = 120^\circ$. И наоборот, если точка Торричелли существует, то она строится именно таким образом, поскольку должна лежать на пересечении дуг окружностей величиной в 120°, построенных на сторонах треугольника. Итак,

Треугольник имеет точку Торричелли тогда и только тогда, когда все его углы меньше 120°.

А если один из углов треугольника больше или равен 120° (например, угол A), то в какой точке сумма расстояний до вершин будет минимальна? Ответ: в вершине этого угла. Доказать это просто. Пусть $\angle A \geqslant 120^\circ$, а M — произвольная точка плоскости. Если M не лежит внутри угла A, то один из углов MAC или MAB — тупой (пусть это угол MAC), а значит, $MC > AC$, с другой стороны, по неравенству треугольника, $MA + MB > AB$, поэтому

$$MA + MB + MC > AB + AC.$$

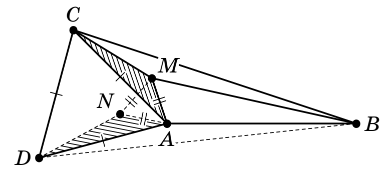

Рис. 15

Если же M лежит внутри угла A, то вновь повернём плоскость на 60° (рис. 15), и получим, что треугольник BAD лежит внутри четырёхугольника $BMND$, поэтому периметр треугольника меньше периметра четырёхугольника. Следовательно,

$$AB + AC = AB + AD < BM + MN + ND = BM + AM + CM.$$

Теорема Торричелли—Ферма—Штейнера. Если все углы треугольника меньше 120°, то точкой минимума суммы расстояний до его вершин является точка Торричелли. Если же один из углов больше или равен 120°, то такой точкой является вершина этого угла.

28. Все углы треугольника ABC меньше 120°. На его сторонах во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC', BCA' и CAB'. Тогда описанные окружности этих треугольников и отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке — точке Торричелли. Кроме того, $AA' = BB' = CC'$.

29 (теорема Наполеона). Центры описанных окружностей треугольников ABC', BCA' и CAB' являются вершинами равностороннего треугольника (треугольника Наполеона). Чему равна сторона треугольника Наполеона, если $AA' = c$?

Это утверждение приписывают Наполеону, хотя неизвестно, имеет ли он к нему какое-либо отношение. Наполеон немного увлекался геометрией и вполне уважительно относился к математике и математикам. Его окружало много выдающихся математиков того времени — Лаплас, Монж, Фурье. Однако многие историки полагают, что его авторство утверждения о равностороннем треугольнике — не более чем миф, созданный придворными льстецами.

30. Если на сторонах данного треугольника построить во внутреннюю сторону равносторонние треугольники, то их центры также являются вершинами равностороннего треугольника (внутреннего треугольника Наполеона). Разность площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона равна площади исходного треугольника.

31 (теорема Помпею). Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность. Если точка M лежит на меньшей дуге AB этой окружности, то $MC = MA + MB$. Для всех остальных точек M плоскости выполнено неравенство $MC < MA + MB$.

32. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон — величина постоянная. С помощью этого утверждения получите другое доказательство теоремы Ферма—Торричелли—Штейнера.

П о д с к а з к а. Через каждую вершину треугольника проведите прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему эту вершину с точкой Торричелли. Эти прямые образуют равносторонний треугольник.

33. На плоскости даны две точки и прямая. Найдите точку, сумма расстояний от которой до данных точек и до прямой минимальна.

34. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Для какой точки плоскости сумма расстояний до его вершин будет наименьшей? Ответ ясен: для точки пересечения диагоналей. Пусть треугольник ABC — остроугольный. Представим, что вершина D приближается к вершине C. Тогда четырёхугольник $ABCD$ стремится к треугольнику ABC, а точка минимума суммы расстояний — точка пересечения диагоналей — стремится к вершине C. В пределе получим, что вершина C — точка минимума суммы расстояний для треугольника ABC. Но ведь на самом деле, как мы знаем, минимум суммы расстояний до вершин треугольника ABC достигается в его точке Торричелли, а не в вершине C. Противоречие?

35. Для трёх точек A, B и C на плоскости найдите такую точку M, для которой значение выражения а) $AM+BM+2CM$; б) $AM+BM-CM$ достигает наименьшего значения.

§ 4. СЕТИ ШТЕЙНЕРА

Много лет назад автор этих строк давал школьникам на занятиях на Малом мехмате следующую задачу:

36. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 4 км. Жители хотят соединить их системой дорог так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую. Они собрали деньги на 11 км дороги. Хватит ли этого?

Вообще говоря, ясно, что ответ — нет. Если соединить дорогами три стороны квадрата (буквой «П»), то длина составит 12 км. Если провести две диагонали с перекрёстком в центре, то длина будет $8\sqrt{2}=11{,}31\ldots$ км. Меньше ничего уже быть не может. В самом деле: если есть только одна дорога, соединяющая последовательно все вершины (иначе говоря, если перекрёстков не будет), то её длина будет не меньше трёх сторон квадрата (поскольку дорога, соединяющая две вершины квадрата, не меньше его стороны), т. е. не меньше 12 км. Если же есть хотя бы один перекрёсток, то он соединён дорогами со всеми вершинами квадрата. Значит, длина дорог не меньше, чем $8\sqrt{2}$, потому что сумма расстояний от перекрёстка до вершин квадрата не меньше, чем от центра квадрата до вершин (как мы знаем, минимум суммы расстояний от точки до вершин четырёхугольника достигается в точке пересечения диагоналей). В этом случае длина дорог не меньше $8\sqrt{2}=11{,}31\ldots$

Примерно так рассуждали десятиклассники, доказывая, что ответ в задаче отрицательный. В то время как ничего не подозревавшие восьмиклассники, не знавшие даже теоремы косинусов, экспериментально, с помощью линейки, приняв 1 сантиметр в тетради за 1 км, без труда строили необходимую систему дорог.

37. Найдите ошибку в приведённом «доказательстве».

Оказывается, кратчайшая система дорог в задаче имеет длину

$$4(\sqrt{3}+1)=10{,}928\ldots \text{ км.}$$

Получается, что отрезки, соединяющие некоторую точку плоскости с вершинами многоугольника, вовсе не обязательно составляют кратчайшую систему дорог, соединяющих все вершины. Уже для квадрата кратчайшая система дорог имеет более сложный вид. Какой? Ответ мы узнаем чуть позже, пока же от квадрата спустимся к треугольнику. А для трёх точек будет ли решение задачи Ферма—Торричелли—Штейнера давать кратчайшую систему дорог? То, что минуту назад казалось очевидным, теперь уже вызывает сомнения. Но, оказывается, что для трёх точек всё нормально: если углы треугольника меньше 120°, то кратчайшая система дорог, соединяющая его вершины, будет состоять из трёх отрезков от точки Торричелли до вершин, а если найдётся угол, больший или равный 120°, то из двух отрезков — сторон треугольника, выходящих из этой вершины. Однако, попытка напрямую обобщить это утверждение с плоскости на пространство почему-то даёт сбой:

38. Паук связал паутину, соединяющую все вершины правильного тетраэдра. Чему равна наименьшая длина паутины, если ребро тетраэдра равно 1?

Дадут ли ответ четыре отрезка, соединяющие вершины с центром тетраэдра? Или паук сможет обойтись меньшей длиной? В отличие от аналогичной «плоской» задачи — сможет! Суммарная длина четырёх отрезков от центра тетраэдра до вершин равна $\sqrt{6}=2{,}449\ldots$ В то время как наименьшая возможная длина паутины равна $\sqrt{3}+1/\sqrt{2}=2{,}439\ldots$ Отличие всего в одну сотую!

Задача Штейнера. В пространстве дано k точек. Соединить их системой кривых наименьшей суммарной длины.

Эта задача была впервые поставлена великим геометром Якобом Штейнером (1796—1863). Родившийся в Швейцарии в крестьянской семье Штейнер был в математике самоучкой. В возрасте двадцати лет он переехал в Германию, где и работал до конца жизни, сначала в университете Гейдельберга, а затем — Берлина. Вклад Штейнера в геометрию огромен. Ему принадлежит множество новых идей и красивых, иногда весьма трудных теорем. Он впервые доказал, что треугольник с двумя равными биссектрисами — равнобедренный, что все геометрические построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, могут быть осуществлены с помощью одной линейки, если только нам дана хотя бы одна окружность и её центр. Так называемый поризм Штейнера, или «ожерелье Штейнера», теорема о цепочке касающихся окружностей, по праву считается одним из красивейших утверждений геометрии. Как представитель «чистой геометрии», он был убеждён, что геометрию надо изучать умозрительно, без привлечения вычислений. Он говорил, что «расчёт заменяет мышление, а геометрия, напротив, это мышление укрепляет». По его убеждению, каждая геометрическая задача должна иметь чисто геометрическое решение. Если Штейнеру не удавалось найти геометрическое решение, он считал задачу не решённой вовсе и не публиковал решения. По этой причине многие теоремы Штейнера дошли до нас без доказательств.

Решение. Мы решим задачу Штейнера для k точек на плоскости. С незначительными изменениями это же доказательство годится и для k точек в пространстве, и даже в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности. В этом смысле решение задачи Штейнера универсально!

Решение разобьём на несколько этапов. Итак, пусть на плоскости даны k точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Посмотрим, какими свойствами должна обладать кратчайшая система дорог, соединяющая эти точки. Первое свойство достаточно очевидно, и вытекает из того, что кратчайшим путём из одной точки в другую является отрезок прямой:

а) кратчайшая система дорог состоит из отрезков.

Таким образом, кратчайшая система дорог является плоским *графом* — объединением конечного числа отрезков. Концы этих отрезков — *вершины графа*, а сами отрезки — его *рёбра*. Данные точки $A_1, \ldots, A_k$ мы будем называть *настоящими* вершинами этого графа, все прочие его вершины (перекрёстки дорог) — *дополнительными*. По условию этот граф *связный*, т. е. из любой его вершины можно добраться по рёбрам в любую другую. Более того, этот граф *односвязный*, т. е. для любой пары вершин существует единственный путь по рёбрам, их связывающий (при этом всегда считаем, что никакой путь не проходит дважды по одному ребру). Связный граф является односвязным тогда и только тогда, когда он не содержит замкнутых путей (доказательство этого факта — простое упражнение). Если бы кратчайшая система дорог не была односвязной, то существовал бы замкнутый путь. Убрав любое ребро из этого пути, мы получили бы связный граф меньшей длины.

Итак, кратчайшую систему дорог надо искать среди односвязных графов, которые содержат данные точки в качестве вершин (но могут иметь и дополнительные вершины).

б) любые два ребра, выходящие из одной вершины, образуют угол не менее 120°.

В самом деле, если из вершины A выходят рёбра AB и AC, и угол между ними меньше 120°, то мы можем заменить эту пару рёбер другими, также связывающими точки A, B и C, но имеющими меньшую суммарную длину. Если в треугольнике ABC все углы меньше 120°, то поставим одну дополнительную вершину T — точку Торричелли этого треугольника, соединим её с вершинами A, B и C, а рёбра AB и AC уберём. Получим связный граф меньшей длины. А если в треугольнике ABC, скажем, угол при вершине B больше или равен 120°, то убираем ребро AC, а вместо него ставим BC. Вновь получим связный граф меньшей длины (рис. 16).

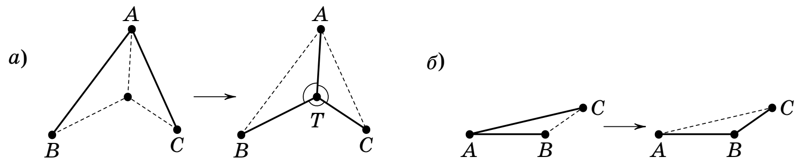

Рис. 16

Из этого свойства непосредственно следует, что

в) из настоящей вершины может выходить одно, два или три ребра; если выходит два ребра, то угол между ними больше или равен 120°; если три, то они образуют между собой углы в 120°.

Больше трёх рёбер выходить не может, иначе один из углов будет меньше 120°.

Таким образом, настоящие вершины бывают трёх типов. С дополнительными вершинами дело обстоит проще — все они одного типа:

г) из каждой дополнительной вершины выходят три ребра под углами 120°.

Действительно, первый тип для дополнительной вершины невозможен (если из дополнительной вершины выходит только одно ребро, то эта вершина не нужна, потому что её можно убрать вместе с ребром), второй — также невозможен (если дополнительная вершина M соединена рёбрами только с двумя вершинами B и C, то уберём эти рёбра вместе с самой вершиной M, а точки B и C соединим ребром; получим связный граф меньшей длины).

Определение. *Сетью Штейнера* данных точек $A_1, \ldots, A_k$, называется односвязный граф, имеющий среди своих вершин все данные точки (эти вершины называются настоящими, прочие — дополнительными), причём все его настоящие вершины принадлежат одному из трёх типов (пункт в), а все дополнительные вершины принадлежат только третьему типу (пункт г)).

На рис. 17 показана сеть Штейнера, связывающая девять точек.

Теорема. Кратчайшая система дорог, связывающая k точек, является сетью Штейнера.

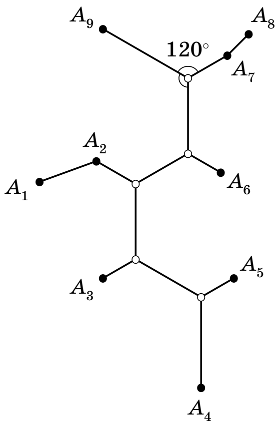

Рис. 17

Как строить такие сети? И вообще, сколько их может быть у данного набора точек? Ведь мы вольны ставить сколько угодно дополнительных вершин! Оказывается, что для данного набора точек существует лишь конечное число сетей Штейнера. Можно построить их все, а затем выбрать из них ту, которая имеет кратчайшую длину. Она и будет кратчайшей системой дорог, связывающей данные точки.

Как построение, так и доказательство осуществляется по индукции. Для этого нам понадобится лишь одно вспомогательное утверждение. Настоящую вершину сети Штейнера назовём *тупиковой*, если из неё выходит только одно ребро, и это ребро соединяет её с другой настоящей вершиной. Две настоящие вершины назовём *тупиковой парой вершин*, если из каждой из них выходит по одному ребру, и эти рёбра соединяют их с одной и той же дополнительной вершиной. Сеть Штейнера на рис. 17 имеет две тупиковые вершины — A_1 и A_8, и одну тупиковую пару вершин — $\{A_4, A_5\}$.

Лемма. В каждой сети Штейнера есть либо тупиковая вершина, либо тупиковая пара вершин.

Доказательство леммы. Среди всех путей по рёбрам графа выберем путь, состоящий из наибольшего числа рёбер. Пусть он начинается в вершине A, а следующая вершина — B. Тогда AB — единственное ребро, выходящее из A, и A — настоящая вершина. Если и B — настоящая, то всё доказано: вершина A — тупиковая. Если B — дополнительная вершина, то из неё выходят ещё два ребра: BC и BD. По крайней мере одно из этих рёбер (пусть это будет BD) не лежит на выбранном пути. Докажем, что BD — единственное ребро, выходящее из вершины D. Если из D выходит ещё какое-нибудь ребро BE, то путь $E \to D \to B \to \ldots$ будет содержать больше рёбер, чем путь $A \to B \to \ldots$, что невозможно. Таким образом, A и D составляют тупиковую пару вершин.

Построение сети Штейнера. База индукции. Если $k=2$, то отрезок, соединяющий две вершины, будет единственной сетью Штейнера. Действительно, как мы доказали, самый длинный путь в графе (т. е. содержащий наибольшее число рёбер) оканчивается либо тупиковой вершиной, либо тупиковой парой вершин. В обоих случаях это две настоящие вершины. У пути два конца, а настоящих вершин у нас всего две. Поэтому единственная возможность — самый длинный путь состоит из одного ребра и соединяет две настоящие вершины. Значит, вся сеть состоит из одного ребра.

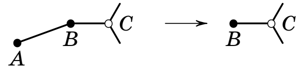

Рис. 18

Индуктивный переход. Пусть $k \geqslant 3$. Предположим, что для любых $k-1$ точек на плоскости существует лишь конечное число сетей Штейнера, и мы умеем их все строить. Пусть нам дано k точек. Согласно лемме, любая сеть Штейнера, соединяющая эти точки, содержит либо тупиковую вершину, либо тупиковую пару вершин.

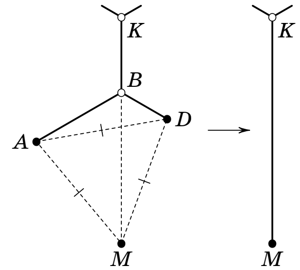

Рис. 19

В первом случае (рис. 18) мы можем убрать тупиковую вершину вместе с единственным исходящим из неё ребром. Получаем граф, который будет сетью Штейнера для оставшихся $k-1$ точек.

Во втором случае (рис. 19) обозначим через A и D тупиковую пару вершин, соединённых с дополнительной вершиной B, а через BK — третье ребро, выходящее из вершины B. Построим на стороне AD равносторонний треугольник AMD так, что точки M и B лежат по разные стороны от прямой AD. Так как B — дополнительная вершина, $\angle ABD = \angle ABK = \angle DBK = 120^\circ$. Следовательно, точки A, B, D и M лежат на одной окружности, поэтому $\angle MBA = \angle MDA = 60^\circ$. Таким образом, точка B лежит на отрезке MK. Уберём вершины A и D вместе с дополнительной вершиной B и со всеми рёбрами, выходящими из B. Вместо них поставим одну настоящую вершину M и соединим её ребром с вершиной K. Получим сеть Штейнера, связывающую $k-1$ точек.

Таким образом, построение любой сети Штейнера для k точек сводится к аналогичной задаче для $k-1$ точек. Получаем индуктивный алгоритм. Пусть дано k точек $A_1, \ldots, A_k$. Тогда:

1-й способ. Временно убираем любую из точек A_j, $j=1, \ldots, k$, строим сеть Штейнера для оставшихся $k-1$ точек, затем соединяем A_j ребром с любой из этих $k-1$ точек.

2-й способ. Выбираем две точки A_i, A_j из k данных, строим равносторонний треугольник MA_iA_j и временно заменяем две точки A_i, A_j на одну точку M. Для получившихся $k-1$ точек строим сеть Штейнера. Обозначаем через B точку пересечения описанной окружности треугольника MA_iA_j с ребром MK, выходящим из вершины M. Теперь убираем вершину M, ставим обратно вершины A_i и A_j, ставим дополнительную вершину B и соединяем её рёбрами с вершинами A_i, A_j и K.

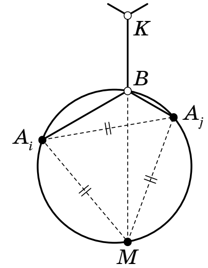

Рис. 20

После каждого шага нужно проверить, будет ли построенный граф сетью Штейнера для точек $A_1, \ldots, A_k$. При этом как бы мы ни действовали, хоть по первому, хоть по второму способу, нет гарантии, что всякий раз будет получаться сеть Штейнера. Например, если действовать по первому способу, то новое ребро, соединяющее точку A_j с некоторой точкой A_m, может составлять угол, меньший 120° с каким-либо из «старых» рёбер, выходящих из A_m. Если действовать по второму способу, то ребро MK может вовсе не пересечь окружность MA_iA_j, а может пересечь её не в том месте (нужно, напомним, чтобы точка пересечения лежала на дуге A_iA_j, не содержащей точку M). В обоих случаях мы не сможем поставить дополнительную вершину B.

Важно другое: любая сеть Штейнера точек $A_1, \ldots, A_k$ получается таким способом! Все сети Штейнера будут содержаться среди построенных графов. Мы уже доказали это, опираясь на лемму.

Посмотрим, как строятся сети Штейнера для малого числа точек. Со случаем $k=2$ всё ясно, займёмся случаем $k=3$.

Пример 1. $k=3$, точки A_1, A_2, A_3 — произвольные.

Первый способ. Уберём любую из трёх точек, например, A_1. Сетью Штейнера оставшихся двух точек будет отрезок A_2A_3. Теперь соединяем точку A_1 с любой из вершин A_1 или A_2. В любом случае получаем две стороны треугольника $A_1A_2A_3$. Если угол между ними не меньше 120°, то это будет сетью Штейнера.

Второй способ. Убираем две вершины, например, A_1 и A_2. Строим равносторонний треугольник A_1MA_2, затем находим точку пересечения дуги A_1A_2 его описанной окружности с отрезком MA_3. Если они пересекаются, то обозначаем точку пересечения через B. Получаем сеть Штейнера, состоящую из трёх отрезков BA_1, BA_2, BA_3. Легко видеть, что B — точка Торричелли треугольника $A_1A_2A_3$. Итак,

> Для трёх точек всегда существует единственная сеть Штейнера. Если один из углов треугольника с вершинами в этих точках больше или равен 120°, то сеть состоит из двух рёбер — сторон этого угла. Если все углы меньше 120°, то она состоит из трёх рёбер, соединяющих точку Торричелли (дополнительную вершину) с тремя вершинами.

Уже для четырёх точек может быть несколько сетей Штейнера. Всё зависит от их взаимного расположения. Построим кратчайшую систему дорог для четырёх вершин квадрата, решив, таким образом, задачу 36.

Пример 2. $k=4$, точки A_1, A_2, A_3, A_4 — вершины квадрата.

Первый способ. Убираем вершину A_1. В оставшемся треугольнике $A_2A_3A_4$ углы меньше 120°, поэтому его сеть Штейнера состоит из отрезков TA_2, TA_3, TA_4, где T — точка Торричелли треугольника $A_2A_3A_4$. Теперь нужно соединить A_1 с любой из вершин A_2, A_3 или A_4. Однако, как легко видеть, при этом каждый раз будут получаться два ребра с углом меньше 120°. Итак, первый способ не даёт сети Штейнера.

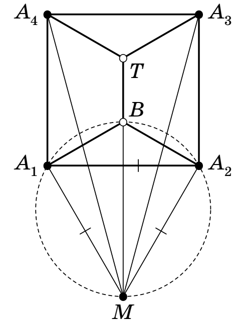

Рис. 21

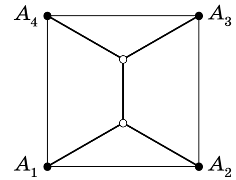

Рис. 22

Второй способ. Убираем пару вершин. В силу симметрии, достаточно рассмотреть два случая: вершины A_1, A_3 (концы диагонали) и вершины A_1, A_2 (концы стороны). В первом случае (убрали A_1 и A_3) строим равносторонний треугольник A_1MA_3. Три точки M, A_2 и A_4 лежат на одной прямой, поэтому их сеть Штейнера состоит из двух отрезков MA_2 и A_4A_2. Ребро MA_2 не пересекает дуги A_1A_3 описанной окружности треугольника A_1MA_3. Таким образом, этот случай не даёт сети Штейнера. Во втором случае (убрали A_1 и A_2) строим равносторонний треугольник A_1MA_2. Если он построен во внутреннюю сторону квадрата, то вновь не получается сети Штейнера (оставим разобрать этот случай читателю). Если во внешнюю сторону, то A_3MA_4 — остроугольный; его сеть Штейнера — три отрезка, соединяющие его вершины с точкой Торричелли T. Ребро TM пересекает описанную окружность треугольника A_1MA_2 в точке B (рис. 21).

В итоге мы получили сеть Штейнера, показанную на рис. 22. Она состоит из пяти рёбер и имеет две дополнительные вершины. Если сторона квадрата равна 4 (как в задаче о деревнях), то суммарная длина дорог равна

$$4(\sqrt{3}+1)=10{,}928\ldots$$

Оказывается, что кратчайшая система дорог имеет два перекрёстка, а не один!

Как видим, уже для четырёх точек требуется перебрать много вариантов, чтобы построить сеть Штейнера. Для пяти точек таких вариантов будет ещё больше, кроме того, самих сетей Штейнера может быть много. Вообще говоря, только одна (или несколько) из них является кратчайшей системой дорог, все остальные — *локально* кратчайшие, т. е. любая система, достаточно близкая к данной, будет иметь бо́льшую длину. Математики в таких случаях говорят, что каждая сеть Штейнера даёт *локальный минимум* в задаче, а одна или несколько из них дают *глобальный минимум*, т. е. являются самыми короткими среди всех систем дорог, а не только среди близких. Так, уже для квадрата существует не одна, а две сети Штейнера (первая — та, которую мы построили, вторая — получающаяся из первой поворотом на 90° вокруг центра квадрата). Они равны, поэтому обе дают глобальный минимум.

Современная вычислительная техника даёт возможность осуществлять перебор огромного числа вариантов и легко строить сети Штейнера, например, для двадцати точек. Системы дорог в местностях с однородным рельефом (например, в степи) строятся по сетям Штейнера. Нефтяные и газовые трубопроводы в российской и канадской тундре также строятся по сетям Штейнера. Сети Штейнера можно встретить и в природе, например, в структуре полимерных молекул. А увидеть их наглядно можно, проделав следующий опыт: вбить в доску несколько гвоздей, опустить её в мыльный раствор, а затем вытащить. Мыльная плёнка натянется между гвоздями по сети Штейнера. Вернее, по одной из возможных сетей (ведь если гвоздей больше трёх, то сетей может быть несколько), причём не обязательно по самой короткой. Мы вернёмся к этой модели в § 8 (задача 72).

39. Постройте сети Штейнера для четырёх вершин прямоугольника размером 3×4. Какая из них является кратчайшей системой дорог, и чему равна её длина?

40. Сколько сетей Штейнера может быть у равнобедренной трапеции? Приведите соответствующие примеры.

41. Постройте кратчайшую систему дорог, соединяющих вершины правильного пятиугольника.

42. Придумайте способ построения сетей Штейнера для k точек в пространстве и проведите все доказательства.

43. Постройте сети Штейнера для четырёх вершин правильного тетраэдра (решив, таким образом, задачу 38 о пауке).

44. Постройте хотя бы одну сеть Штейнера для вершин куба.

§ 5. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

> «Всё моё, моё!» — говорит жадный человек, собирая свои руки в круг, показывая, как много добра он может ими захватить. При этом не подозревая, что демонстрирует решение одной из самых древних задач математики — изопериметрической задачи.

Изопериметрическая задача. Среди всех замкнутых линий данной длины найти ту, которая охватывает наибольшую площадь.

Ответ известен всем — это окружность, а фигура — круг. В чём же тогда задача, спросите вы? Задача в том, чтобы это доказать. И тут математика сталкивается с неожиданными трудностями, подтверждая известное правило: «чем очевиднее утверждение, тем труднее его доказать».

Судьба изопериметрической задачи воистину удивительна! Ответ был известен человечеству почти 3000 лет и ни у кого не вызывал сомнений, но строго доказать его удалось лишь в конце XIX века.

История изопериметрической задачи началась в IX веке до н. э., когда, как написал в своей поэме «Энеида» древнеримский поэт Вергилий, дочь финикийского царя принцесса Дидона, спасаясь от своего брата, замыслившего заговор против неё, снарядила корабль и со своими слугами отправилась в плавание вдоль южного побережья Средиземного моря. После нескольких дней плавания корабль причалил к живописному берегу на территории современного государства Тунис. Принцесса попросила вождя местного племени Ярба выделить ей участок земли на берегу для того, чтобы основать там своё поселение. Вождь с усмешкой предложил ей взять столько земли, сколько можно ограничить одной бычьей шкурой. Тогда хитрая Дидона приказала разрезать бычью шкуру на очень тонкие полосочки, из которых сплели длинную верёвку. Считая для простоты линию берега прямой, получаем задачу, которую Дидоне предстояло решить.

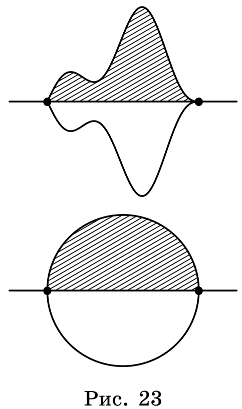

Рис. 23

Задача Дидоны. От прямой линии берега верёвкой данной длины отгородить участок земли наибольшей площади.

Задача Дидоны в точности равносильна изопериметрической задаче. Пусть, для определённости, длина верёвки равна 1 км. Сделав симметрию относительно прямой линии берега, получим замкнутую линию длиной 2 км. Она ограничивает наибольшую площадь, когда является окружностью. Следовательно, верёвка должна ограничивать полукруг (рис. 23).

Так, согласно легенде, был основан знаменитый город древнего мира Карфаген. Говорят, что старая крепость Карфагена действительно имела форму полукруга. Было ли сделано так, потому что Дидона решила задачу, или по другим причинам, видимо, навсегда останется неизвестным. Однако несомненно одно: изопериметрическое свойство круга является одним из древнейших утверждений геометрии, наряду с теоремой Пифагора (которую знали, как известно, ещё древние египтяне) или теоремой о вертикальных углах, доказанной первым учёным античного мира Фалесом.

Многие выдающиеся мыслители находили различные объяснения максимальности круга и шара (соответствующее свойство шара ограничивать максимальный объём при данной площади поверхности называют *изопифанностью*). Вот что писал, например, Николай Коперник в своей великой книге «О вращениях небесных сфер»: «Прежде всего мы должны заметить, что мир является шарообразным или потому, что эта форма совершеннейшая из всех и не нуждается ни в каких скрепах и вся представляет цельность, или потому, что эта форма среди всех других обладает наибольшей вместимостью, что более всего приличествует тому, что должно охватить и сохранить всё».

Если шар вмещает в себя весь мир, то он, конечно, имеет максимальный объём!

Попытки строгого доказательства изопериметрического свойства круга предпринимались ещё в древности. Так, древнегреческий математик Зенодор, живший в V веке до н. э. в Александрии, дал вполне строгое, даже с позиций сегодняшнего дня, обоснование следующего факта: если для данного n существует n-угольник периметра 1, имеющий максимальную площадь, то это — правильный n-угольник. От утверждения Зенодора один шаг до решения изопериметрической задачи (мы предлагаем читателю сделать его в задаче 53).

Замечательное доказательство изопериметрического свойства круга придумал уже не раз упоминавшийся Якоб Штейнер. Правда, его доказательство содержит серьёзный недостаток, фактически — ошибку. Впрочем, ошибку устранимую, а в середине XIX века, когда работал Штейнер, и вовсе за ошибку не считавшуюся. Вот это доказательство. Будьте очень внимательны!

Доказательство изопериметрического свойства круга. Рассмотрим фигуру, которая при данной длине периметра имеет наибольшую площадь. Назовём эту фигуру F, её площадь обозначим через S, а периметр — через l. Докажем, что эта фигура обладает тремя свойствами.

1°. *Фигура F выпукла.* Это означает, что любой отрезок, соединяющий две точки фигуры F, целиком лежит в F. Действительно, если бы F не была выпуклой, то нашёлся бы отрезок AB с концами на границе фигуры, который целиком лежит вне F (рис. 24). Отразив дугу границы фигуры F, лежащую между точками A и B, симметрично относительно прямой AB, получим фигуру с тем же периметром, но с большей площадью, следовательно, F не будет фигурой максимальной площади.

Назовём *диаметром* выпуклой фигуры любой отрезок, который делит её периметр пополам.

2°. *Любой диаметр фигуры F делит пополам не только её периметр, но и площадь.* Допустим, что найдётся диаметр AB, который делит F на две фигуры неравной площади. Возьмём ту половину, которая имеет бо́льшую площадь (ясно, что её площадь больше $S/2$), а другую половину уберём. Теперь отразим оставшуюся половину относительно прямой AB. Тогда получим симметричную фигуру, периметр которой по-прежнему равен l

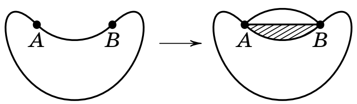

Рис. 24

(поскольку диаметр AB делил периметр F пополам), а площадь больше, чем $S/2+S/2=S$. Вновь получаем, что F не является фигурой наибольшей площади.

3°. *Из любой точки границы фигуры F диаметр виден под прямым углом.* Это значит, что если AB — диаметр, а M — любая точка на границе, то $\angle AMB=90^\circ$. Предположим, что это не так, и $\angle AMB\neq 90^\circ$ для какой-то точки M. Диаметр делит фигуру на две половины. Уберём ту половину, которая не содержит точки M. Согласно свойству 2°, оставшаяся половина будет иметь площадь $S/2$. Эта площадь состоит из трёх частей: площади треугольника AMB и площадей двух сегментов, примыкающих к сторонам AM и BM (на рис. 25 эти сегменты заштрихованы).

Приклеим эти сегменты к сторонам, а сами стороны раздвинем (или, напротив, сдвинем) так, чтобы угол AMB стал прямым. Площади сегментов при этом не изменятся, а площадь треугольника AMB увеличится. В самом деле, его площадь теперь равна $AM\cdot BM/2$, а была равна

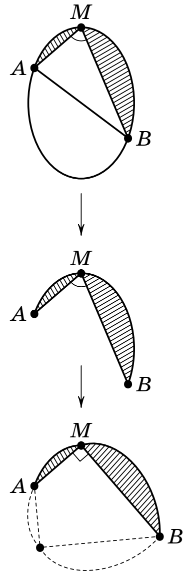

Рис. 25

$$\frac{1}{2}AM\cdot BM\cdot\sin\angle AMB<\frac{1}{2}AM\cdot BM.$$

Итак, мы получили фигуру, площадь которой больше, чем $S/2$. Теперь отразим её относительно прямой AB и получим фигуру периметра l и площади большей, чем S, что вновь приводит к противоречию.

Из свойства 3° немедленно следует, что F — это круг, поскольку окружность с диаметром AB является геометрическим местом точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом. Теорема доказана.

Не правда ли, красиво! Получается, что изопериметрическое свойство круга равносильно угловому свойству окружности (из каждой точки окружности диаметр виден под прямым углом). Каждое из этих свойств следует из другого.

Ну, а где же ошибка? Внимательный читатель, конечно, заметил, что мы нарочно обходили некоторые тонкие моменты. Например, при доказательстве свойства 1° после отражения относительно прямой AB у фигуры могут появиться самопересечения, и что делать тогда? Почему самопересечений не возникнет при доказательстве свойства 3°, когда мы меняем угол между AM и BM? Признаемся, для краткости мы опустили много деталей в доказательстве. Строгое доказательство несколько длиннее, и, поверьте на слово, на самом деле в этих местах никаких проколов нет. Ошибка не в этом!

Ошибка содержится в самой первой фразе доказательства: «Рассмотрим фигуру, которая при данной длине периметра имеет наибольшую площадь». Почему такая фигура вообще существует? А если её нет? Это кажется мелким замечанием, которое можно легко обойти. Увы! Пока существование фигуры максимальной площади не доказано, доказательство Штейнера нельзя считать верным. Иначе подобные рассуждения могут приводить к совершенно абсурдным выводам.

Пример 1. **«Теорема»**. Среди всех квадратов наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 1.

«Доказательство». Рассмотрим квадрат наибольшей площади, пусть его сторона равна a. Если $a<1$, то его площадь, равная a^2, также меньше 1, а значит, меньше площади квадрата со стороной 1. Получаем противоречие. Если $a>1$, то выполнено неравенство $a^2<a^4$, а значит площадь нашего квадрата меньше площади квадрата со стороной, равной a^2. Вновь получаем противоречие. Следовательно, $a=1$.

Несмотря на явную абсурдность этого рассуждения, с точки зрения логики, оно ничуть не хуже доказательства Штейнера. В самом деле, мы придумали некоторый аргумент, доказывающий, что квадрат со стороной a не является квадратом наибольшей площади. Аргумент проходит для всех значений a, кроме $a=1$. Из этого мы делаем «вывод», что квадрат со стороной 1 имеет наибольшую площадь. В доказательстве Штейнера сделано то же самое: приведён аргумент, доказывающий что данная фигура не является фигурой максимальной площади. Аргумент проходит для любой фигуры, кроме круга. И мы делаем вывод, что при данном периметре круг имеет наибольшую площадь.

Можно возразить: ведь площадь квадрата может быть сколь угодно большой, поэтому максимального квадрата нет! А площадь фигуры данного периметра явно ограничена. Разве из этого не следует, что среди фигур данного периметра найдётся фигура максимальной площади? Хорошо, вот другой пример:

Пример 2. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, обладающих следующим свойством: $f(0)=f(1)=1$, и $0\leqslant f(x)\leqslant 2$ для всех $x\in(0, 1)$. Из всех таких функций найти ту, для которой площадь под её графиком (т. е. площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, вертикальными прямыми, проведёнными в точках $x=0$ и $x=1$, и дугой графика) наибольшая. Те, кто знаком с понятием интеграла, формулируют задачу так:

$$\int_0^1 f(x)\,dx\to\max,\qquad 0\leqslant f(x)\leqslant 2;\;\; f(0)=f(1)=1.$$

«Решение». Пусть максимальная площадь под графиком достигается для функции $f(x)$. Рассмотрим функцию

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{если } f(x)\leqslant 1;\\ f(x)+(f(x)-1)(2-f(x)), & \text{если } f(x)>1.\end{cases}$$

Если функция $f(x)$ не равна тождественной единице, то, как легко видеть, площадь под её графиком меньше, чем под графиком функции $g(x)$. Следовательно, если площадь под графиком функции $f(x)$ максимальна, то $f(x)=1$ для всех $x\in[0, 1]$.

Ответ, конечно же, неверен. Например, функция $f(x)=-x^2+x+1$ ограничивает бóльшую площадь, чем тождественная единица. А причина неверного решения в том, что функции максимальной площади в условиях задачи просто не существует, несмотря на то, что площадь под графиком функции f — величина ограниченная (она всегда меньше, чем 2).

На самом деле Якоб Штейнер доказал, что

> Если фигура наибольшей площади среди всех фигур данного периметра существует, то это — круг.

Стоп, стоп! Но ведь и в предыдущем разделе, говоря о сетях Штейнера, мы не доказали того, что кратчайшая система дорог существует! Получается, что и те доказательства тоже не верны? Строго говоря, да. Вернее так: не *не верны*, а *не завершены*. В обеих задачах осталось лишь доказать, что решение существует. В середине XIX века ни в существовании фигуры данного периметра и наибольшей площади, ни в существовании кратчайшей системы дорог, не было никаких сомнений. И доказательства Штейнера считались совершенно строгими. Существование решения в обеих задачах легко объяснить, например, из физических соображений (этим займёмся чуть позже, в § 8), а в те времена такого обоснования было вполне достаточно. Лишь к концу XIX века, усилиями немецких математиков Г. А. Шварца и В. Бляшке строгое доказательство существования в изопериметрической задаче было завершено, и её многовековая история подошла к концу. Мы расскажем про это доказательство в приложении Б, а заодно докажем существование решения в задаче о сетях Штейнера.

Пока же будем считать изопериметрическое свойство доказанным и пользоваться им при решении задач. А заодно договоримся: во всех последующих параграфах не будем задавать вопрос о существовании минимума или максимума. Существование в таких задачах доказывается по одной и той же схеме, изложенной после основного текста в приложении А. Читатель, который сможет одолеть приложение А (в особенности теорему Вейерштрасса и следствие 2), сможет самостоятельно доказать, что минимумы и максимумы во всех предлагаемых задачах действительно достигаются. Читателю, который не сможет этого сделать, мы советуем просто поверить, что это действительно так.

45. Верёвкой данной длины отгородить от прямого угла фигуру наибольшей площади.

46. Та же задача для угла 60° и для угла 45°.

47. Кривой наименьшей возможной длины разделить равносторонний треугольник на две части равной площади.

48. Кривой наименьшей возможной длины разделить квадрат на две части равной площади (следует быть осторожным с кажущимся сходством этой задачи с задачей 47!).

49. Почему нефтехранилища на крупных заводах всегда делаются цилиндрическими (а иногда даже шарообразными), а не в виде, скажем, куба, что технологически было бы гораздо удобнее?

50. Разведчик прыгнул с парашютом из самолёта и приземлился в тылу врага, в глухом лесу. Теперь ему нужно скорее выйти из леса. Где кончается лес, и в какую сторону нужно идти, он не знает. Он знает только, что площадь леса равна 20 км^2, и что в этом лесу нет полян. Как он должен идти, чтобы, пройдя 16 км, наверняка выйти из леса? Какова длина кратчайшего пути, гарантирующего выход из леса? Какую кривую при этом опишет разведчик?

51. Те же вопросы, что и в задаче 50, но теперь известно, что лес имеет форму выпуклой фигуры.

52. а) Дан шарнирный многоугольник (длины сторон фиксированы, а углы можно менять произвольно). Докажите, что существует единственное положение этого многоугольника, при котором он вписан в окружность.

Подсказка. Возьмём окружность большого радиуса и отложим на ней последовательно все стороны многоугольника. Получим ломаную, вписанную в окружность. Затем будем уменьшать её радиус, пока ломаная не замкнётся.

б) Дан шарнирный многоугольник. Докажите, что его площадь будет максимальной, когда он вписан в окружность.

Подсказка. Рассмотрим произвольное положение многоугольника. Затем, изменив его углы, доведём его до вписанного в окружность. Зафиксируем дуги этой окружности и «приклеим» их к сторонам многоугольника. После этого приведём многоугольник к первоначальной форме, сохранив дуги окружности, приклеенные к сторонам. Остаётся сравнить площадь фигуры, ограниченной этими дугами, с площадью круга.

53. а) Не пользуясь изопериметрическим свойством круга, решите задачу Зенодора, т. е. докажите, что среди всех n-угольников данного периметра правильный n-угольник имеет наибольшую площадь. При этом существование n-угольника наибольшей площади считаем известным.

Подсказка. Берём многоугольник наибольшей площади, и сначала доказываем, что все его стороны равны, а затем — что все его углы равны.

б) Выведите изопериметрическую задачу из задачи Зенодора.

Подсказка. Предположим, что найдётся линия, ограничивающая бóльшую площадь, чем окружность данной длины, и приблизим эту линию многоугольником с очень маленькими сторонами.

§ 6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

«По обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно».

Иоганн Кеплер

Итак, мы разобрали множество задач, и каждая из них имела своё элегантное геометрическое решение. На практике, увы, так получается далеко не всегда. Многие геометрические задачи на минимум и максимум либо вовсе не имеют геометрического решения, либо их геометрические решения существенно сложнее аналитических. Таково положение вещей, и относиться к нему можно по-разному. С одной стороны, это плохо. С другой стороны, это обстоятельство всегда заставляло математиков искать новые пути решения. В таких поисках к концу XVII века родилось и оформилось новое направление математики, вставшее вровень с алгеброй и геометрией — математический анализ. Именно задачам на максимум и минимум, наряду с задачами механики и оптики, математический анализ обязан своим появлением. Принцип решения многих экстремальных задач сводится к простому и вместе с тем универсальному факту:

В точке максимума или минимума функции её производная равна нулю.

Это утверждение часто называют теоремой Ферма (не путать с великой теоремой Ферма и с малой теоремой Ферма в теории чисел!), поскольку именно Пьер Ферма впервые сформулировал его в 1629 году в работе «Метод отыскания наибольших и наименьших значений». Свой метод Ферма назвал «De maximis et minimis» (напомним, что научные работы в то время писались на латыни) и продемонстрировал, как с его помощью можно решить задачу Евклида: из всех прямоугольников с данным периметром найти тот, который имеет наибольшую площадь. Надо сказать, что идея вариационного метода в то время, что называется, витала в воздухе. Многие учёные развивали этот метод. Например, Иоганн Кеплер, слова которого из трактата «Стереометрия винных бочек» мы вынесли в эпиграф, или Исаак Ньютон, говоривший что «когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течёт ни вперёд, ни назад».

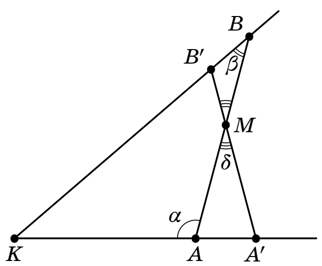

Рис. 26

Напомним, что производной функции $f(x)$ в точке x называется число a такое, что

$$f(x+h)=f(x)+a\cdot h+\alpha(h)\,|h|,$$

где величина $\alpha(h)$ стремится к нулю при $h\to 0$. Производную обозначают символом f', таким образом, $f'(x)=a$. Для достаточно малых приращений h функция $f(x+h)$ приближённо равна линейной функции $f(x)+ah$, причём чем меньше h, тем это приближение точнее.

54. Через данную точку внутри угла провести отрезок с концами на сторонах угла, имеющий наименьшую длину.

Удивительно, что эта чисто геометрическая задача не имеет столь же ясного геометрического решения. Все более или менее короткие её решения используют производную. Интересно и то, что многие похожие на неё задачи-близнецы, которые, на первый взгляд, даже сложнее её, имеют простые геометрические решения. Например, провести отрезок через данную точку внутри угла, отсекающий от угла треугольник минимальной площади или минимального периметра (задачи 56, 57).

Решение. Обозначим кратчайший отрезок через AB, а данную фиксированную точку внутри угла — через M. Проведём через M другой отрезок $A'B'$ с вершинами на сторонах угла. Пусть δ — угол между $A'B'$ и AB. Функция $f(\delta)=A'B'$ достигает своего минимума в точке $\delta=0$, поэтому $f'(0)=0$. Применив теорему синусов к треугольникам MBB' и MAA', получим

$$MB'=MB\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}, \qquad MA'=MA\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\delta)};$$

следовательно,

$$f(\delta)-f(0)=A'B'-AB=MB'+MA'-MB-MA=$$
$$=MB\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}-1\right)+MA\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\delta)}-1\right)=$$
$$=-MB\frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta+\delta)}+MA\frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\delta)}.$$

Итак,

$$\frac{f(\delta)-f(0)}{\delta}=-\frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\delta}\left(MB\frac{\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta+\delta)}-MA\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\delta)}\right).$$

Поскольку $\dfrac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\delta}\to 1$ при $\delta\to 0$, и при этом

$$\frac{\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta+\delta)}\to\operatorname{ctg}\beta, \qquad \frac{\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\delta)}\to\operatorname{ctg}\alpha,$$

получаем окончательно

$$f'(0)=-MB\operatorname{ctg}\beta+MA\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но так как $f'(0)=0$, для кратчайшего отрезка AB получаем такое условие:

$$MB\operatorname{ctg}\beta=MA\operatorname{ctg}\alpha.$$

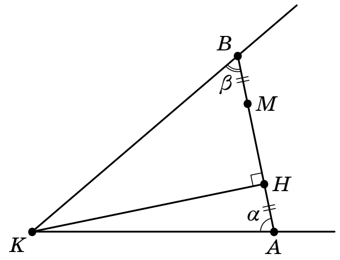

Рис. 27

Что это означает геометрически? Пусть K — вершина угла. Опустим перпендикуляр KH на AB. Нетрудно проверить, что $\dfrac{HB}{HA}=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}$. С другой стороны, $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}$, поэтому $MA=HB$ и $MB=HA$ (рис. 27). Итак,

Кратчайший отрезок AB характеризуется следующим свойством: проекция вершины угла на AB симметрична точке M относительно середины отрезка AB.

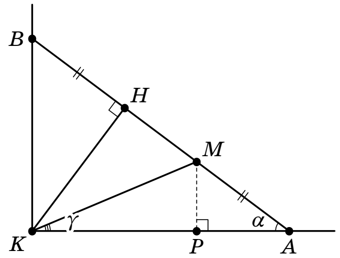

Рис. 28

Почему мы лишь охарактеризовали положение отрезка AB, а не дали способа его построения? Дело в том, что для произвольного угла этот отрезок не может быть построен с помощью циркуля и линейки. Именно поэтому эта «простая» геометрическая задача имеет столь громоздкое решение. Если бы существовало такое построение, которое находило бы кратчайший отрезок для любого угла, то оно годилось бы и для прямого угла (рис. 28). Если угол K — прямой, то

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

С другой стороны, $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$, где γ — угол между KM и KA (мы воспользовались подобием треугольников APM и AKB). Итак, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\gamma}$. Построить отрезок AB означает найти кубический корень из числа $\operatorname{tg}\gamma$. Последнее, как известно, не выполнимо с помощью циркуля и линейки.

В экстремальных задачах довольно частой является ситуация, когда возможно только охарактеризовать положение точки минимума (максимума), но не найти её конструктивно.

Вариационный метод применим и к задачам с несколькими переменными, когда функция $f(x)$ задана не на прямой, а, скажем, на плоскости. При этом x — точка на плоскости с координатами

(x_1, x_2). Производная определяется по тому же принципу: производной в данной точке x называется вектор $a = f'(x)$ такой, что

$$f(x+h) = f(x) + a \cdot h + \alpha(h)|h|,$$

где $h = (h_1, h_2)$ — произвольный вектор, называемый приращением аргумента x, число $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ — его длина, а величина $\alpha(h)$ стремится к нулю при $|h| \to 0$. Разница только в том, что вместо обычного произведения чисел теперь берётся скалярное произведение векторов $a \cdot h$, равное произведению их длин на косинус угла между ними. В координатах скалярное произведение выражается как $a \cdot h = a_1 h_1 + a_2 h_2$.

В точке минимума или максимума функции f её производная (если она существует) равна нулю.

Доказательство. В самом деле, пусть $f'(x) = a \neq 0$. Тогда рассмотрим приращения $h = ta$, где t — положительное число. Учитывая, что $a \cdot ta = t|a|^2$, получаем

$$f(x+ta) = f(x) + t|a|^2 + t|a|\,\alpha(ta) = f(x) + t|a|(|a| + \alpha(ta)).$$

При $t \to 0$ величина $\alpha(ta)$ стремится к нулю, поэтому при малых t величина $|a| + \alpha(ta)$ — положительна, значит $f(x+ta) > f(x)$. Таким образом, точка x не является точкой максимума. Точно так же, взяв приращение $h = -ta$, доказываем, что x не является и точкой минимума.

В качестве примера найдём производную функции длины вектора $f(x) = |x|$. Эта производная понадобится нам во многих задачах. Пользуясь тем, что $|x|^2 = x \cdot x$, получаем

$$|x+h| - |x| = \frac{|x+h|^2 - |x^2|}{|x+h| + |x|} = \frac{(x+h)\cdot(x+h) - x \cdot x}{|x+h| + |x|} = \frac{2x \cdot h + h \cdot h}{|x+h| + |x|}.$$

Отсюда

$$|x+h| - |x| = \frac{2x}{|x+h| + |x|} \cdot h + \frac{|h|}{|x+h| + |x|} \cdot |h|$$

Если $x \neq 0$, то при $h \to 0$ величина $|x+h| + |x|$ стремится к $2|x|$, а величина $\frac{|h|}{|x+h| + |x|}$ стремится к нулю. Поэтому

$$|x+h| - |x| = \frac{x}{|x|} \cdot h + \alpha(h)|h|.$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Отсюда следует, что $f'(x) = \frac{x}{|x|}$. Итак,

Функция $f(x) = |x|$ имеет производную в любой точке x, кроме точки $x = 0$. Эта производная является вектором единичной длины, сонаправленным с вектором x.

55. Задача о наименьшей сумме расстояний до k точек. На плоскости дано k точек. Найти точку, сумма расстояний от которой до этих точек минимальна.

Решение. Обозначим через $x_1, \ldots, x_k$ данные точки, а через x — произвольную точку плоскости. Пусть также $f_i(x) = |x - x_i|$ для $i = 1, \ldots, k$. Нужно найти точку x, для которой сумма $f_1(x) + \ldots + f_k(x)$ будет наименьшей. Производная функции $f_i(x)$ является единичным вектором, сонаправленным вектору $x - x_i$. Если x — точка минимума, то либо сумма таких векторов равна нулю, либо одна из функций f_i не имеет производной в точке x, а это значит, что x совпадает с точкой x_i. Таким образом,

Точка минимума суммы расстояний либо совпадает с одной из данных точек, либо характеризуется следующим свойством: сумма k векторов единичной длины, направленных из этой точки к данным k точкам, равна нулю.

При $k = 3$ получаем точку Торричелли либо одну из вершин треугольника (как мы знаем, вершину с углом $\geqslant 120°$), при $k = 4$ — точку пересечения диагоналей четырёхугольника, если четырёхугольник выпуклый, а если невыпуклый — то его вершину, лежащую внутри треугольника с вершинами в трёх оставшихся точках. При $k \geqslant 5$ эта точка, вообще говоря, не строится с помощью циркуля и линейки.

Получается довольно странная ситуация. Если на плоскости дано, скажем, 10 точек, то существует способ построения кратчайшей системы дорог, их связывающей (сеть Штейнера). Причём это построение — точное, его можно сделать с помощью циркуля и линейки и найти точную длину. Если же нам нужно решить более, казалось бы, простую задачу — найти точку, сумма расстояний от которой до данных 10 точек минимальна (т. е. найти кратчайшую не из всех систем дорог, а только из тех, которые сходятся в одном перекрёстке), то эта задача в общем случае решается лишь приближённо, а не точно. Про точку минимума мы ничего не знаем, кроме того, что она существует, и того, что сумма 10 единичных векторов из неё в данные точки равна нулю. С помощью циркуля и линейки мы решение построить не можем.

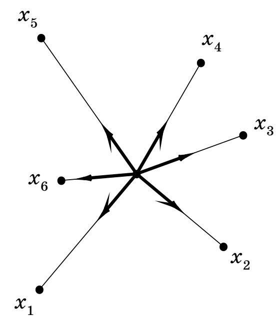

Рис. 29

56. Прямой, проходящей через данную точку внутри угла, отрезать от этого угла треугольник наименьшей площади. Найдите как геометрическое решение, так и решение, использующее производную. Какое из них проще?

57. То же, но для треугольника минимального периметра. Найдите как геометрическое решение, так и решение, использующее производную.

58. Проведите касательную к данной окружности, лежащей внутри угла, отсекающую от этого угла треугольник а) минимальной площади; б) минимального периметра.

59. Через данную точку внутри угла провести прямую так, чтобы сумма $KA+KB$ была наименьшей (точка K — вершина угла, точки A и B — точки пересечения прямой со сторонами угла).

60. Пространственный четырёхугольник $ABCD$ сделан из четырёх стержней длины 1, шарнирно соединённых в вершинах. В каком положении объём тетраэдра $ABCD$ — наибольший? Чему равен этот наибольший объём?

61. Даны положительные числа a, b, c и треугольник ABC. Охарактеризуйте положение точки M, для которой сумма $aMA+$ $+bMB+cMC$ минимальна.

62. Если k точек не лежат на одной прямой, то существует только одна точка с наименьшей суммой расстояний до них.

Подсказка. Предположим, что нашлись две точки с наименьшей суммой расстояний. Докажите, что для середины отрезка, соединяющего эти точки, сумма расстояний ещё меньше. Для этого воспользуйтесь тем, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.

63. Пусть M — точка внутри тетраэдра $ABCD$, для которой сумма расстояний до вершин минимальна. Тогда противоположные рёбра тетраэдра видны из точки M под равными углами, а биссектрисы этих углов лежат на одной прямой.

64. На плоскости даны k точек и прямая линия. Охарактеризуйте положение точки плоскости, сумма расстояний от которой до данных точек и до прямой — наименьшая.

65. В пространстве даны три точки и плоскость. Охарактеризуйте положение точки, сумма расстояний от которой до данных точек и до плоскости — наименьшая.

§ 7. ПРАВИЛО МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В 1755 году 19-летний юноша, будущий великий французский математик Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), изложил в письме к Леонарду Эйлеру свой метод решения задач по нахождению максимумов и минимумов. Сам Эйлер решал множество задач такого рода и каждый раз придумывал особый приём для новой задачи. Вопрос Эйлера, к которому он приглашал учёных, состоял в том, чтобы изыскать общий метод решения. Юный Лагранж блестяще справился с этой проблемой, и разработал свой алгоритм, решавший единообразным способом самые разные экстремальные задачи, включая изопериметрическую. Восторженная реакция Эйлера не заставила долго ждать: «Ваше решение изопериметрических проблем безукоризненно, и я рад, что тема, которой я давно занимаюсь, доведена Вами до близкого конца».

Метод Лагранжа базируется на нескольких ключевых идеях. Одна из них состоит в том, как искать минимум функции, если на функцию заданы некоторые ограничения. Этот приём теперь носит название «правило множителей Лагранжа». Мы сформулируем это правило в несколько упрощённой форме.

Теорема Лагранжа. Предположим, на плоскости задана функция $f(x)$ и дана кривая $g(x)=0$. Если функция f, ограниченная на данную кривую, достигает своего минимума или максимума в точке $\hat{x}$, то векторы $f'(\hat{x})$ и $g'(\hat{x})$ коллинеарны (при условии, что обе функции имеют производные в точке $\hat{x}$).

В общей теореме Лагранжа функция f зависит не от двух, а от n переменных, и есть несколько функций $g(x)$, задающих ограничения $g_i(x)=0$, $i=1, \ldots, m$. Мы оставим эту теорему без доказательства, это завело бы нас слишком далеко в сторону математического анализа. Посмотрим, как превосходно она работает при нахождении максимумов и минимумов.

Теорема (Закон Снеллиуса о преломлении света). Две среды разделены прямой линией, в первой скорость распространения света равна v_1, а во второй — v_2. Если луч света выходит из первой среды под углом α_1 к нормали и входит во вторую под углом α_2, то

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

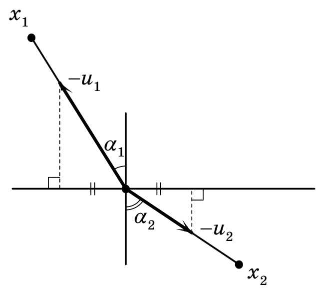

Рис. 30

Доказательство. Прямая на плоскости задаётся уравнением

$$n\cdot(x-x_0)=0,$$

где x_0 — произвольная точка прямой, а n — вектор, перпендикулярный прямой. Выберем произвольную точку x_1 на входящем пучке света и точку x_2 на преломлённом (рис. 30). Свет всегда распространяется по пути, занимающему наименьшее время. Значит, нужно найти на границе сред точку x, для которой величина $f(x)=$ $=\frac{1}{v_1}|x-x_1|+\frac{1}{v_1}|x-x_2|$ принимает наименьшее значение. Получаем задачу:

$$f(x)=\frac{|x-x_1|}{v_1}+\frac{|x-x_2|}{v_2}\to\min \quad \text{при условии } g(x)=n\cdot(x-x_0)=0.$$

Согласно принципу Лагранжа, в точке минимума векторы $f'(x)$ и $g'(x)$ коллинеарны. Производная $f'(x)$ равна сумме вектора u_1, который имеет длину $1/v_1$ и сонаправлен с вектором $x-x_1$, и вектора u_2 длины $1/v_2$, сонаправленного с вектором $x-x_2$. А производная $g'(x)$ равна вектору n. Условие коллинеарности означает, что сумма u_1+u_2 перпендикулярна прямой, то есть проекции векторов u_1 и u_2 на прямую равны. Таким образом, $\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$, что и требовалось.

Ну а теперь мы готовы представить обещанные решения задач о минимуме суммы расстояний до точки прямой и до точки плоскости.

66. Задача о минимальной сумме расстояний от k точек плоскости до точки на прямой. На плоскости дана прямая и k точек. Найти (или охарактеризовать) положение точки на прямой, для которой сумма расстояний до данных точек минимальна.

Решение. Пусть l — данная прямая, а $x_1, \ldots, x_k$ — данные точки. Решаем задачу на минимум:

$$f(x)=|x-x_1|+\ldots+|x-x_k|\to\min$$
$$\text{при условии } g(x)=n\cdot(x-x_0)=0,$$

где x_0 — произвольная точка прямой l, а n — вектор, перпендикулярный этой прямой. Обозначим через u_i вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $x-x_i$. Тогда $f'(x)=u_1+\ldots+u_k$, а $g'(x)=n$. По теореме Лагранжа, в точке минимума вектор $f'(x)$ коллинеарен n, т. е. перпендикулярен прямой l. Таким образом:

Решением задачи служит точка прямой l, для которой сумма проекций на прямую k единичных векторов, направленных из неё в данные точки, равна нулю.

Если из данных k точек есть хотя бы одна, не лежащая на прямой l, то задача имеет единственное решение. Доказать это совсем просто, если использовать приём из задачи 62. Если $k\geqslant 3$, то такая точка, вообще говоря, не строится с помощью циркуля и линейки (вычисление её координаты приводит к уравнению высокой степени). Поэтому в общем случае у нас нет ничего лучшего, чем то описание точки минимума, которое мы привели.

67. Задача о минимальной сумме расстояний от k точек пространства до точки на данной плоскости. В пространстве дана плоскость γ и k точек. Найти (или охарактеризовать) положение точки на плоскости γ, для которой сумма расстояний до данных точек минимальна.

Решение этой задачи ничем не отличается от предыдущей и приводит к похожему ответу:

Минимум достигается в точке x плоскости γ, для которой сумма проекций на плоскость k единичных векторов, направленных из x в данные точки, равна нулю.

68. Среди всех треугольных пирамид данного объёма, имеющих в качестве основания данный правильный треугольник, найти пирамиду с наименьшей суммой длин рёбер. Тот же вопрос про четырёхугольную пирамиду с основанием, совпадающим с данным параллелограммом.

69. В пространстве даны три скрещивающиеся прямые. Как выбрать по точке на каждой из этих прямых так, чтобы треугольник с вершинами в этих точках имел наименьший периметр?

70. Муха летает внутри правильного тетраэдра. Каким мог быть кратчайший путь мухи, если она побывала на каждой грани тетраэдра?

§ 8. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

«Книга Природы написана треугольниками, окружностями и другими геометрическими фигурами, без которых человек не сможет понять в ней ни единого слова».

Галилео Галилей

Выдающийся математик Карл Зигель писал: «По Лейбницу, наш мир является лучшим из всех возможных миров, и потому его законы можно описать экстремальными принципами». В самом деле, многое в природе происходит по законам минимумов и максимумов. И, наверное, поэтому многие геометрические задачи на минимум и максимум имеют наглядный физический смысл. Задача о минимальной длине пути между двумя точками с заходом на прямую линию или задача Снеллиуса могут быть решены с помощью оптики. При этом мы используем главный принцип: свет всегда выбирает путь, на который тратится наименьшее время. Другой принцип использует механику, он гласит:

Механическая система в состоянии, при котором она имеет наименьшую потенциальную энергию, находится в равновесии.

Упрощённо этот закон можно выразить так: механическая система всегда стремится к уменьшению своей потенциальной энергии. Брошенный камень летит вниз, и его потенциальная энергия, равная mgh (здесь m — масса камня, $g\approx 9{,}8$ — ускорение свободного падения, а h — высота камня), при этом уменьшается. Растянутая пружина стремится сжаться к первоначальному состоянию, а значит — уменьшить свою потенциальную энергию. Напомним, что потенциальная энергия пружины равна $kx^2/2$, где x — растяжение пружины (на сколько изменили её длину), а k — коэффициент упругости. Вот как можно применить этот принцип к нескольким классическим задачам.

Задача Фаньяно. Возьмём остроугольный треугольник ABC, стороны которого сделаны из жёсткой проволоки, и натянем на него резиновое кольцо (рис. 31). Предполагаем, что трения нет. Согласно принципу минимума потенциальной энергии, кольцо сожмётся до минимально возможной длины (поскольку его по-

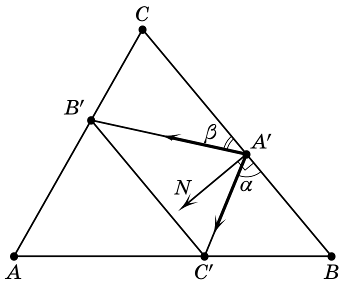

Рис. 31

тенциальная энергия, так же, как и у пружины, равна $kx^2/2$), и в этом положении будет находиться в равновесии. Значит, в положении равновесия периметр треугольника $A'B'C'$ будет наименьшим. Напишем условия равновесия для кольца в точке A'. На него действуют две равные по модулю силы натяжения и сила реакции опоры $\overrightarrow{N}$. Так как трения нет, сила $\overrightarrow{N}$ направлена перпендикулярно прямой BC. Сумма этих трёх сил должна быть равна нулю. В проекции на прямую BC это означает, что $T\cos\alpha = T\cos\beta$, т. е. $\alpha=\beta$. Итак, стороны треугольника наименьшего периметра, вписанного в треугольник ABC, пересекают стороны треугольника ABC под равными углами. Следовательно, это ортотреугольник (см. задачу 11).

Задача о минимальной сумме расстояний до *k* точек. Представим себе, что точки $x_1, \ldots, x_k$ нарисованы на столе. Просверлим в этих точках дырки, через которые пропустим верёвки. К каждой верёвке подвесим груз массой 1 кг, а сверху свяжем верёвки в один узел. Отпустим все грузы. Система через некоторое время придёт в положение равновесия. Считая верёвки невесомыми и пренебрегая трением, попробуем охарактеризовать это положение.

С одной стороны, оно соответствует минимуму потенциальной энергии, а это значит, что сумма расстояний от узла до k данных точек минимальна. В самом деле, выбрав уровень стола за нулевой уровень, получим, что потенциальная энергия каждого груза равна $-mgh_i$ (она будет отрицательна), где h_i — длина i-й верёвки под столом. Поэтому минимальная потенциальная энергия системы соответствует положению, когда сумма длин всех верёвок под столом — наибольшая, а это значит, что сумма их длин над столом — наименьшая (поскольку сумма длин всех верёвок постоянна).

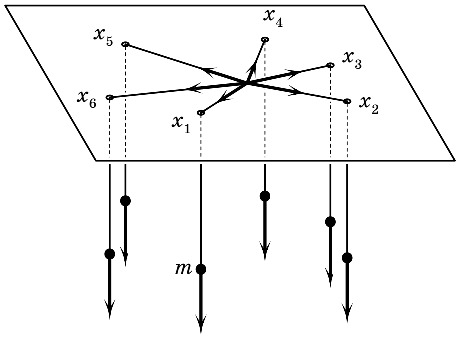

Рис. 32

Итак, в положении равновесия сумма расстояний от узла x до k данных точек минимальна. Если при этом узел застрял в одной из дырок x_i, то минимум суммы расстояний достигается именно в точке x_i. Если же это не так, то сумма сил, действующих на узел со стороны верёвок, равна нулю. Все силы натяжения верёвок равны по модулю, так как все грузики имеют равные массы. Следовательно, сумма равных по длине векторов, направленных из точки x к точкам $x_1, \ldots, x_k$, равна нулю, откуда и следует ответ. В частности, при $k=3$ получаем точку Торричелли.

Изопериметрическая задача. Возьмём прямоугольный лист бумаги и склеим из него цилиндр. Поставим цилиндр вертикально на гладкую плоскость и нальём в него воду. Будем считать, что вода не просачивается между плоскостью и цилиндром. Что произойдёт? Ясно, что основание цилиндра под действием воды примет круглую форму, поскольку давление воды на стенки во все стороны одинаково. С другой стороны, для того, чтобы потенциальная энергия была минимальна, центр тяжести налитой воды должен занять самое низкое положение. Центр тяжести цилиндра располагается на середине его высоты, проведённой из центра основания, значит, высота уровня воды должна быть минимальной. Высота равна объёму, делённому на площадь основания. Объём — постоянный, поэтому площадь основания должна быть наибольшей. Итак, наибольшая площадь основания соответствует кругу.

Вплоть до начала XX века физическое решение считалось вполне достаточным для математической задачи. По крайней мере, физические соображения позволяют забыть о проблеме существования решения, которая подчас бывает чрезвычайно сложна. Теперь, конечно, одной физической интерпретацией не обойтись. Каждая математическая задача должна иметь математическое решение! Хотя бы потому, что физика во многом уповает на интуицию, на представления человека об окружающей природе. А интуиция не раз подводила математиков. И всё же нельзя не восхититься взаимосвязью вещей в природе, когда сложная задача может быть объяснена наглядно, с позиции обычного здравого смысла! А кроме того, физические соображения помогают угадать правильный ответ (который потом, конечно же, придётся строго математически обосновать).

Как получить вписанный шарнирный многоугольник? Обратимся к задаче 52. Для любого шарнирного k-угольника существует единственное положение, при котором он вписан в окружность. Причём в этом положении он имеет максимальную площадь. Как найти это положение, т. е. найти углы многоугольника или радиус описанной окружности? Оказывается, при $k \geqslant 5$ решить эту задачу можно лишь приближённо. Например, нахождение радиуса описанной окружности приводит к уравнению

$$\arcsin\frac{a_1}{2R} + \ldots + \arcsin\frac{a_k}{2R} = \pi.$$

Здесь $a_1, \ldots, a_k$ — данные стороны k-угольника. Это уравнение можно решить приближённо (или, как говорят математики, численно) с помощью компьютера. Но ни получить точного решения, ни построить такой многоугольник с помощью циркуля и линейки в общем случае не удастся.

Физические соображения предлагают следующий практический способ решения. Из жёстких прямоугольных листов картона одинаковой высоты, но разной ширины, склеим прямую призму так, чтобы углы между боковыми гранями могут свободно меняться. Поставим её вертикально на гладкую плоскость и нальём в неё воду. Тогда основание призмы примет форму вписанного многоугольника. Читатель сам без труда докажет это, пользуясь результатом задачи 52.

71. Придумайте физические интерпретации задачи о минимальной сумме расстояний от точки прямой до k данных точек, а также задач 33, 56, 61, 63, 64, 69.

72. Объясните физическую интерпретацию задачи о сетях Штейнера как формы мыльной плёнки, натянутой между гвоздями. Почему если сетей Штейнера несколько, то мыльная плёнка может принять форму любой из них, а не только самой короткой?

§ 9. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

«Чистые теоремы о существовании служили в действительности важнейшими вехами развития нашей науки».

Давид Гильберт

Теоремы существования по праву входят в число высших достижений математики. Порой гораздо легче доказать, что объект обладает какими-нибудь замечательными свойствами, чем доказать, что он вообще существует. Как мы видели на примере изопериметрической задачи, именно вопрос о существовании подчас бывает наиболее важным во всём доказательстве. Такие теоремы, как правило, очень красивы, но вместе с тем и трудны. Достаточно вспомнить, что наиболее сложные проблемы современной математики, например, недавно доказанные великая теорема Ферма и гипотеза Пуанкаре, а также не доказанные и не опровергнутые до сих пор гипотеза близнецов и гипотеза «$P = NP$», являются проблемами существования.

Задачи на минимум и максимум часто помогают доказать теоремы существования, причём в самих теоремах ни о каких минимумах и максимумах может и не упоминаться. Идея довольно проста: точка или фигура, дающая решение экстремальной задачи, обладает некоторыми специальными свойствами. Поэтому, решив экстремальную задачу, мы тем самым доказываем, что объект с такими свойствами существует. Приведём здесь два примера, взятых из разных областей математики. Первый — из выпуклого анализа, второй — из теории динамических систем.

Теорема Минковского—Радона. Внутри любой ограниченной выпуклой фигуры на плоскости найдётся точка M, обладающая следующим свойством: любая хорда фигуры, проходящая через M, делится этой точкой в отношении, не превосходящем двух, т. е. если через M провести произвольную прямую, пересекающую фигуру по отрезку KL, то отношение большего из двух отрезков KM, LM к меньшему не превосходит двух.

Доказательство. Из всех треугольников ABC с вершинами на границе фигуры Ф выберем треугольник наибольшей площади. Тогда точка пересечения медиан этого треугольника — искомая.

Для доказательства проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам. Они образуют треугольник $A'B'C'$, для которого точки A, B и C являются серединами сторон (рис. 33). Докажем, что треугольник $A'B'C'$ содержит фигуру Ф. Если это не так, то на границе Ф найдётся точка P, лежащая вне этого треугольника, а это значит, что отрезок MP пересекает одну из сторон треугольника $A'B'C'$ (пусть это сторона $A'B'$). Тогда площадь треугольника ABP будет больше площади треугольника ABC (у них сторона AB — общая, а высота, опущенная на эту сторону, у треугольника ABP больше). Это невозможно, так как треугольник ABC имеет наибольшую площадь среди всех треугольников, вписанных в фигуру Ф.

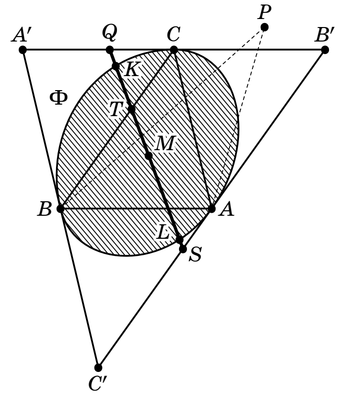

Рис. 33

Далее всё просто. Произвольная прямая, проходящая через точку M, пересекает фигуру Ф по отрезку KL. Пусть она также пересекает отрезок BC в точке T, а отрезок $B'C'$ — в точке S (рис. 34). Из подобия треугольников MTC и MSC следует равенство $MS = 2MT$. Далее, $MS \geqslant ML$ и $MT \leqslant MK$, то $ML \leqslant 2MK$. Так же доказывается, что и $MK \leqslant 2ML$.

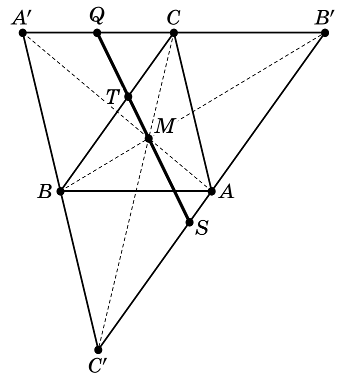

Рис. 34

Для следующего примера нам понадобится понятие гладкой кривой. Кривая на плоскости называется *гладкой*, если в каждой её точке можно провести единственную касательную. У гладкой кривой нет вершин и заострений. Например, многоугольник не является гладким, а вот окружность, эллипс, гипербола — гладкие. Если функция одной переменной имеет производную в каждой точке, то её график — гладкая кривая. Гладкая замкнутая кривая на плоскости может быть задана уравнением $g(x)=0$, где функция g имеет производную в каждой точке.

Теорема Биркгофа о замкнутом биллиарде. Для произвольной гладкой замкнутой кривой на плоскости, ограничивающей выпуклую фигуру, существует биллиард с k вершинами, где $k \geqslant 3$ — произвольное число.

Напомним, что биллиардом называется многоугольник с вершинами на данной кривой, любые две соседние стороны которого образуют с кривой равные углы. Так, ортотреугольник является биллиардом для треугольника. Биллиард также можно интерпретировать как замкнутую траекторию луча света внутри кривой.

Доказательство. Рассмотрим множество всех k-угольников с вершинами на данной кривой. При этом позволим вершинам совпадать друг с другом. Среди этих многоугольников найдём тот, который имеет максимальный периметр. Он и является биллиардом. Для доказательства заметим сначала, что он имеет ровно k различных вершин, а не меньше (в противном случае добавим несколько недостающих вершин, периметр от этого только увеличится). Возьмём теперь три соседние вершины x_1, x_2, x_3 и обозначим через l касательную к кривой в точке x_2. Так как наш многоугольник имеет наибольший периметр, то максимум функции $f(x)=|x-x_1|+|x-x_3|$ на дуге x_1x_3 нашей кривой достигается в точке x_2. Значит точка x_2 является решением задачи

$$f(x)=|x-x_1|+|x-x_3|\to\max \quad \text{при условии } g(x)=0.$$

Согласно теореме Лагранжа, векторы $g'(x_2)$ и $f'(x_2)$ коллинеарны. Вектор $g'(x_2)$ перпендикулярен касательной l, а $f'(x_2)=u_1+u_3$, где u_1 — единичный вектор, направленный из точки x_1 в x_2, а u_3 — единичный вектор, направленный из x_3 в x_2. Сумма этих векторов должна быть перпендикулярна l, следовательно, они образуют равные углы с l, что и требовалось доказать.

Надо заметить, что гладкость кривой в теореме Биркгофа существенна! Например, кривая, ограничивающая тупоугольный треугольник, не имеет треугольного биллиарда. Почему? Если треугольник имеет биллиард из трёх вершин, то эти вершины лежат в основаниях высот, а для тупоугольного треугольника два основания из трёх лежат вне треугольника.

73. Мы видели, что вписанный k-угольник максимального периметра является биллиардом. Однако для остроугольных треугольников биллиард (треугольный) соответствует не максимальному, а минимальному периметру (задача Фаньяно). Как объяснить это противоречие?

74. Стороны всех k-угольных биллиардов эллипса касаются некоторого фиксированного эллипса.

75. В выпуклую фигуру площади S всегда можно вписать треугольник площади большей, чем $S/4$. Вокруг неё всегда можно описать треугольник площади меньшей, чем $4S$.

76. Сформулируйте и докажите теорему Минковского—Радона для выпуклого тела в пространстве.

77 (Я. Бринкхаус). Для любой тройки попарно скрещивающихся прямых в пространстве существует единственная тройка точек A, B и C (по одной на каждой прямой), обладающая таким свойством: каждая из трёх прямых образует равные углы с двумя соответствующими сторонами треугольника ABC (прямые AB и AC образуют равные углы с прямой, проходящей через точку A, и т. д.)

78 (Е. С. Горская). Дан шарнирный пространственный четырёхугольник $ABCD$, длины сторон которого фиксированы, а углы можно менять. Тогда существует такое положение этого четырёхугольника, при котором двугранные углы тетраэдра $ABCD$ при рёбрах AC и BD — прямые.

Подсказка. Максимизируйте объём тетраэдра $ABCD$.

79. Любое движение трёхмерного пространства, имеющее неподвижную точку, имеет и неподвижную прямую.

Подсказка. Считаем, что движение A оставляет на месте начало координат. Рассмотрите задачу $(Ax)\cdot x\to\max$ при условии $|x|=1$ и воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

§ 10. ЕЩЁ НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ

Мы познакомились с основными приёмами решения геометрических задач на максимум и минимум. Предлагаем вам теперь сводный раздел, в котором собрано несколько красивых, хотя и довольно сложных задач. Какую из задач каким методом решать — выбирать вам.

80 (Американская математическая олимпиада, 1979 г.). Через данную точку M, лежащую внутри угла, провести отрезок AB с концами на сторонах угла так, чтобы величина $\dfrac{1}{MA}+\dfrac{1}{MB}$ была наибольшей.

81 (Международная математическая олимпиада, 1980 г.). Найти точку P внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от P до этих сторон минимальна.

82. Охарактеризуйте положение точки внутри данного многоугольника, для которой произведение расстояний до сторон многоугольника максимально.

Эта точка называется *аналитическим центром* многоугольника. Понятие аналитического центра появилось относительно недавно (в конце 1980-х годов), оно активно используется в теории экстремальных задач. Как найти аналитический центр треугольника? Четырёхугольника?

83 (И. Ф. Шарыгин). Дана окружность с диаметром AC и точка M, лежащая на AB. Проведите через M хорду BD так, чтобы площадь четырёхугольника $ABCD$ была наибольшей.

84 (И. Ф. Шарыгин). Внутри угла с вершиной K даны точки M и C. Проведите через точку M отрезок AB с концами на сторонах угла таким образом, чтобы площадь четырёхугольника с вершинами в точках K, A, B и C была наименьшей.

85 (Ю. В. Нестеренко). Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 1. Найдите наименьшее расстояние между точками двух окружностей, одна из которых вписана в квадрат $ABCD$, а другая описана около треугольника $BC'D'$.

86 (И. Ф. Шарыгин). Муха летает внутри правильного тетраэдра. Каким мог быть кратчайший замкнутый путь мухи, если она побывала на каждой грани тетраэдра?

87 (Соросовская олимпиада, Россия, 1997 г.). Даны три положительных числа a, b и c. Какова наибольшая возможная площадь прямоугольного треугольника, если известно, что расстояния от его вершин до некоторой точки плоскости равны a, b и c (a — расстояние до вершины прямого угла)?

Приложение А. Компактность и теорема Вейерштрасса

Метрическим пространством называется множество X, на котором задана *метрика*: каждой паре элементов (точек) $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, которое называется *расстоянием* между точками x и y и обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ для любых $x, y, z \in X$.

Прямая, плоскость и пространство являются метрическими пространствами, метрика на них определена обычным (евклидовым) расстоянием между точками. Пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n определяется как множество упорядоченных наборов из n чисел: $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Числа $x^1, \ldots, x^n$ называются *координатами* точки x. Пространство $\mathbb{R}^n$ также является метрическим пространством: в нём

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}.$$

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ точек метрического пространства X *сходится* к точке x, если $\rho(x_k, x) \to 0$ при $k \to \infty$.

Подмножество M метрического пространства X называется *компактным*, если из любой последовательности точек множества M можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества M.

Функция f, заданная на подмножестве M метрического пространства X, называется *непрерывной*, если для любой последовательности точек $x_1, x_2, \ldots$, лежащей в M и сходящейся к некоторой точке $x \in M$, последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots$ сходится к $f(x)$.

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная функция на компактном множестве ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения в некоторых точках этого множества.

Как проверить, является ли множество компактным? Часто помогает следующий критерий, для формулировки которого нам понадобится ещё несколько определений. Последовательность элементов метрического пространства $x_1, x_2, \ldots$ называется *фундаментальной*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N такое, что $\rho(x_m, x_k) < \varepsilon$ для любых чисел k и m, бо́льших, чем N. Подмножество M метрического пространства называется *замкнутым*, если любая фундаментальная последовательность, лежащая в M, сходится к некоторой точке множества M. Так, отрезок прямой замкнут, а интервал или полуинтервал — нет. Конечное подмножество $\{z_1, \ldots, z_m\}$ метрического пространства X называется *ε-сетью* для подмножества M, если для любой точки $x \in M$ найдётся точка z_i, для которой $\rho(z_i, x) < \varepsilon$.

Критерий компактности. Подмножество метрического пространства компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и для него существует ε-сеть при любом $\varepsilon > 0$.

Мы оставим без доказательства критерий компактности и теорему Вейерштрасса. Заинтересованный читатель может найти доказательства в учебниках по математическому анализу, например, в [6]. Пока же установим два полезных следствия.

Следствие 1. Замкнутое и ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ компактно.

Доказательство. В силу критерия компактности нам достаточно построить ε-сеть для каждого ε. Так как множество ограничено, координаты всех его точек по модулю не превосходят некоторого числа R. Рассмотрим множество, состоящее из всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых по модулю не превосходят R и являются десятичными дробями с не более чем k значащими цифрами после запятой. Это конечное множество является $\sqrt{n}/10^k$-сетью. Остаётся выбрать настолько большое k, чтобы число $\sqrt{n}/10^k$ было меньше ε.

Следствие 2. Если функция от n переменных непрерывна и стремится к $+\infty$, когда хотя бы одна из переменных стремится к бесконечности, то она достигает своего минимума в некоторой точке.

Доказательство. Возьмём любую точку $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и обозначим $a = f(x_1)$. По условию, найдётся такое число R, что если хотя бы одна из координат точки x по модулю больше R, то $f(x) > a$. Обозначим через I множество, состоящее из всех точек с координатами, по модулю не превосходящими R. Множество I ограничено и замкнуто, и значит, по следствию 1, компактно. По теореме Вейерштрасса, функция f достигает на нём своего минимума в некоторой точке x_0. Она будет точкой минимума функции f не только на множестве I, но и на всём пространстве $\mathbb{R}^n$, поскольку за пределами множества I значения функции больше, чем $a = f(x_1) \geqslant f(x_0)$.

С помощью следствия 2 можно доказать существование минимума в большинстве задач, которые мы разбирали. А две наиболее трудные в этом отношении задачи разберём отдельно, в приложении Б.

Приложение Б. Доказательство существования в задаче Штейнера и в изопериметрической задаче

Задача Штейнера о кратчайшей системе дорог. Докажем существование кратчайшей системы дорог, связывающей k точек плоскости $A_1, \ldots, A_k$ (для простоты вновь проведём все рассуждения для плоскости).

Как мы уже установили, достаточно рассматривать только односвязные графы, которые содержат данные точки в качестве вершин и могут иметь дополнительные вершины, причём из каждой дополнительной вершины выходит не менее трёх рёбер. Докажем, что на самом деле можно ограничиться графами, у которых из каждой вершины выходит не более трёх рёбер. В самом деле, если найдётся вершина A, из которой выходит не менее четырёх рёбер, то какие-то два ребра (назовём их AB и AC) образуют угол меньше 120°, а значит, эту пару рёбер можно заменить так, чтобы общая длина графа уменьшилась: ставим дополнительную вершину T и заменяем пару рёбер AB, AC на три ребра AT, BT и CT. Если все углы треугольника ABC меньше 120°, то в качестве T берём точку Торричелли треугольника ABC, а если, скажем, $\angle ABC \geqslant 120^\circ$, то берём любую точку T, достаточно близкую к вершине B. В обоих случаях после замены общая длина рёбер уменьшится. При этом возникнет одна дополнительная вершина, из которой выходит три ребра, количество рёбер, выходящих из A, уменьшится на единицу, а выходящих из других вершин — не изменится. Далее вновь берём любую вершину, из которой выходит более трёх рёбер, и делаем то же самое. После конечного числа шагов не останется ни одной вершины с более чем тремя рёбрами. Общая длина графа при этом уменьшится.

Итак, из каждой вершины выходит не более трёх рёбер. Значит, из каждой дополнительной вершины выходит ровно три ребра. Далее, из каждой вершины $A_1, \ldots, A_k$ выходит по крайней мере по одному ребру. Пусть d — число дополнительных вершин. Так как каждое ребро соединяет две вершины, общее число рёбер не меньше $\frac{k+3d}{2}$. С другой стороны, число рёбер равно $k+d-1$. Действительно, так как граф односвязный, то для любой его вершины существует единственный путь, соединяющий её с вершиной A_1. Поставив в соответствие этой вершине последнее ребро пути, получим взаимно однозначное соответствие между рёбрами и вершинами (без участия A_1). Значит, в графе ровно $k+d-1$ рёбер. Итак,

$$k+d-1 \geqslant \frac{k+3d}{2},$$

откуда $d \leqslant k-2$. Таким образом, в графе всего от k до $2k-2$ вершин. Каждая из вершин имеет 2 координаты, поэтому граф можно интерпретировать как точку в пространстве $\mathbb{R}^{4k-4}$. Точку A_1 помещаем в начало координат. Функция f — сумма длин рёбер графа — непрерывна и стремится к $+\infty$, если хотя бы одна из вершин стремится к ∞. Согласно следствию 2, функция f достигает своего минимума. Это значит, что существует граф с наименьшей суммой длин рёбер.

Изопериметрическая задача. Нужно доказать, что среди всех фигур периметра l найдётся фигура максимальной площади. Так как любую фигуру периметра l можно поместить в квадрат со стороной l, считаем, что наша фигура лежит внутри фиксированного квадрата со стороной l.

Рассмотрим множество всех компактных подмножеств этого квадрата и введём на нём *метрику Хаусдорфа*. Расстоянием между компактными множествами A и B называется максимальная из двух величин $\max\limits_{x \in A} \rho(x, B)$ и $\max\limits_{y \in B} \rho(y, A)$, где $\rho(x, B)$ — расстояние от точки x до множества B, т. е. до ближайшей к x точке множества B. Итак, мы берём точку множества A, наиболее удалённую от множества B, и точку B, наиболее удалённую от A. Максимум из этих двух расстояний и называется расстоянием между множествами A и B. Читатель без труда проверит, что так определённое расстояние удовлетворяет трём условиям метрики. Получаем метрическое пространство, состоящее из всех компактных подмножеств квадрата.

Рассмотрим подмножество M этого метрического пространства, состоящее из всех фигур периметра l. К сожалению, множество M не компактно, и даже не замкнуто. Чтобы обойти эту трудность, покажем, что можно ограничиться только выпуклыми фигурами периметра l.

Для любой фигуры A рассмотрим её *выпуклую оболочку* $\overline{A}$. По определению, $\overline{A}$ — это наименьшая выпуклая фигура, содержащая A. Если фигура A выпукла, то $\overline{A}=A$. Выпуклая оболочка состоит из точек всевозможных отрезков, соединяющих точки фигуры A (рис. 35). Площадь $\overline{A}$ не меньше площади A, поскольку выпуклая оболочка содержит в себе саму фигуру. Кроме того, периметр $\overline{A}$, напротив, не превосходит периметра A. Это свойство мы не будем доказывать (доказательство можно найти, например, в [3]), заметим только, что оно достаточно естественно. При взятии выпуклой оболочки на границе фигуры вместо каждой «вмятины» возникает отрезок, который имеет меньшую длину. Таким образом, мы заменяем каждую невыпуклую фигуру её выпуклой оболочкой, при этом периметр уменьшается, а площадь увеличивается. Теперь увеличим фигуру преобразованием подобия так, чтобы её периметр снова стал равен l, при этом её площадь ещё более возрастёт. Получается, что мы можем заменить любую невыпуклую фигуру выпуклой того же периметра и бо́льшей площади. Итак, можно ограничиться множеством выпуклых фигур периметра l. Теперь — ключевое место в доказательстве! Множество выпуклых фигур данного периметра l, лежащих внутри данного квадрата, компактно. Во-первых, это множество замкнуто. Если последовательность выпуклых фигур периметра l стремится к некоторой фигуре, то предельная фигура также выпукла и имеет тот же периметр. В силу критерия компактности, достаточно для любого $\varepsilon>0$ построить ε-сеть.

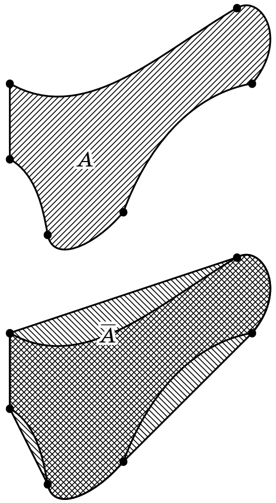

Рис. 35

Для этого разобьём наш квадрат на N^2 равных квадратиков и рассмотрим множество всех фигур, состоящих из какого-то числа таких квадратиков. Это множество является $l\sqrt{2}/N$-сетью для множества выпуклых фигур. Для доказательства достаточно каждой выпуклой фигуре поставить в соответствие фигуру, составленную из всех квадратиков, которые она пересекает. Расстояние между этими фигурами не превосходит $l\sqrt{2}/N$. Остаётся взять достаточно большое N так, чтобы $l\sqrt{2}/N<\varepsilon$.

Так как при фиксированном периметре площадь непрерывно зависит от выпуклой фигуры, то из теоремы Вейерштрасса следует существование фигуры наибольшей площади.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986.

[2] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.

[3] Бляшке В. Круг и Шар. — М.: Наука, 1967.

[4] Болтянский В. Г., Яглом И. М. Геометрические задачи на максимум и минимум. // Энциклопедия элементарной математики: кн. 5. — М.: Наука, 1966. — с. 270—348.

[5] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.

[6] Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ