НАМ 5 ЛЕТ

МАГАЗИН «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА» В МЦНМО

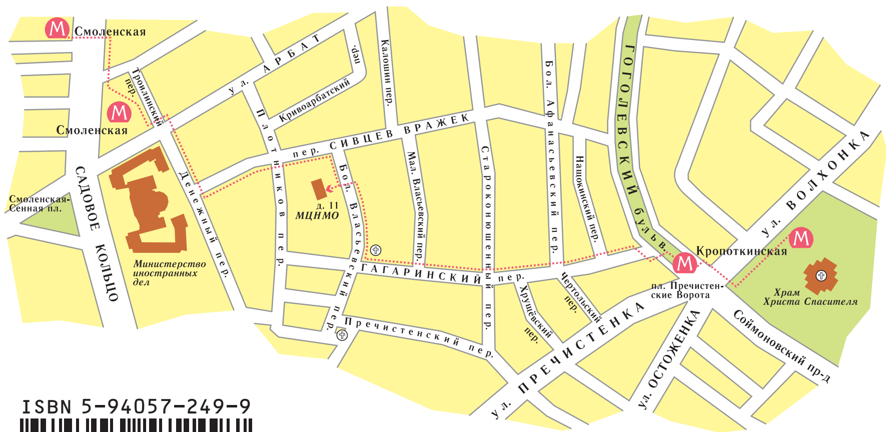
В магазине представлен наиболее полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Эти книги продаются по издательским ценам. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств Физматлит, Факториал, УРСС, Мир, РХД, Лань, Просвещение, АСТ, Бином ЛЗ и др.

В отделе школьной литературы представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков.

В отделе вузовской и научной литературы можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков. В магазине также имеется отдел «книга—почтой».

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья (летом — кроме субботы и воскресенья) с 11^{30} до 20^{00}. Перерывы с 13^{30} до 13^{50} и с 16^{30} до 16^{50}.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд: ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком (см. схему).



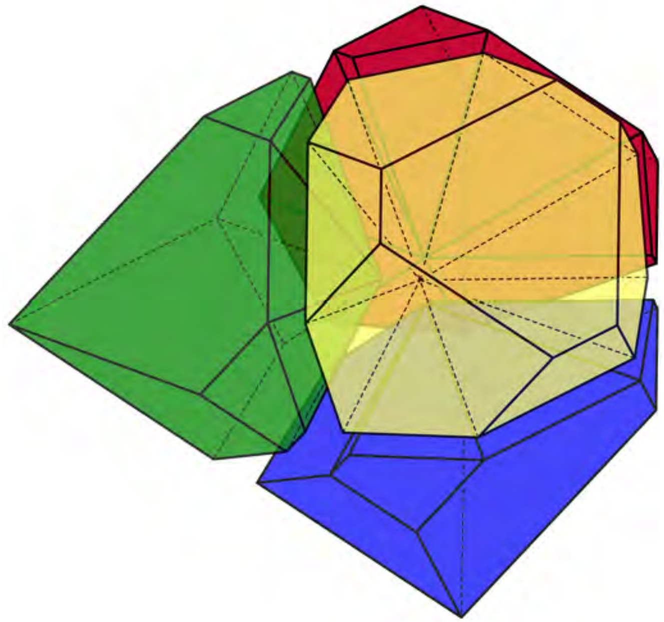
ISBN 5-94057-249-9
9 785940 572497

Телефон: (495) 241–72–85
E-mail: biblio@mccme.ru
http://biblio.mccme.ru/

Библиотека
«Математическое просвещение»

А. М. Райгородский

ПРОБЛЕМА БОРСУКА



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2006

Серия основана в 1999 году

Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 33

А. М. Райгородский

ПРОБЛЕМА БОРСУКА

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2006

УДК 519.1+514.174
ББК 22.135
Р12

Аннотация

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором 4 декабря 2004 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов. В ней рассказывается об одной из знаменитых задач комбинаторной геометрии — гипотезе Борсука, которая утверждает, что в n-мерном пространстве всякое ограниченное множество можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра. Вначале подробно анализируются случаи малых размерностей и доказывается, что при $n=1, 2, 3$ гипотеза верна. Далее приводятся различные оценки сверху для числа Борсука в зависимости от размерности. Кроме того, рассматривается связь гипотезы с другими проблемами и задачами комбинаторной геометрии (проблема освещения, задача Грюнбаума, задача о хроматическом числе). В заключительных главах рассматриваются контрпримеры к гипотезе Борсука и история понижения минимальной размерности, в которой строится контрпример, а также улучшения оценки снизу.

Многие главы снабжены задачами. Некоторые из них — это упражнения, прорешав которые, читатель лучше прочувствует материал. На некоторые задачи опирается основной текст. Сложные задачи отмечены звёздочками (некоторые являются открытыми проблемами).

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей. От читателя потребуется знание элементарных понятий комбинаторики, а, кроме того, будет полезным (но не обязательным) знакомство с аналитической геометрией и началами анализа.

Андрей Михайлович Райгородский

Проблема Борсука

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2006. — 56 с.: ил.

Редакторы *Д. Вельтищев*, *Т. Караваева*, *Ю. Кузнецова*, *М. Вельтищев*
Рисунки выполнил *Д. Вельтищев* Техн. редактор *М. Вельтищев*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 21/VII 2006 года. Формат бумаги 60×88 1/16. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 3,5. Тираж 2000 экз. Заказ .

Брошюра соответствует гигиеническим требованиям к учебным изданиям для общего и начального профессионального образования (заключение государственной санитарно-эпидемиологической службы Российской Федерации № 77.99.02.953.Д.003873.06.04 от 2/VI 2004 года).

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241-72-85, (495) 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554-21-86.

ISBN 5-94057-249-9

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой брошюре мы бы хотели познакомить читателя с одной из наиболее известных, красивых и интригующих задач современной комбинаторной геометрии. Эта задача была предложена в 1933 году замечательным польским математиком Каролем Борсуком*), и за прошедшие 70 лет она сделалась едва ли не самой популярной в своей области. Собственно говоря, комбинаторная геометрия как раз и сформировалась на основе таких ярких задач, как задача о хроматическом числе или, скажем, задача Хелли. И, разумеется, проблема Борсука сыграла в процессе формирования данного раздела математики одну из главных ролей. Именно поэтому мы не станем обсуждать здесь сам термин «комбинаторная геометрия», тем более что мы уже достаточно подробно комментировали его в брошюре «Хроматические числа» (см. [1]). Заметим только, что и геометрия, и комбинаторика будут сопутствовать нам на протяжении всего повествования, а стало быть, в конечном счёте и комментарии окажутся излишними.

Вообще, история проблемы Борсука носит весьма драматический и в чём-то почти детективный характер. Более того, эта проблема удивительно тонким, изящным и вместе с тем неожиданным образом связана с уже упоминавшейся задачей о хроматическом числе. Обо всём этом нам предстоит постепенно узнать, но в своё время. Сперва нам следует понять, в чём же состоит вопрос Борсука — вопрос, которому суждено было оказать столь существенное влияние на развитие современной науки.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Мы поступим следующим образом: сначала сформулируем задачу, а затем тщательно откомментируем формулировку, содержащую несколько тонких моментов и незнакомых понятий.

Проблема Борсука. *Найти минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество в пространстве.*

По-видимому, наиболее непонятным кажется слово «диаметр», применённое не к кругу или шару, а к произвольному множеству. Однако на самом деле неясностей гораздо больше, так что обо всём по порядку.

*) Кароль Бо́рсук (8 мая 1905 г. — 24 января 1982 г.) — выдающийся польский математик. Ему принадлежат многочисленные результаты по топологии, дифференциальной геометрии и пр. Его именем даже названа улица в Варшаве.

Прежде всего, что мы понимаем под *пространством*? Вообще говоря, вопрос этот нетривиален, и мы оставим в стороне исчерпывающий ответ на него. Мы пока ограничимся рассмотрением лишь тех ситуаций, которые входят в обычную школьную программу. Но и на этом пути сразу же возникает недоразумение. Действительно, кто ж из нас не знает, что такое пространство? Достаточно поглядеть вокруг себя. Тонкость в том, что математика, будучи наукой, безусловно, живой, тем не менее зачастую использует термины, знакомые нам из повседневной жизни, для обозначения тех объектов, которые мы либо привыкли называть по-другому, либо и вовсе не встречали. В этом состоит элемент абстракции, присущий математике. В нашем случае всё совсем не страшно: просто мы называем пространством, в зависимости от контекста, не только трёхмерное пространство, в котором мы живём, но и плоскость, и прямую. Это разумно, поскольку вполне можно представить себе, например, существо, которое всю жизнь ползает по плоскости и третьего измерения видеть не способно. Для него и плоскость — пространство. При этом, как мы хорошо понимаем, наше пространство трёхмерно, пространство упомянутого существа двумерно, а на прямой только одно измерение. Таким образом (по числу измерений) мы пространства и отличаем.

Будем обозначать прямую через $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$, плоскость — через $\mathbb{R}^2$, а трёхмерное пространство — через $\mathbb{R}^3$. Проще всего мыслить об этих объектах так: $\mathbb{R}$ — это множество всевозможных вещественных (действительных) чисел, $\mathbb{R}^2$ — это множество пар $\vec{x}=(x_1, x_2)$ чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}^3$ — множество троек $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, где $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ясно, что пары из $\mathbb{R}^2$ и тройки из $\mathbb{R}^3$ — это то, что мы называем *векторами* или *точками* в соответствующих пространствах. В свою очередь, элементы пар и троек (числа x_1, x_2, x_3) суть координаты наших векторов.

Далее, а что такое п р о и з в о л ь н о е множество в пространстве? Конечно, каждый из нас может вообразить себе уйму разных множеств. Скажем, это могут быть и конечные наборы точек, и какие-нибудь фигуры (если речь идёт о двумерном пространстве) или тела (если мы говорим о трёхмерье), и многое, многое другое (см. рис. 1).

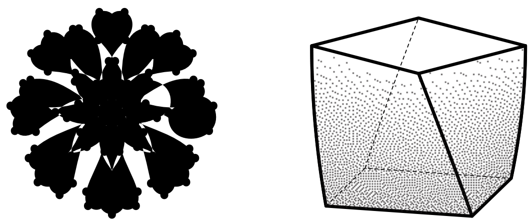


Рис. 1

Небольшая неприятность состоит в том, что иной раз в науке возникают чрезвычайно хитрые множества, которые и описать-то толком не удаётся. Мы не станем забираться здесь в теоретико-множественные дебри, так как ничего нового нам это не принесёт. Взамен мы предложим читателю представлять себе те множества, какие он сам посчитает возможным. Без сомнения, этого уже хватит с запасом, ведь, как мы увидим позже, даже с конечными наборами векторов возиться весьма и весьма непросто.

Теперь об ограниченности множеств. Пусть $n \leqslant 3$. Множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует отрезок (при $n=1$), круг (при $n=2$) или шар (при $n=3$), целиком содержащий множество $\mathscr{A}$.

Наконец, очередь дошла и до диаметра. Естественно, дабы определить его, мы должны уметь измерять расстояния. Соответствующие формулы всем хорошо известны:

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

коль скоро $\vec{x}=(x_1, x_2)$, $\vec{y}=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, и

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

в аналогичных обозначениях для $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. На прямой всё совсем просто.

Зафиксируем произвольное ограниченное множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ при $n \leqslant 3$. Будем перебирать всевозможные пары точек $\vec{x}, \vec{y} \in \mathscr{A}$ и измерять расстояния между ними. Получится некоторый (не исключено, что бесконечный) набор чисел. Нам бы х о т е л о с ь найти в нём максимальный элемент и назвать его диаметром множества $\mathscr{A}$. В самом деле, такое определение диаметра вполне коррелировало бы с общеизвестным: и для круга, и для шара диаметр — это расстояние между максимально удалёнными друг от друга точками. К сожалению, всё не так легко. Представим себе, что $\mathscr{A}=(a, b) \subset \mathbb{R}$ — это обычный интервал. Рассмотрим в нём пары точек вида $a+1/k$, $b-1/k$. Понятно, что с увеличением k расстояние между точками становится всё ближе и ближе к $b-a$. Однако в $\mathscr{A}$ н е т точек, расстояние между которыми в точности равнялось бы $b-a$. Стало быть, искомый максимум не существует. Если знать теорию пределов, то трудность ничего не стоит преодолеть, заменяя максимум на так называемый *супремум* (точную верхнюю грань). Мы не станем вдаваться здесь в подобные детали. С одной стороны, как правило, и без того ясно, чем заменить максимум, коль скоро его найти не удалось (скажем, для интервала диаметр — это всё равно его длина), а с другой стороны, можно опять-таки ограничиться изучением только тех множеств, для которых такой проблемы нет (см. задачи).

Итак, диаметр множества — это, говоря не совсем строго, расстояние между наиболее удалёнными его точками. Понятно, что у ограниченного множества диаметр всегда конечен. Будем обозначать диаметр множества $\mathscr{A}$ через $\operatorname{diam}\mathscr{A}$.

Вернёмся к проблеме Борсука и попробуем проинтерпретировать её с учётом накопленной информации. Пусть дано какое-то множество $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^n$, где $n\leqslant 3$. Попытаемся представить $\mathscr{A}$ в виде

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\ldots\cup\mathscr{A}_f,$$

предполагая, что $\operatorname{diam}\mathscr{A}_i<\operatorname{diam}\mathscr{A}$ для каждого i, $1\leqslant i\leqslant f$. Обозначим через $f(\mathscr{A})$ минимум среди всех f, для которых такое представление имеет место. Понятно, что $f(\mathscr{A})$ — это и есть минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито*) множество $\mathscr{A}$. Определим $f(n)$ как максимум по всем $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^n$ величин $f(\mathscr{A})$. В свою очередь, на $f(n)$ частей меньшего диаметра разбивается уже произвольное ограниченное множество в n-мерном пространстве, причём существует такое множество в $\mathbb{R}^n$, которое нельзя разбить на $f(n)-1$ часть. Таким образом, проблема Борсука состоит в отыскании числа $f(n)$.

1. Является ли ограниченным множество всех целых чисел на прямой?

2. Найдите диаметры множеств, изображенных на рис. 2.

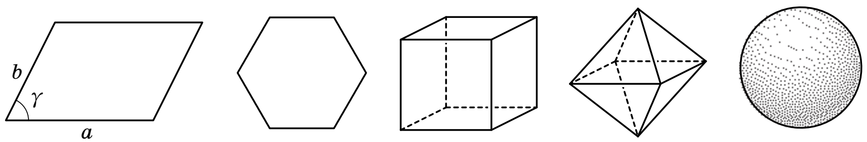


Рис. 2

3. Разбейте множества с рис. 2 на части меньшего диаметра. Постарайтесь сделать это максимально экономно.

4. Докажите, что величина $f(n)$ не изменится, если вместо произвольных ограниченных множеств разбивать произвольные множества фиксированного диаметра — например, диаметра 1.

5*. Множество в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит соединяющий их отрезок. Докажите, что величина $f(n)$ не изменится, если вместо произвольных ограниченных множеств разбивать произвольные ограниченные выпуклые множества.

*) Вообще говоря, для пущей корректности следовало бы потребовать, чтобы множества $\mathscr{A}_i$ попарно не пересекались. Иначе не совсем правильно употреблять слово «разбиение». Однако несложно проверить, что упомянутое дополнительное требование никак не влияет на $f(\mathscr{A})$.

3. ПРОБЛЕМА БОРСУКА НА ПРЯМОЙ

Сейчас мы попробуем разобраться с тем, как поэкономнее разбивать на части меньшего диаметра одномерные множества. Иными словами, мы постараемся определить значение $f(1)$.

Для начала заметим, что неравенство $f(1)\geqslant 2$ практически очевидно. В самом деле, нелепо же пытаться разбить какое-либо множество на о д н у часть меньшего диаметра. Это то, что принято называть «contradictio in adjecto», т. е. противоречие внутри определения. Мы, однако, утверждаем большее, а именно: $f(1)\leqslant 2$, так что в конечном счёте $f(1)=2$. Если мы наше утверждение докажем, то проблема Борсука на прямой будет решена.

Рассмотрим произвольное (ограниченное) множество $\mathscr{A}$ в $\mathbb{R}$. Мы ничего, по сути, не потеряем, если будем полагать $\operatorname{diam}\mathscr{A}=1$ (см. задачу 4 из предыдущей главы). Возьмём в множестве $\mathscr{A}$ «крайнюю левую» и «крайнюю правую» точки. Конечно, кавычки не случайны, ведь, как мы уже знаем, такие точки вовсе не обязаны существовать. Например, если речь идёт об интервале (a, b), то мы возвращаемся к ситуации, когда точки $a+1/k$ и $b-1/k$ с увеличением k становятся всё ближе и ближе к «краям», краёв этих ни при каких условиях не достигая. Интуитивно смысл «крайних точек» понятен, а для строгости нужно опять-таки сослаться на теорию пределов: там роль «крайне левого» будет играть *инфимум* (точная нижняя грань), а «крайне правого» — *супремум* (точная верхняя грань). Итак, пусть найденные нами точки суть a и b. Ясно, что они «диаметрально противоположны», т. е. что на них-то как раз и достигается диаметр $\mathscr{A}$, равный единице. Таким образом, $b-a=1$. С другой стороны, отрезок $[a, b]$, безусловно, содержит внутри себя множество $\mathscr{A}$ или, как ещё говорят, *покрывает* это множество. Рассмотрим разбиение

$$[a, b]=\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\cup\left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Разумеется, диаметр каждой из частей в данном разбиении отрезка равен $\frac{1}{2}$. Более того, если $\mathscr{A}_1=\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\cap\mathscr{A}$, а $\mathscr{A}_2=\left[\frac{a+b}{2}, b\right]\cap\mathscr{A}$, то $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$ и $\operatorname{diam}\mathscr{A}_i\leqslant 1/2$. В результате $f(\mathscr{A})\leqslant 2$, а значит, то же верно и для $f(1)$.

Отметим, что мы доказали даже чуть больше, чем требовалось. Ведь мы не просто знаем, что каждое множество диаметра 1 на прямой разбивается на части абы какого меньшего диаметра; мы знаем сверх того, что оно разбивается на части в д в о е меньшего диаметра. В данном отношении дальнейшего усиления нам не добиться. Иначе говоря, слово «вдвое» ничем лучшим мы не заменим: ни «втрое», ни «в 2,1 раза», ни «в 2,0001 раза» и т. д. нам не подойдёт. Достаточно взять отрезок [0, 1] и убедиться в том, что, как его ни разрезай на два кусочка, а всё равно один из них будет иметь диаметр не меньше $1/2$.

4. ПРОБЛЕМА БОРСУКА НА ПЛОСКОСТИ

Теперь нам хотелось бы понять, как устроена жизнь в пространстве размерности два. Понятно, что с ростом числа измерений наша основная задача может только усложниться. Так оно на самом деле и будет.

Во-первых, нетрудно убедиться в том, что $f(2)\geqslant 3$. Проще всего рассмотреть для этого вершины произвольного правильного треугольника. Диаметр такого множества — это расстояние между любыми двумя из его элементов, так что, как наше множество на две части ни разбивай, а в одну из них заведомо попадут по крайней мере две вершины, которые диаметрально противоположны. Ясно, что и весь треугольник тем более нельзя разбить на две «меньших» части. Дополнительный важный пример, показывающий, что $f(2)\geqslant 3$, представляет собой круг. На рис. 3 изображено «оптимальное» разбиение круга на части меньшего диаметра. Оно напоминает значок «Мерседеса», и если считать, как обычно, что круг имеет единичный диаметр, то окажется, что диаметры (одинаковых) частей в разбиении равны $\sqrt{3}/2=0{,}866\ldots<1$. Этот факт нам ещё понадобится.

Значительно тоньше выглядит ситуация с обратной оценкой. Дело в том, что $f(2)\leqslant 3$, а стало быть, и вовсе имеет место равенство $f(2)=3$, дающее полное решение проблемы Борсука на плоскости. Как это доказать? Нужно воспользоваться идеей, аналогичной той, к помощи которой мы прибегли в случае прямой. А именно, следует придумать какую-нибудь двумерную фигуру, покрывающую в некотором смысле любое другое плоское множество (диаметра 1) и допускающую в то же время несложное разбиение на три части с диаметрами, меньшими единицы. Понятно, что, коль скоро такую фигуру мы разбили, покрытое ею множество разбито и подавно. Введём точное определение.

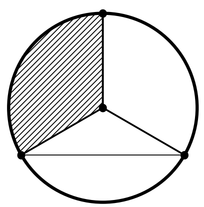


Рис. 3

Определение. Множество $U\subset\mathbb{R}^n$ при $n\leqslant 3$ называется *универсальной покрышкой* для множеств диаметра 1, если для каждого множества $\mathscr{A}$ с $\operatorname{diam}\mathscr{A}=1$ найдётся такое движение φ, что $\mathscr{A}\subset\varphi(U)$.

По-другому говоря, U — это универсальная покрышка, если та или иная её «жёсткая» копия, полученная в результате движения, целиком содержит произвольно заданное множество. Ясно, что к чему-то такому мы и стремились. Заметим, между прочим, что диаметр универсальной покрышки уже вовсе не обязан равняться единице: главное, чтобы диаметры частей в надлежащем разбиении оказались малы. Впрочем, на прямой, как мы помним, роль покрышки исполнил отрезок, и его длина была единичной. В двумерье это не так.

Ещё в 1929 году венгерский математик Й. Пал доказал следующую лемму:

Лемма. В качестве универсальной покрышки для множеств диаметра 1 в $\mathbb{R}^2$ можно взять правильный шестиугольник, расстояние между параллельными сторонами которого равно единице.

Эта лемма, если пытаться доказывать её строго, не вполне тривиальна. Однако в максимально доступной форме её доказательство изложено в замечательной старой книжке В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга «Теоремы и задачи комбинаторной геометрии» (см. [2]). Разумеется, мы не станем повторять эти рассуждения, а попросту отошлём читателя к упомянутому источнику.

Универсальная покрышка Пала изображена на рис. 4. Сразу же очевидно, что её диаметр отнюдь единице не равен. Тем не менее, легко сосчитать диаметры указанных на том же рисунке трёх частей и проверить, что они равны $\sqrt{3}/2=0{,}866\ldots<1$. Таким образом, всё в порядке, и мы доказали, что $f(2)\leqslant 3$.

Здесь следует сделать несколько замечаний. Во-первых, мы опять-таки (см. конец предыдущей главы) доказали даже больше, чем от нас требовал Борсук. В самом деле, мы знаем, с одной стороны, что всякое двумерное множество диаметра 1 допускает разбиение на три части, у которых диаметры не превосходят $\sqrt{3}/2$. С другой стороны, существует множество — круг, — для которого последнее утверждение усилить нельзя в том смысле, что, как круг на три «дольки» ни разрезай, а всё равно хотя бы одна из долек будет иметь диаметр не меньше $\sqrt{3}/2$ (значок «Мерседеса» оптимален). Напомним, что аналогом «критической» величины $\sqrt{3}/2$ на прямой было число $1/2$. Далее, стоит подчеркнуть, что наука о построении универсальных покрышек (даже на плоскости) весьма обширна и многогранна. В разделе задач мы кое-что в подобном роде предложим читателю для самостоятельного изучения. Однако тут мы в соответствующие дебри забираться не станем. Наконец, заметим, что именно Борсук был первым, кто провел все только что описанные нами выкладки.

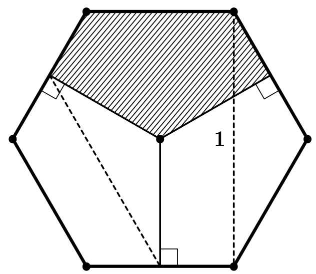


Рис. 4

Любопытно рассмотреть отдельно один важный частный случай задачи, а именно тот случай, когда нас интересуют только конечные множества. Иными словами, мы хотим показать, что каждое конечное множество точек на плоскости может быть разбито на 3 части меньшего диаметра. Разумеется, этот факт является прямым следствием уже доказанного неравенства $f(2)\leqslant 3$. Однако его можно установить и за счёт совершенно других средств: если до сих пор мы мыслили исключительно в геометрических терминах (универсальные покрышки), то тут нам удастся в существенной мере отойти от геометрии и переключиться на комбинаторику. С одной стороны, нам станет яснее, тем самым, смысл выражения «комбинаторная геометрия», а с другой стороны, мы самостоятельно (без каких-либо ссылок) придём к весьма нетривиальному результату. Итак, справедлива следующая теорема, которую в 1946 году доказал выдающийся венгерский математик П. Эрдеш*):

Теорема. Всякое конечное множество точек на плоскости может быть разбито на три части меньшего диаметра.

Заметим сперва, что с конечными множествами куда приятнее работать, чем с произвольными: и что они из себя представляют, и как измерить их диаметры, понять ничего не стоит. Перейдём теперь к доказательству.

Доказательство. Зафиксируем произвольное конечное множество точек $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^2$ и будем считать, что

$$\operatorname{diam}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\} = 1.$$

Докажем лемму.

Лемма. Число пар точек, реализующих диаметр множества $\mathscr{A} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}$, не превосходит m.

Доказательство. Будем действовать с помощью математической индукции. В самом деле, если $m \leqslant 3$, то наше утверждение очевидно, и мы имеем основание индукции. Предположим теперь, что $m > 3$ и для всех множеств $\mathscr{A}$, состоящих из $m-1$ точки, утверждение леммы доказано. Убедимся в том, что и для m-элементных множеств $\mathscr{A}$ всё в порядке. Каждым двум точкам $\vec{x}_i, \vec{x}_k \in \mathscr{A}$, удалённым друг от друга на расстояние 1, поставим в соответствие соединяющий их отрезок. Если из каждой точки выходит не более чем два отрезка, то общее число отрезков не превосходит m и лемма доказана. Пусть, напротив, есть точка — скажем, $\vec{x}_1$, — из которой выходит по меньшей мере три отрезка (см. рис. 5). Назовём их $\vec{x}_1\vec{x}_i$, $\vec{x}_1\vec{x}_j$ и $\vec{x}_1\vec{x}_k$. Два «крайних» из этих отрезков — скажем, $\vec{x}_1\vec{x}_i$ и $\vec{x}_1\vec{x}_k$ — образуют угол не больше 60 градусов, так как $|\vec{x}_i - \vec{x}_k| \leqslant |\vec{x}_i - \vec{x}_1| = |\vec{x}_k - \vec{x}_1| = 1$. Этому углу принадлежит отрезок $\vec{x}_1\vec{x}_j$. Если наша система отрезков содержит также некоторый отрезок $\vec{x}_j\vec{x}_p$, то он должен пересекаться как с отрезком $\vec{x}_1\vec{x}_i$, так и с отрезком $\vec{x}_1\vec{x}_k$, ибо у всяких двух непересекающихся единичных отрезков найдётся пара вершин, отстоящих друг от друга на расстояние, большее единицы. Поэтому точка $\vec{x}_p$ должна совпадать с точкой $\vec{x}_1$. Таким образом, из точки $\vec{x}_j$ выходит лишь один отрезок. Если мы исключим из $\mathscr{A}$ точку $\vec{x}_j$, то в оставшемся множестве будет $m-1$ точка, и по предположению индукции в нём найдётся не более $m-1$ пары диаметрально противоположных точек. Присоединив к этой $m-1$ паре точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_j$, мы получим как раз утверждение леммы.

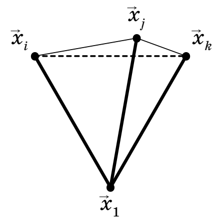


Рис. 5

Сейчас мы готовы завершить доказательство теоремы, и здесь мы снова прибегнем к помощи индукции. В самом деле, пусть $\mathscr{A}$ — произвольное множество, состоящее из m двумерных точек и имеющее диаметр 1. Если $m \leqslant 3$, то проблем с разбиением $\mathscr{A}$ на три части меньшего диаметра нет, и основание индукции нам обеспечено. Предположим, что $m > 3$ и для всех $\mathscr{A}$, содержащих ровно $m-1$ точку, теорема доказана. Поймём, почему и для m-элементных $\mathscr{A}$ искомое разбиение найдётся. Как и при доказательстве леммы, каждой паре диаметрально противоположных точек в $\mathscr{A}$ мы сопоставим соединяющий эти точки отрезок длины 1. Если допустить, что из всякой точки в $\mathscr{A}$ выходит не менее трёх отрезков, то всего различных отрезков у нас окажется как минимум $3m/2$, что невозможно ввиду леммы. Значит, есть точка $\vec{x} \in \mathscr{A}$, из которой выходит не более двух отрезков. Если мы удалим точку $\vec{x}$ из $\mathscr{A}$, то в полученном множестве $\mathscr{A} \setminus \{\vec{x}\}$ останется $m-1$ точка. По предположению индукции последнее множество допускает разбиение на три части меньшего диаметра. Возьмём ту из этих частей, в которую не попадает вторым своим концом ни один из отрезков, выходящих из точки $\vec{x}$. Ясно, что если мы добавим $\vec{x}$ к этой части, то возникнет разбиение множества $\mathscr{A}$, в котором диаметры частей опять-таки меньше единицы. Теорема доказана.

6. Докажите, что круг радиуса $1/\sqrt{3}$ является универсальной покрышкой для множеств диаметра 1 в $\mathbb{R}^2$.

7. Убедитесь в том, что покрышка из задачи 6 не позволяет решить проблему Борсука на плоскости.

8. Рассмотрим круг B_1 радиуса $1/\sqrt{3}$ и зафиксируем на ограничивающей его окружности произвольную точку. Пусть B_2 — это круг радиуса 1 с центром в нашей точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ (см. рис. 6) — это универсальная покрышка. Постройте её разбиение на 3 части с диаметрами меньше единицы. Постарайтесь добиться того, чтобы диаметры частей были как можно меньше. Чему они будут равны?

*) Пол Эрдеш (1913—1996) — выдающийся венгерский математик. Он является одним из основателей современной математической школы в Венгрии. Им написано более полутора тысяч статей и книг, а также предложены десятки задач, многие из которых стали уже классическими.

9*. Не ссылаясь на лемму Пала, докажите, что всякий многоугольник на плоскости может быть разбит на три части меньшего диаметра.

10*. Придумайте универсальную покрышку для множеств диаметра 1 на плоскости, которая имела бы как можно меньшую площадь.

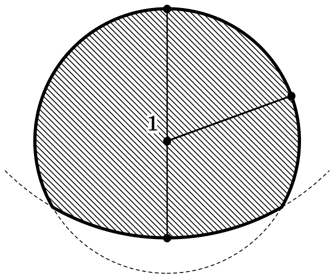


Рис. 6

5. ПРОБЛЕМА БОРСУКА В $\mathbb{R}^3$

Сейчас речь пойдёт, собственно, о «пространстве» — в том обыденном смысле, в каком мы привыкли это слово понимать. Число измерений увеличивается ещё на единицу, геометрия становится богаче, и, разумеется, возникают новые тонкости, которых ни в случае прямой, ни в случае плоскости не было.

Тот факт, что $f(3)\geqslant 4$, вытекает из рассмотрения множества вершин правильного тетраэдра. Ясно, что здесь всё устроено так же просто, как то было и для пары точек на прямой, и для тройки вершин правильного треугольника на плоскости. Однако в случае плоскости мы приводили дополнительно важный пример круга, который позволял установить оценку $f(2)\geqslant 3$. Разумно, стало быть, обсудить аналогичный пример и в пространстве. Понятно, что имеется в виду шар.

Сперва убедимся в том, что шар (обозначим его B) разбивается на четыре части меньшего диаметра. Пусть диаметр самого шара, как обычно, равен 1. Впишем в B правильный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Считая, что O — это центр шара, рассмотрим трёхгранные углы U_1, U_2, U_3, U_4, выходящие из O и порождённые тетраэдрами

$$OA_1A_2A_3, \quad OA_1A_2A_4, \quad OA_1A_3A_4, \quad OA_2A_3A_4.$$

Положим

$$B_1=B\cap U_1, \quad B_2=B\cap U_2, \quad B_3=B\cap U_3, \quad B_4=B\cap U_4.$$

Очевидно, $B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$ (см. рис. 7). Нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно), что

$$\operatorname{diam} B_i=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}=0{,}888\ldots<1, \quad i=1,\ldots,4.$$

Теперь следует заметить, что сам Борсук ещё в 1932 году доказал, используя весьма нетривиальные соображения, что на три части меньшего диаметра шар разбить нельзя. Более того, разбиение, которое мы только что описали, оптимально, т. е. добиться

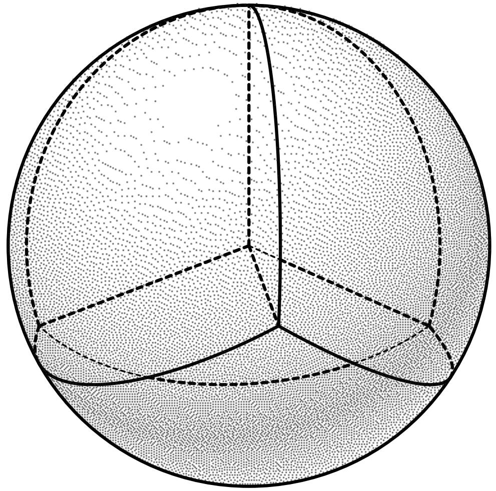


Рис. 7, *а*)

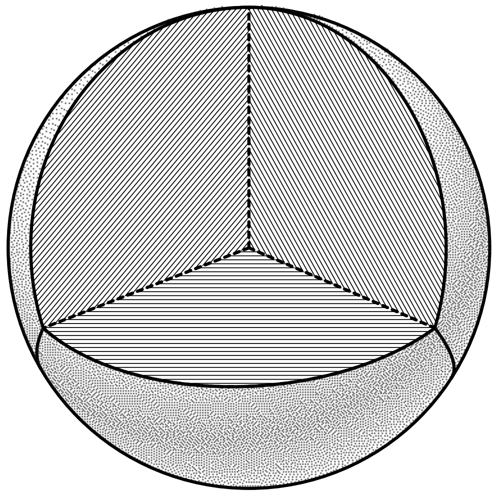


Рис. 7, *б*)

разбиения шара на четыре части, каждая из которых имела бы диаметр, меньший, чем 0,888..., уже не удастся. Соображения, применённые Борсуком, в максимально доступной форме изложены в книжке [2]. Отметим, что разбиение $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ очень похоже на соответствующее разбиение круга: ведь и там «значок Мерседеса» получался из правильного вписанного треугольника, являющегося плоским аналогом правильного тетраэдра.

Что же, далее, можно сказать о верхних оценках для $f(3)$? Иными словами, можем ли мы, например, утверждать, что $f(3) = 4$? Если проводить аналогию с одномерным и плоским случаями, то в последнее равенство хочется верить, ведь и раньше мы имели $f(n) = n + 1$. Ответ на поставленный вопрос положителен. Первым, кто доказал неравенство $f(3) \leqslant 4$, был английский математик Х. Эгглстон. К сожалению, метод Эгглстона не был элементарным, и, в частности, на построение каких-либо универсальных покрышек он не опирался. Как следствие, и результат получился не совсем удовлетворительным. Конечно, проблема Борсука была решена, ведь для каждого $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^3$, имеющего диаметр 1, нашлось разбиение на такие четыре части $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_4$, что $\operatorname{diam} \mathscr{A}_i < 1$ для любого i. Тем не менее при $n \leqslant 2$ удавалось «перевыполнить план»: на прямой оказывалось, что в аналогичном разбиении $\operatorname{diam} \mathscr{A}_i < 1/2$, а на плоскости подобная оценка имела вид $\operatorname{diam} \mathscr{A}_i < \sqrt{3}/2 = 0{,}866\ldots$. Обе оценки были значительно точнее неравенства $\operatorname{diam} \mathscr{A}_i < 1$, причём потом ещё выяснялось, что числа $1/2$ и $\sqrt{3}/2$ в известном смысле неулучшаемы.

Результат Эгглстона был опубликован в 1955 году, а два года спустя два замечательных геометра — А. Хеппеш и Б. Грюнбаум — независимо друг от друга предложили вполне элементарный подход к решению трёхмерной задачи. Естественно, и Хеппеш, и Грюнбаум исходили из построения некоторой универсальной покрышки. По-видимому, идея «витала в воздухе», так как Хеппеш и Грюнбаум, не сговариваясь, рассмотрели одну и ту же покрышку. Устроена эта покрышка так. Сначала берётся правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, у которого расстояние между любыми двумя параллельными гранями равно 1 (см. рис. 8). Затем плоскостью, параллельной четырёхугольнику $A_1A_2A_3A_4$ и проходящей на расстоянии 1/2 от него (в направлении вершины A_5), от октаэдра отсекается пирамида $B_1B_2B_3B_4A_5$ (см. рис. 9). Точно так же от него отсекаются ещё две пирамиды — $C_1C_2C_3C_4A_1$ и $D_1D_2D_3D_4A_4$ (см. рис. 10). Можно доказать, что «жёсткие копии» многогранника U, получающегося в итоге, действительно покрывают любое наперёд заданное множество диаметра 1 в пространстве. Мы этого делать не станем, сославшись на книжку [2].

Заметим, что, во-первых, $\operatorname{diam} U > 1$. Во-вторых, теперь нас должно интересовать наиболее экономное разбиение U на четыре

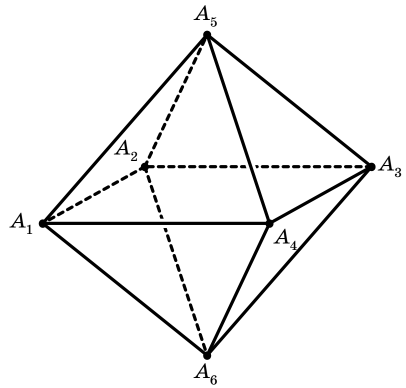


Рис. 8

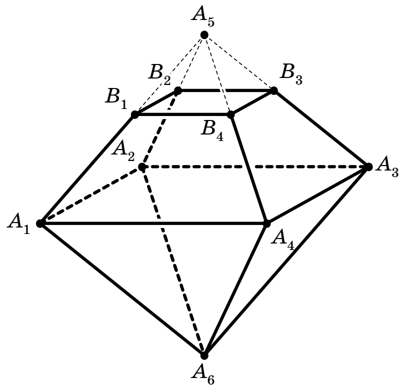


Рис. 9

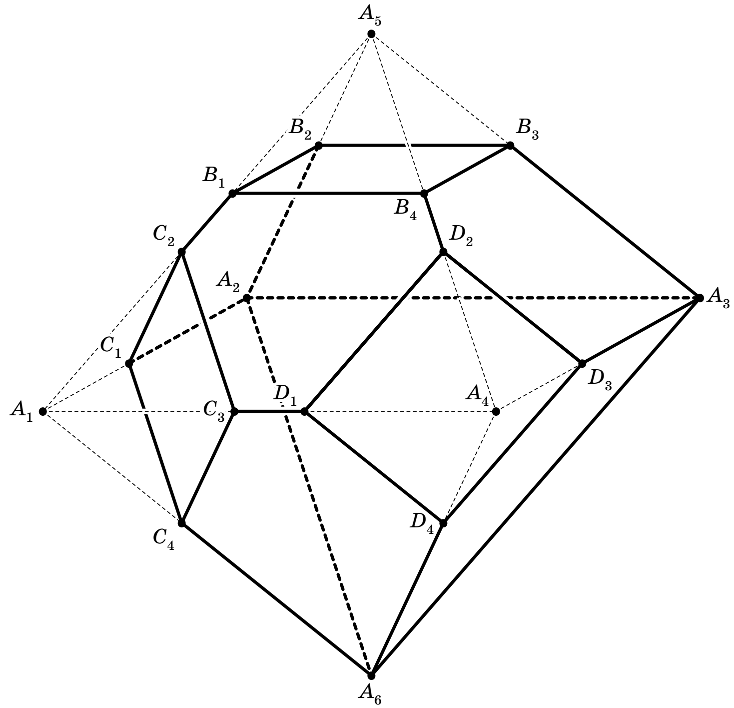


Рис. 10

части диаметра меньше единицы. Хеппеш действовал немного грубее Грюнбаума. В результате у него диаметры частей оказались равны

$$\frac{\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{4}=0{,}99775\ldots,$$

а у Грюнбаума —

$$\frac{\sqrt{6129030-937419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}}=0{,}9887\ldots.$$

Последнее число не может не впечатлять: ведь ясно, какую огромную и скрупулёзную вычислительную работу пришлось проделать Грюнбауму, дабы отыскать его. Расчёты Грюнбаума также подробно изложены в книге [2], и мы на них не останавливаемся. Тем не менее, мы всё же приводим здесь рисунки (см. рис. 11), на которых изображено разбиение Грюнбаума.

Что же мы, таким образом, имеем? С одной стороны, благодаря Грюнбауму, мы знаем, что всякое трёхмерное множество диаметра 1 может быть разбито на четыре части диаметра не больше 0,9887.... С другой стороны, у нас есть шар, в любом разбиении которого на четыре части непременно найдётся часть диаметра не меньше 0,888.... Числа 0,9887 и 0,888, конечно, довольно далеки (в масштабах единицы) друг от друга, и, стало быть, в $\mathbb{R}^3$ всё уже не так безоблачно, как то было на плоскости и на прямой. Естественно, возникает новая нетривиальная геометрическая задача отыскания правильного числа $\alpha\in[0{,}888\ldots, 0{,}9887\ldots]$, отвечающего за «оптимальность» решения исходной проблемы Борсука. Понятно, что для улучшения верхней оценки на α (коль скоро это вообще возможно) необходимо придумать как можно более экономное разбиение произвольного множества на четыре части. Для улучшения же нижней оценки (опять-таки при условии, что оно принципиально возможно) следует придумать множество, не допускающее никакого разбиения на четыре части, каждая из которых имела бы заданный наперёд диаметр, не больший 0,888.... В 1953 году американский математик Д. Гэйл высказал гипотезу, что $\alpha=0{,}888\ldots$, т. е. что множеств «хуже» шара в определённом смысле в пространстве не бывает. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута (см. задачи). Однако кое-какие интересные результаты были достигнуты в борьбе с неравенством $\alpha\leqslant 0{,}9887$.

Лишь в 1997 году, через сорок лет после выхода в свет статьи Грюнбаума, ленинградский математик В. В. Макеев сумел построить новую многогранную покрышку, отличную от усечённого октаэдра. А именно, он доказал, что всякое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^3$ может быть заключено в *ромбододекаэдр*, у которого расстояние

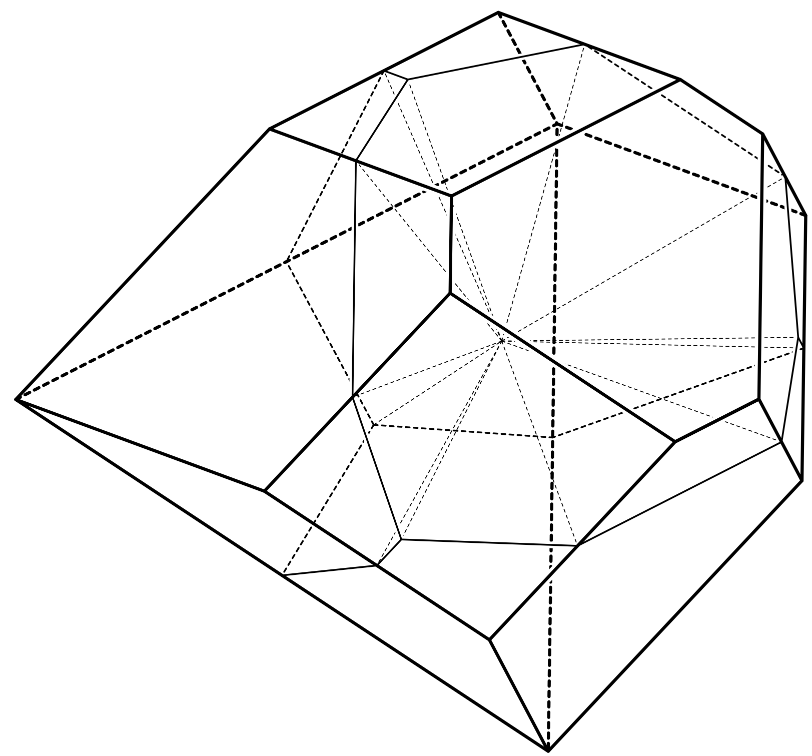


Рис. 11, *а*)

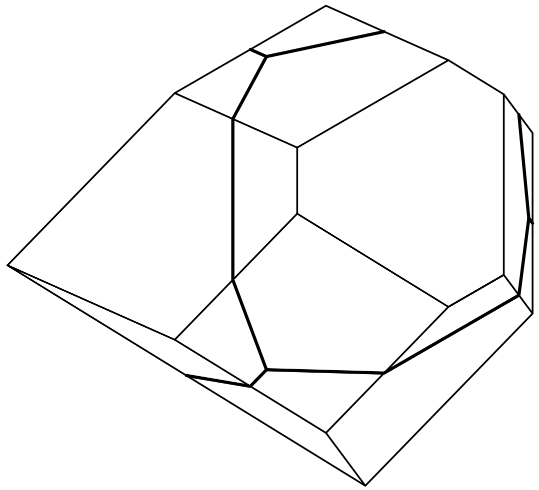


Рис. 11, *б*)

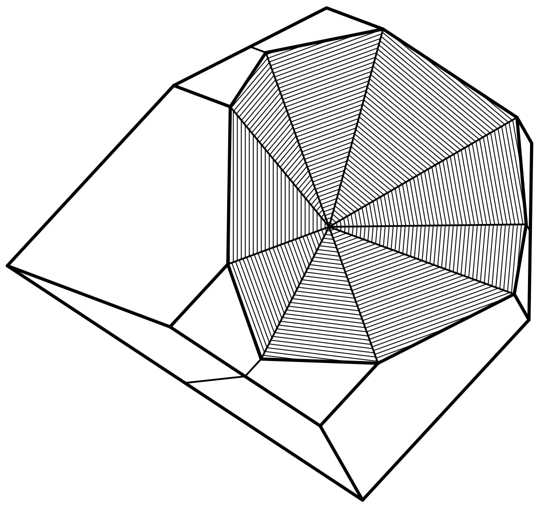


Рис. 11, *в*)

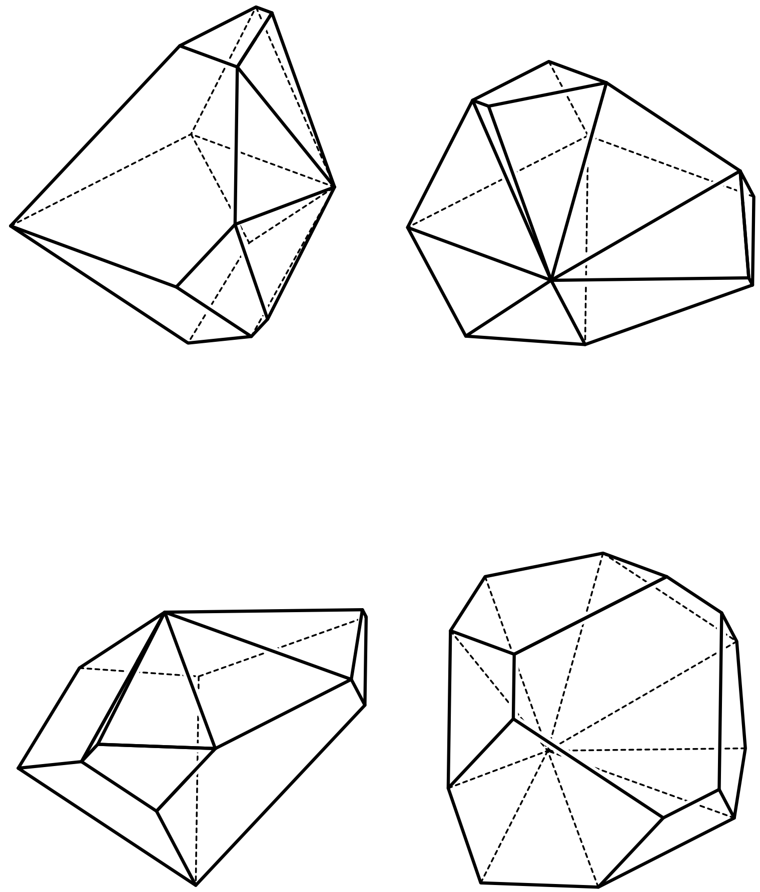


Рис. 11, *г*)

между параллельными гранями равно 1 (см. рис. 12). Более того, от ромбододекаэдра можно отсечь три кусочка посредством точно таких же плоскостей, какие были использованы в случае октаэдра. Более точно, рассмотрим такую систему координат, что каждая из её плоскостей проходит через центр ромбододекаэдра и 4 его вершины. Теперь рассмотрим три взаимно перпендикулярные плоскости, параллельные координатным плоскостям и отстоящие от этих плоскостей на расстояние 1/2 соответственно (см. рис. 13). Полученный в конечном итоге многогранник U удаётся разбить на четыре части диаметра меньше 0,98, что на восемьдесят семь десятитысячных лучше, чем у Грюнбаума. Подчеркнём, что, хотя с точки зрения проблемы Борсука улучшение ничтожно, результат Макеева крайне интересен сам по себе. К сожалению, изложить его доказательство здесь мы не сможем: оно основано на глубоких фактах *топологии*, понимание которых требует значительной подготовки. Заметим, кстати, что и экономное разбиение U на четыре части не есть плод кропотливых ручных расчётов, подобных тем, что проделал Грюнбаум. Теперь, когда есть компьютеры, гораздо проще бывает подчас прибегнуть к их помощи. Так и поступил Л. Евдокимов, осуществивший упомянутое разбиение U.

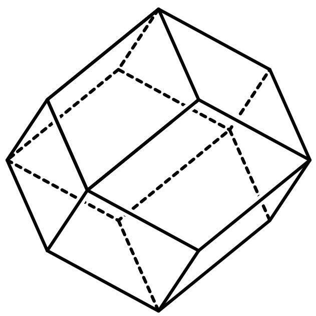


Рис. 12

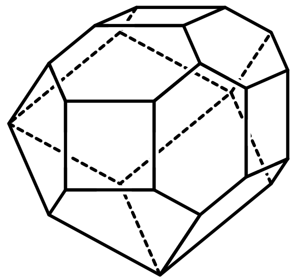


Рис. 13

Несколько другой подход к уточнению неравенства $\alpha \leqslant 0{,}9887\ldots$ состоит в обобщении понятия покрышки, которое мы приведём ниже.

Определение. Совокупность множеств $U_1, \ldots, U_s \subset \mathbb{R}^n$ при $n \leqslant 3$ называется *универсальной покрывающей системой* для множеств диаметра 1, если для каждого множества $\mathscr{A}$ единичного диаметра найдётся такое U_i и движение φ, что $\mathscr{A} \subset \varphi(U_i)$.

Иначе говоря, если раньше мы стремились отыскать одно множество U, жёсткие копии которого покрывают все множества диаметра 1, то теперь часть множеств мы заключаем в копии U_1, часть — в копии U_2 и т. д. вплоть до U_s. Понятно, что отныне свободы у нас тем больше, чем большее значение мы разрешаем

принимать величине s. Проблема лишь в том, что с увеличением s растёт и число множеств, каждое из которых нам предстоит разбивать на части диаметра, меньшего 1. Таким образом, необходимо искать «золотую середину», и это иной раз бывает непросто. Читатель сам увидит это, если попытается решить некоторые из задач, которые мы приведём в конце главы. Здесь же мы не станем вдаваться в подробности. Заметим только, что на упомянутом пути удаётся достичь результата вроде $\alpha \leqslant 0{,}97$ (см. задачи).

Есть ещё одна важная задача, близкая в некотором смысле к проблеме Борсука, и близкая притом настолько, что некоторые результаты относительно неё могут быть весьма полезны при обсуждении нашего основного вопроса. Эта задача была поставлена Грюнбаумом в 50-е годы XX века, и сводится она к нахождению минимального числа $g_d(n)$ шаров (кругов, отрезков) диаметра $d \leqslant 1$, которыми может быть *покрыто* произвольное множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ единичного диаметра. Иными словами, мы сперва берём любое $\mathscr{A}$ и рассматриваем покрытие

$$\mathscr{A} \subset B_1 \cup \ldots \cup B_g,$$

предполагая, что $B_1, \ldots, B_g$ суть шары и что $\operatorname{diam} B_i = d \leqslant \operatorname{diam} \mathscr{A}$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant g$. Затем мы обозначаем через $g_d(\mathscr{A})$ минимум среди всех g, для которых такое покрытие существует, и определяем $g_d(n)$ как максимум по всем $\mathscr{A}$ величин $g_d(\mathscr{A})$. Как видно, ситуация очень похожа на ту, что возникала при определении $f(n)$. Более предметно мы обсудим задачу Грюнбаума несколько позже. Сейчас же мы заметим, что при $n=3$ лидирующие позиции в изучении этой задачи занимает П. Кацарова-Каранова, доказавшая в 1967 году, что при $d \geqslant 0{,}999983$ имеет место точное равенство $g_d(3)=4$. Ясно, что отсюда мгновенно следует уже известное нам равенство $f(3)=4$ и оценка $\alpha \leqslant 0{,}999983$. Конечно, последняя оценка куда как слабее всех своих упомянутых выше аналогов. Однако не в том пафос: гораздо важнее то, что здесь мы достаточно чётко представляем себе происхождение разбиения. Оно не просто перекочевало на данное множество с универсальной покрышки, а возникло из покрытия этого множества весьма конкретными телами — шарами. Впрочем, работа Кацаровой-Карановой крайне громоздка в вычислительном плане, и мы не станем излагать её в этой брошюре.

Напоследок заметим, что и в случае $\mathbb{R}^3$ удаётся предложить отдельный подход к решению проблемы Борсука для конечных множеств точек. Естественно, он опять-таки носит весьма комбинаторный характер. Однако на сей раз всё значительно труднее, чем то было на плоскости, и мы не имеем возможности привести здесь соответствующие рассуждения, принадлежащие А. Хеппешу и П. Ревесу.

11. Докажите, что шар радиуса $\sqrt{3/8}$ является универсальной покрышкой для множеств диаметра 1 в $\mathbb{R}^3$.

12. Убедитесь в том, что покрышка из задачи 11 не позволяет решить проблему Борсука в трёхмерном пространстве. На сколько частей диаметра меньше 1 эту покрышку всё же можно разбить?

13. Рассмотрим шар B_1 радиуса $\sqrt{3/8}$ и зафиксируем на сфере, которой он ограничен, произвольную точку. Пусть B_2 — это шар радиуса 1 с центром в нашей точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ (см. рис. 14) — универсальная покрышка. Постройте её разбиение на 5 частей с диаметрами меньше 1. Постарайтесь добиться того, чтобы диаметры частей были как можно меньше. Можно ли осуществить разбиение $B_1 \cap B_2$ на четыре части с диаметрами меньше 1?

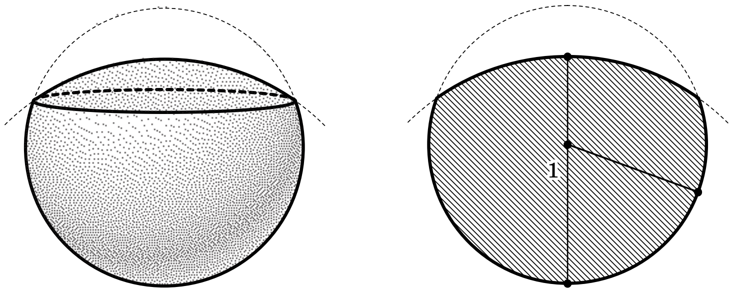


Рис. 14

14*. Рассмотрим правильный октаэдр с рис. 8. Отсечём от него не три пирамиды, как это делали Хеппеш и Грюнбаум, а шесть. Иными словами, теперь мы хотим «отрубить» все шесть вершин октаэдра, используя для этого, как и прежде, плоскости, параллельные его центральным сечениям. Только на сей раз мы не станем ограничиваться случаем, когда плоскости проходят на расстоянии 1/2 от «своего» сечения по ту или другую сторону от него. Мы будем считать, что упомянутые расстояния суть какие-то (априори произвольные) числа $r_1, \ldots, r_6$. Сообразно этому плоскости мы обозначим $\Pi_1(r_1), \ldots, \Pi_6(r_6)$. Понятно, что каждое r_i заведомо положительно и не превосходит расстояния от центра октаэдра до любой из его вершин. Пусть новый усечённый многогранник — это $U(r_1, \ldots, r_6)$. На рис. 15 изображены два усечённых октаэдра с наборами параметров

$$а)\quad r_1 = \ldots = r_6 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad б)\quad r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad r_4 = r_5 = r_6 = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Для каких значений $r_1, \ldots, r_6$ этот многогранник является уни-

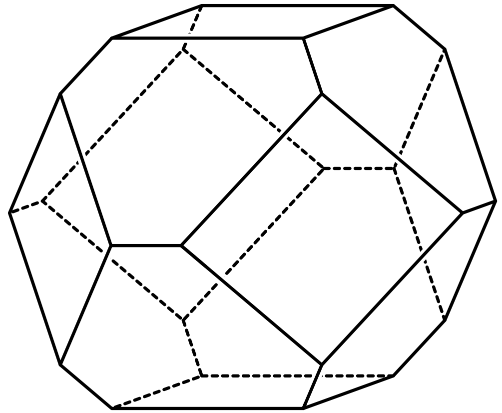


Рис. 15, *а*)

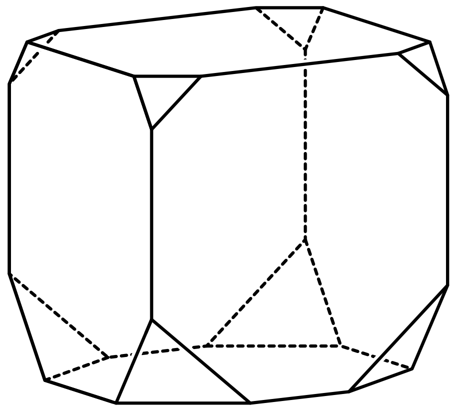


Рис. 15, *б*)

версальной покрышкой? Варьируя параметры $r_1, \ldots, r_6$, постройте универсальную покрывающую систему из многогранников вида $U(r_1, \ldots, r_6)$. Постарайтесь получить, наиболее эффективно разбивая на четыре части каждый из многогранников в системе, как можно лучшую верхнюю оценку на α. Удастся ли, скажем, на этом пути достичь неравенства $\alpha \leqslant 0{,}97$? Попытайтесь ту же программу осуществить в случае ромбододекаэдра.

15. Рассмотрим

$$V_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \colon x_i \in \{-1, 0, 1\},\ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Докажите, что любое множество $V \subseteq V_1$ допускает разбиение на четыре части меньшего диаметра. Сделайте то же самое для каждого $V \subseteq V_s$, где V_s — множество целых точек в кубе $[-s, s]^3$, то есть

$$V_s = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \colon x_i \in \{-s, \ldots, s\},\ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Четырьмя шарами какого (по возможности, наименьшего) диаметра покрывается V_s при заданном s?

16*. Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду $A_1A_2A_3A_4$, имеющую диаметр 1. Пусть B — это шар минимального радиуса, покрывающий её. Понятно, что вершины пирамиды лежат на сфере, которой ограничен шар B. Пусть B_1, B_2, B_3, B_4 суть шары радиуса 1 с центрами в точках A_1, A_2, A_3, A_4. Рассмотрим множество $B \cap B_1 \cap \ldots \cap B_4$ (см. рис. 16). Назовём это множество «тетраэдром Рело» по аналогии с *треугольником Рело* на плоскости (см. рис. 17). Попытайтесь отыскать оптимальное разбиение тетраэдра Рело на четыре части. Что получится в случае, когда исходная пирамида правильная?

17*. Попытайтесь опровергнуть гипотезу Гэйла. Возможно, результаты по предыдущей задаче окажутся полезными.

18*. Попытайтесь получить аналог результата Кацаровой-Карановой при каких-нибудь $d < 0{,}999983$.

6. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ $n > 3$

В начале второй главы, когда мы обсуждали вопрос о том, что следует понимать под пространством, мы заметили, что исчерпывающий ответ на этот вопрос разумно оставить в стороне, и в тот момент мы решили ограничиться ситуациями, досконально изучаемыми в рамках стандартной школьной программы. Однако, даже если не заводить речь о совершенно исчерпывающем ответе, на прежнем уровне знания нам оставаться никак нельзя. Конечно, весьма нетривиальные эффекты мы уже пронаблюдали, рассматривая проблему Борсука в $\mathbb{R}^n$ с $n \leqslant 3$. И тем не менее, гораздо более тонкие и в то же время яркие факты нас ещё только

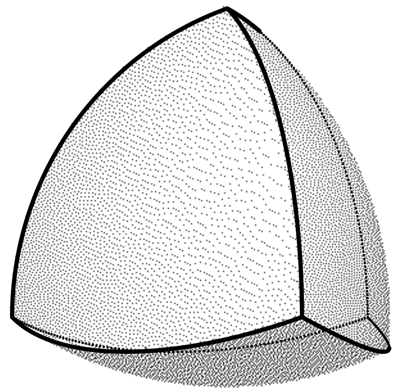


Рис. 16

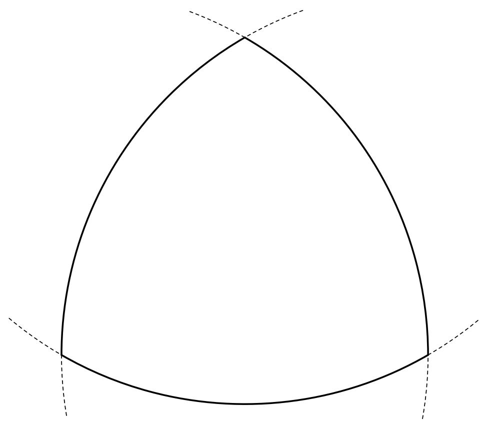


Рис. 17

ожидают. Дело в том, что ограничение $n \leqslant 3$ носит, вообще-то, весьма произвольный характер. Ясно, что, на первый взгляд, подобное заявление кажется по меньшей мере странным, ведь всё, что мы видим вокруг себя, представляется нам вполне укладывающимся в трёхмерную интерпретацию. Более того, даже вообразить себе четырёхмерный мир мы не в состоянии. Откуда же тогда возникнуть пространствам многих измерений? Если об $n=4$ помыслить трудно, то что будет, скажем, при $n=100, 1000$ и т. д.? Оказывается, что и в математике, и в физике пространства огромной размерности играют такую же большую роль, как и те, с какими мы привыкли работать со школы. С помощью этих пространств удаётся описывать великое множество реальных ситуаций и процессов, просчитывать то, что иначе делается необозримым. Мы не станем приводить здесь многочисленные примеры, ибо это уведёт нас слишком далеко от нашей темы. Главное для нас — это то, что пространства $\mathbb{R}^n$ при $n>3$ важны и что, в частности, изучение их геометрии представляет значительный интерес. При этом мы понимаем, что, с одной стороны, чем больше размерность, тем геометрия нетривиальнее и богаче, и что, с другой стороны, интуиция наша с ростом n всё слабее и слабее. Таким образом, естественно, например, ожидать, что в дальнейшем роль чисто комбинаторной составляющей нашей деятельности вырастет, а роль чисто геометрической составляющей слегка уменьшится. Во всем этом нам, безусловно, предстоит убедиться, но сейчас надо хотя бы определить $\mathbb{R}^n$ при произвольном n и сформулировать основную проблему.

В сущности, с формальной точки зрения, ничего нового не возникает. В самом деле, $\mathbb{R}^n$ проще всего понимать как совокупность всех возможных (упорядоченных) наборов из n вещественных чисел. Таким образом, элементы $\mathbb{R}^n$ суть векторы (точки) $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ (x_i — координаты). Всё, как и при $n \leqslant 3$. Даже с расстояниями трудностей нет:

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Последующие действия полностью повторяют те, что мы предприняли в главе 2. Иначе говоря, проблема Борсука вновь состоит в отыскании минимального числа $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество в n-мерном пространстве. Только n теперь любое. Комментарии к словам «произвольное множество» изменений, понятно, не претерпевают. С диаметром тоже всё по-прежнему. Разве что «ограниченность» стоит пояснить. В любой размерности есть естественное понятие шара, напрямую обобщающее понятие отрезка на прямой, круга на плоскости и обычного шара в пространстве размерности 3. Шар — это множество точек, лежащих внутри сферы.

Сфера же — это множество точек, равноудалённых от данной точки $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, которая является центром сферы (шара):

$$B=\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\colon (x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2 \leqslant r^2\},$$

$$S=\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\colon (x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2 = r^2\}.$$

B — это шар, S — его сфера, r — радиус. Так вот, множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, если все его точки лежат внутри некоторого шара B (множество $\mathscr{A}$ *покрывается* шаром B). Впрочем, последнее условие равносильно условию конечности диаметра. Остаётся заметить, что опять-таки $f(n)$ не изменится, коль скоро мы ограничимся рассмотрением лишь множеств диаметра 1. Что же известно про $f(n)$ в нынешнем, общем, случае?

7. ГИПОТЕЗА БОРСУКА И ЕЁ ИСТОРИЯ

Во-первых, совсем не сложно доказать, что $f(n) \geqslant n+1$. Мы, впрочем, к тому не вполне готовы, и пока нам придётся просто поверить в это (см. главу 9). С другой стороны, мы уже знаем, что, коль скоро $n \leqslant 3$, верно и обратное неравенство. Представляется весьма естественным предположить, что и при $n>3$ выполнено $f(n)=n+1$. Тем более, что шар, который являлся самым «плохим» множеством на прямой и на плоскости и казался таковым даже в $\mathbb{R}^3$ (ср. гипотезу Гэйла), на $n+1$ часть меньшего диаметра заведомо разбивается (см. главу 9). Когда Борсук ставил свою проблему в 1933 году, он был осторожен, но всё же задал вопрос: правда ли, что $f(n)=n+1$? Гипотезу он не формулировал. Однако верить в положительный ответ на вопрос Борсука было столь заманчиво, что очень скоро все стали говорить о «гипотезе Борсука», и сам её «автор» от этого уже не открещивался.

История гипотезы Борсука весьма драматична. Все, кто занимался проблемой (а в рядах этих людей были замечательные математики), практически не сомневались в справедливости гипотезы, и потому огромные усилия были направлены на её подтверждение. Разумеется, многочисленные нетривиальные результаты не замедлили появиться. Например, гипотеза была доказана для обширных классов множеств в пространстве. Дабы чётче объяснить, из чего подобные классы состоят, нам потребуется ввести дополнительные понятия, и мы сделаем это в следующей главе, где и вернёмся под конец к обсуждению упомянутого важного аспекта истории. Сейчас же наших знаний хватит для того, чтобы понять, как обстояли дела с верхними оценками на $f(n)$. Ясно, что в идеале должно было получиться $f(n) \leqslant n+1$, но беда-то как раз в том и состояла, что, несмотря на громадные усилия, до идеала было, как от земли до небес.

Прежде чем выписывать последовательные достижения в вопросе получения верхних оценок для $f(n)$, следует сделать небольшую оговорку. В дальнейшем у нас возникнут неравенства вида $f(n)\leqslant t(n)$, где $t(n)$ — совершенно конкретная функция: подставил в неё любое натуральное n, и значение её у тебя «в кармане». В таком случае проблем нет. С другой стороны, мы будем рассматривать и оценки, записанные в несколько странной форме, а именно: $f(n)\leqslant\bigl(a+o(1)\bigr)^n$. Здесь $a>1$ — также совершенно конкретное число. А вот $o(1)$ (читается «о малое от единицы») — это нечто непривычное для тех, кто не знает теории пределов. В сущности, ничего страшного тут нет. Просто $o(1)$ есть некоторая функция от аргумента n, значения которой бесконечно малы по сравнению с единицей, как раз и указанной в скобках. Что значит «бесконечно малы»? Это значит, что с ростом n величина $o(1)$ становится всё ближе и ближе к нулю. Например, речь может идти о произвольной функции вида b/n^{α}, где b и $\alpha>0$ суть какие-нибудь константы. Или можно представлять себе величину вроде $1/\ln n$, и т. д. Главное для нас, что по той или иной причине мы не готовы конкретизировать $o(1)$; к нулю оно стремится, а уж как и сколь быстро — это отдельный вопрос. Таким образом, мы не сумеем при заданном n сказать, чему равняется $\bigl(a+o(1)\bigr)^n$. Однако мы будем по крайне мере уверены, что чем больше размерность, тем в *каком-то смысле* функция $\bigl(a+o(1)\bigr)^n$ ближе ко всем понятной экспоненте a^n. Заметим ещё, что $o(1)$ вовсе не обязано быть положительным. Скажем, в примере b/n^{α} константа b имела право быть и отрицательной. Лишь бы в конечном итоге наша величина уменьшалась (по модулю).

Выражение «в каком-то смысле» выделено в тексте неспроста. На самом деле, тут всё же имеется одна тонкость. Рассмотрим пример с $a=2$, $o(1)=2/\sqrt{n}$. Можно показать, что функция $\bigl(2+2/\sqrt{n}\bigr)^n$ с ростом n ведёт себя примерно так же, как функция $2^n e^{\sqrt{n}}$. А последняя функция, безусловно, превосходит экспоненту 2^n в весьма быстро растущее число раз. Тем не менее, если n достаточно велико, то $1{,}999^n\leqslant 2^n e^{\sqrt{n}}\leqslant 2{,}001^n$, а начиная с ещё более крупных n, и вовсе различие между верхней и нижней оценками проявится лишь в каком-нибудь миллиардном знаке после запятой. В реальности очень редко бывает интересна такая запредельная точность, и потому (именно с такой — обыденной — точки зрения) мы имеем право говорить о том, что $(a+o(1))^n$ «приближается» к a^n: разницы между $a-10^{-100}$, a и $a+10^{-100}$ для нас в *каком-то смысле* не существует.

Рассмотрим оценки первого вида. Совсем легко показать, что $f(n)\leqslant\bigl(2[\sqrt{n}+1]\bigr)^n$ (см. главу 10). Несколько тяжелее даётся неравенство $f(n)\leqslant 2^n$ (см. главу 11). Наконец, в 1982 году М. Лассак доказал, что $f(n)\leqslant 2^{n-1}+1$, и мы докажем это в главе 11. Среди

«явных» оценок лассаковская является наилучшей из известных. Подобное обстоятельство не может не разочаровывать, ведь все прекрасно понимают (даже не владея аппаратом теории пределов), что экспонента куда быстрее растёт, чем гипотетическая линейная функция $n+1$.

Что же мы знаем об оценках второго вида? В 1965 году К. А. Роджерс установил некий нетривиальный геометрический факт, из которого, помимо всего прочего, следовало, что $f(n)\leqslant\bigl(\sqrt{2}+o(1)\bigr)^n$ (см. главу 13). Это случилось на 17 лет раньше публикации работы Лассака. Конечно, с ростом размерности (рано или поздно) результат Лассака становится несравненно слабее роджерсовского. И тем не менее, при малых n неконкретность величины $o(1)$ губит все многомерные преимущества, а стало быть, и ценность неравенства Лассака остаётся прежней: просто пафос его не в больших размерностях. Оценка Роджерса была улучшена только в 1988 году, когда О. Шрамму удалось установить, что

$$f(n)\leqslant S(n)=\bigl(\sqrt{3/2}+o(1)\bigr)^n$$

(см. главу 12), и результат Шрамма остаётся непревзойденным и по сей день. Пользуясь совершенно другими средствами, его передоказали в 1991 году Ж. Бургейн и Й. Линденштраусс (см. главу 13), но это не приблизило оценку к искомой величине. Что делать?

Развязка нашей драмы наступила в 1993 году, ровно через 60 лет после того, как проблема Борсука была поставлена. Дж. Кан и Г. Калаи сумели построить контрпример к гипотезе! Для многих это стало абсолютной неожиданностью. Однако и результат Кана—Калаи выглядел в некотором роде угрожающе: контрпримеры возникали лишь во всех размерностях, начиная с $n=2015$. Неудобоваримое число. Что такое 2015 измерений, помыслить нереально. В то же время и *нижняя* оценка на $f(n)$, которую заодно с контрпримерами предложили Кан и Калаи, оказалась весьма любопытной. Теперь речь уже не шла ни о каком $n+1$; выяснилось, что всё гораздо хитрее и что по крайней мере $f(n)\geqslant\bigl(1{,}203+o(1)\bigr)^{\sqrt{n}}$. Такая оценка всё равно весьма далека от оценки сверху $f(n)\leqslant S(n)$. В указанном обстоятельстве проще всего убедиться, исходя из знания теории пределов, но и «на пальцах» нетрудно подсчитать, что с ростом n величина $\bigl(1{,}203+o(1)\bigr)^{\sqrt{n}}$ становится пренебрежимо маленькой по сравнению с $S(n)$.

Короче говоря, «пришла мысль — отворяй ворота». Отныне львиная доля усилий была брошена на уменьшение размерности, в которой удаётся построить контрпример, и на уточнение нижней оценки для $f(n)$. Соответствующая деятельность была во многом подобна спортивному соревнованию, когда всё решается сотыми долями секунды. Ниже мы приводим таблицу последовательных рекордов от 1993 года до последних дней.

Автор, год	$n\geqslant$	$f(n)\geqslant$
Дж. Кан, Г. Калаи, 1993	2015	$(1{,}203\ +o(1))^{\sqrt{n}}$
А. Нилли, 1994	946	$(1{,}203\ +o(1))^{\sqrt{n}}$
Б. Вайссбах, Й. Грей, 1997	903	$(1{,}203\ +o(1))^{\sqrt{n}}$
А. М. Райгородский, 1997	561	$(1{,}203\ +o(1))^{\sqrt{n}}$
А. М. Райгородский, 1999	—	$(1{,}2255+o(1))^{\sqrt{n}}$
Б. Вайссбах, 2000	560	$(1{,}203\ +o(1))^{\sqrt{n}}$
А. Хинрихс, 2001	324	—
О. Пихурко, 2002	323	—
А. Хинрихс, Х. Рихтер, 2003	298	—

Прокомментируем таблицу. Во втором столбце указаны нижние границы для размерностей, с которых гипотеза Борсука заведомо перестаёт быть верной благодаря результатам соответствующих авторов. С остальными столбцами всё и так ясно. Если в какой-то графе стоит прочерк, это означает, что либо хорошие контрпримеры не получаются, хотя оценка на $f(n)$ улучшена, либо что, наоборот, контрпримеры придуманы, а вот оценка с ростом n «не пошла». Читатель спросит: «Как же такое возможно? Вроде бы $(1{,}2255+o(1))^{\sqrt{n}}$ куда больше, чем $(1{,}203+o(1))^{\sqrt{n}}$? Почему же тогда в надлежащей графе стоит прочерк?» Дело в том, что в малых размерностях, где мы и стремимся отыскать контрпримеры, нельзя сбрасывать со счетов $o(1)$. К сожалению, метод может позволить увеличить константу с 1,203 до 1,2255, но при этом изменится скорость, с которой $o(1)$ приближается к нулю. Скажем, могло быть так:

$$f(n)\geqslant\left(1{,}203+\frac{1000}{n}\right)^{\sqrt{n}} \text{ и } f(n)\geqslant\left(1{,}2255+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Убедитесь в том, что при не слишком больших n вторая величина намного меньше первой, несмотря на то, что при неограниченном увеличении размерности ситуация меняется кардинально. Вообще, про $o(1)$ никогда не следует забывать. В тех графах таблицы, где, казалось бы, написано и вовсе одно и тоже, разница состоит именно в том, как устроена «бесконечно малая», которую мы не конкретизируем.

Во всей этой истории особенно поразительно то, что все контрпримеры и нетривиальные нижние оценки строятся с помощью конечных наборов точек в пространстве, т. е. никаких сложных конструкций не возникает. Всё упирается в тонкую комбинаторику, которую мы обсудим в главе 14.

Завершая главу, заметим, что и по сей день никто не знает, как устроена жизнь в размерностях $4\leqslant n\leqslant 297$. Основная нынешняя

«трагедия» состоит хотя бы в том, что даже при $n=4$ мы никаких разумных результатов не имеем. Есть оценка Лассака

$$f(4)\leqslant 2^{4-1}+1=9,$$

и есть соображения, показывающие, что, скорее всего, при $n=4$ гипотеза Борсука верна. Тем не менее, проблема остаётся открытой и крайне интересной.

В следующей главе мы дадим некоторые важные многомерные определения, которые хорошо коррелируют со своими аналогами при $n\leqslant 3$ и которые позволят нам грамотно обсуждать и даже подчас доказывать различные результаты из числа упомянутых выше.

8. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЕЩЁ НЕМНОГО ИСТОРИИ

В этой главе мы приведём набор важных определений и прокомментируем их.

Определение. Пусть имеется два вектора

$$\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n),\quad \vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

и два вещественных числа λ, μ. Тогда через $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ мы будем обозначать вектор $\vec{z}=(z_1,\ldots,z_n)$, у которого координаты имеют вид $z_i=\lambda x_i+\mu y_i$, $i=1,\ldots,n$. Данное определение позволяет естественным образом перенести сложение векторов и умножение их на число на многомерную ситуацию.

Определение. Пусть $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_k$ — какие-то векторы в пространстве. Их *выпуклой оболочкой* называется множество $\mathscr{A}$, состоящее из тех и только тех векторов, которые могут быть представлены в виде $\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — неотрицательные вещественные числа, в сумме дающие единицу. Множество $\mathscr{A}$ принято обозначать $\operatorname{conv}\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_k\}$, подчёркивая выпуклость*), и называть *выпуклым многогранником* или *политопом*.

Нетрудно убедиться в том, что и здесь мы имеем дело с прямым обобщением школьной геометрии. В частности, стандартные выпуклые многоугольники на плоскости и многогранники в пространстве являются выпуклыми оболочками своих вершин. Заметим, например, что в любой размерности отрезок — это, конечно, выпуклая оболочка двух точек (концов отрезка).

Определение. *Длина отрезка* — это расстояние между концами отрезка.

Определение. Множество $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий их.

Легко видеть, что политоп всегда выпуклый в смысле последнего определения.

---

*) От слова *convexus* (лат.) — выпуклый.

Определение. Назовём векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ вершинами правильного n-мерного *симплекса*, коль скоро все попарные расстояния между ними равны одному и тому же числу. Многогранник

$$\operatorname{conv}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n+1}\}$$

мы будем называть *правильным n-мерным симплексом*. Зафиксируем произвольный набор вершин симплекса — скажем, $\vec{x}_{i_1}, \ldots, \vec{x}_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Мы будем говорить, что выпуклая оболочка этих вершин образует $(k-1)$-*мерную грань* симплекса.

Во-первых, ничего не стоит привести пример множества вершин правильного симплекса в $\mathbb{R}^n$ (см. [1]). Во-вторых, довольно просто понять, что если бы мы захотели построить правильный симплекс с $n+2$ вершинами, то нам бы это не удалось. При этом всё сказанное прекрасно коррелирует с тем, с чем мы постоянно сталкивались, изучая $\mathbb{R}^n$ при $n \leqslant 3$: отрезок, правильный треугольник и тетраэдр суть очевидные «прародители» правильного симплекса. Заметим, что грани иной раз могут превращаться в стороны (при $k=2$) и даже в вершины (при $k=1$). Смысл вычитания единицы из k при определении размерности грани ясен: разумно ведь считать любую точку нульмерной, любой отрезок одномерным и т. д. Грани размерности $n-1$ иногда ещё называют *гипергранями* или *фасетами*. Понятно, что граней размерности $k-1$ в симплексе ровно C_{n+1}^k. В частности, в симплексе имеется $n+1$ гипергрань — по числу вершин. Наконец, диаметр симплекса — это длина его стороны.

Определение. Пусть набор чисел $a_1, \ldots, a_n$ содержит ненулевые элементы. Тогда множество векторов $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b,$$

где b — некоторое фиксированное число, образует *гиперплоскость*.

Гиперплоскость обобщает прямую в $\mathbb{R}^2$ и плоскость в $\mathbb{R}^3$.

Легко убедиться в том, что любая гипергрань симплекса однозначно задаёт гиперплоскость, которая через неё проходит (её содержит). Таким образом, каждый правильный симплекс определяет $n+1$ гиперплоскость в пространстве (очевидно, эти гиперплоскости различны). Зафиксируем одну из вершин $\vec{x}_i$ симплекса $\mathscr{A}$; через неё проходит ровно n гиперплоскостей, определённых симплексом. Нетрудно видеть, что эти гиперплоскости разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n частей, в одной из которых лежит исходный симплекс. Назовём эту часть *n-мерным многогранным углом, имеющим вершину в $\vec{x}_i$ и порождённым симплексом $\mathscr{A}$* (см. главу 5). Ясно, что мы имеем дело с обычным углом на плоскости и с многогранным углом в $\mathbb{R}^3$, коль скоро в приведённом определении ограничиваемся случаями $n=2$ и $n=3$.

Теперь мы хотим определить многомерный аналог квадрата и куба. Мы уже делали это в брошюре [1]. Однако мы повторим необходимые слова и здесь.

Определение. Единичным *n-мерным кубом* (который мы обозначим $[0, 1]^n$) мы будем называть выпуклую оболочку множества всех 2^n $(0, 1)$-векторов в $\mathbb{R}^n$ (т. е. векторов, имеющих координаты 0 или 1). Сами $(0, 1)$-векторы мы будем называть (в данном контексте) *вершинами* единичного куба. Произвольный куб (скажем, $\mathscr{K}$) будет тогда получаться из единичного посредством преобразований «сжатия» и параллельного переноса: $\mathscr{K} = k \times [0, 1]^n + \vec{x}$, где $k > 0$ — произвольный коэффициент, отвечающий за сжатие (раздувание), а $\vec{x}$ — произвольный n-мерный вектор, за счёт которого осуществляется перенос. При этом равенство между множествами понимается в том смысле, что каждый вектор $\vec{y}$ в $\mathscr{K}$ может быть представлен в виде $\vec{y} = k\vec{z} + \vec{x}$, где, в свою очередь, $\vec{z} \in [0, 1]^n$ (и наоборот, $k\vec{z} + \vec{x} \in \mathscr{K}$ для каждого $\vec{z} \in [0, 1]^n$).

Определение. Пусть дано некоторое множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что точка $\vec{x} \in \mathscr{A}$ является *внутренней* точкой множества $\mathscr{A}$, если существует шар достаточно маленького радиуса с центром в $\vec{x}$, целиком содержащийся в $\mathscr{A}$. Если точка $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ такова, что сколь угодно малый шар с центром в ней имеет непустое пересечение как с $\mathscr{A}$, так и с его дополнением $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}$, то эта точка называется *граничной* для $\mathscr{A}$. Совокупность всех внутренних точек множества $\mathscr{A}$ мы будем обозначать $\operatorname{Int} \mathscr{A}$ и называть *внутренностью* или *мясом* $\mathscr{A}$. Совокупность же граничных точек для $\mathscr{A}$ — это *граница* (*шкура*) $\partial\mathscr{A}$ множества $\mathscr{A}$. Если $\operatorname{Int} \mathscr{A}$ непусто, то мы скажем, что $\mathscr{A}$ — *тело*. Если $\operatorname{Int} \mathscr{A} = \mathscr{A}$, то $\mathscr{A}$ — *открытое* множество (его граница ему не принадлежит). Если же дополнение к $\mathscr{A}$ открыто, то $\mathscr{A}$ *замкнуто* (оно полностью содержит свою границу).

В разделе задач мы рассмотрим несколько вопросов, которые позволят лучше прочувствовать только что введённые понятия.

Определение. Пусть $\mathscr{A}$ — выпуклое тело, а $\vec{x} \in \partial\mathscr{A}$. Рассмотрим множество всех гиперплоскостей, проходящих через точку $\vec{x}$. Некоторые из них проходят через внутренность $\mathscr{A}$, а некоторые — нет. Назовём последние *опорными* гиперплоскостями к $\mathscr{A}$ в точке $\vec{x}$*) (они таковы, что множество $\mathscr{A}$ лежит «по одну сторону» от каждой из них). Если для любого $\vec{x} \in \partial\mathscr{A}$ опорная гиперплоскость к $\mathscr{A}$ в $\vec{x}$ единственна, то $\mathscr{A}$ называется *телом с гладкой границей* или просто *гладким телом*.

Смысл понятия опорной гиперплоскости легче всего иллюстрировать в $\mathbb{R}^2$. Там речь пойдёт об *опорной прямой*. Примеры

*) Вообще-то, нужно доказывать существование опорных гиперплоскостей, но в данном случае оно обусловлено выпуклостью.

множеств с гладкой и негладкой границей показаны на рис. 18. Ясно, что в случае гладких множеств опорные прямые суть касательные. Поэтому в общем случае также говорят о *касательных гиперплоскостях*.

Рис. 18

Назовём две гиперплоскости *параллельными*, если у них нет общих точек. Можно показать, что если $\mathscr{A}$ — выпуклое тело и $\vec{x}\in\partial\mathscr{A}$, то для любой опорной гиперплоскости к $\mathscr{A}$ в точке $\vec{x}$ найдётся и притом единственная параллельная ей опорная гиперплоскость к $\mathscr{A}$. Это утверждение особенно понятно в случае $\mathbb{R}^2$. Пусть $\vec{x}=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, соответствующая опорная гиперплоскость задаётся условием $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=0$, а опорная гиперплоскость, параллельная ей, — условием $a_1'x_1+\ldots+a_n'x_n+b'=0$. *Шириной* тела $\mathscr{A}$ в точке $\vec{x}$ мы будем называть *расстояние* между нашими гиперплоскостями, определяемое, например, по формуле

$$\frac{|a_1'x_1^0+\ldots+a_n'x_n^0+b'|}{\sqrt{(a_1')^2+\ldots+(a_n')^2}}.$$

Интуитивно не совсем ясно, почему речь идёт именно о расстоянии. Однако, если провести аналогии с $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, то становится немного легче. А вот уж почему ширина — это расстояние между параллельными гиперплоскостями, вполне понятно.

Определение. Множество $\mathscr{A}$ называется *выпуклым телом постоянной ширины*, если, во-первых, оно является выпуклым телом и, во-вторых, его ширина не зависит от точки $\vec{x}\in\partial\mathscr{A}$.

Самым простым примером выпуклого тела постоянной ширины может служить шар (см. задачи).

Определение. Рассмотрим некоторое множество $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^n$. Пусть $O\in\mathbb{R}^n$ — фиксированная точка, а $\vec{x}$ — произвольная точка в $\mathscr{A}$. Рассмотрим отрезок, соединяющий O с $\vec{x}$. Пусть r — это длина нашего отрезка. Возьмём на нём точку $\vec{y}$, отстоящую от O на расстояние λr, где $\lambda\in(0,1)$ — произвольное число. В результате проведения такой операции с каждой точкой $\vec{x}\in\mathscr{A}$ получится новое множество $\mathscr{A}'$, которое называется *гомотетичной копией* множества $\mathscr{A}$ с *центром гомотетии* O и *коэффициентом гомотетии* λ.

Данное определение совершенно естественно, если сравнить его с двумерными и трёхмерными аналогами. Легко видеть, что

$$\operatorname{diam}\mathscr{A}'=\lambda\operatorname{diam}\mathscr{A}<\operatorname{diam}\mathscr{A}.$$

Определение. Пусть $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что ℓ — это *прямая*, проходящая через $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если ℓ — это множество точек вида $\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Это определение прямой, как всегда, прекрасно коррелирует с общеизвестным. В частности, прямая содержит отрезок от $\vec{x}$ до $\vec{y}$.

Определение. Пусть даны точки $\vec{x}$, $O\in\mathbb{R}^n$ и прямая

$$\ell=\{\lambda\vec{x}+(1-\lambda)O\},$$

проходящая через них. Тогда говорят, что точка $\vec{x}'=-\vec{x}+2O\in\ell$ *симметрична* точке $\vec{x}$ относительно O. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое множество и существует такая точка $O\in\mathbb{R}^n$, что для любого $\vec{x}\in\mathscr{A}$ точка $\vec{x}'$, симметричная $\vec{x}$ относительно O, принадлежит $\mathscr{A}$. Тогда множество $\mathscr{A}$ называется *центрально-симметричным*, а точка O — *центром симметрии*.

Приведённых определений хватит для обсуждения результатов, сформулированных в предыдущей главе. Более того, мы даже способны теперь изложить ещё несколько замечательных фактов, связанных с историей гипотезы Борсука. Излагая эту историю, мы заметили, что гипотеза была доказана для множеств из обширных классов. Что же это за классы? Во-первых, в 1947 году Г. Хадвигер установил, что любое множество с гладкой границей может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра, и тогда казалось, что до решения проблемы совсем недалеко: стоит только покрыть произвольное множество достаточно близким к нему гладким телом, разбить последнее и, подобно тому, как у нас это получалось в случае универсальных покрышек и покрывающих систем, прийти к выводу, что и само исходное множество допускает надлежащее разбиение. К сожалению, описанный подход реализовать невозможно: отсюда и контрпримеры. С другой стороны, гипотеза была доказана для центрально-симметричных множеств, которые уже вовсе не обязаны быть гладкими. В книжке [2] кое-что из сказанного есть, и мы не станем вдаваться здесь в подробности.

19. Докажите, что куб $[0,1]^n$ можно определить как множество точек $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющих условию

$$0\leqslant\max_{i=1,\ldots,n}x_i\leqslant1.$$

Является ли куб выпуклым? замкнутым?

20. Докажите, что сфера — это шкура шара. Что является внутренностью шара? куба?

21. Является ли куб телом с гладкой границей? А симплекс?

22. При каких $\alpha>0$ множество

$$\mathscr{A}=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\colon |x_1|^\alpha+\ldots+|x_n|^\alpha\leqslant1\}$$

выпукло? Будет ли такое множество центрально-симметричным? гладким?

23. Докажите, что треугольник Рело (см. рис. 17) является множеством постоянной ширины на плоскости. Существуют ли множества постоянной ширины в $\mathbb{R}^2$, отличные от круга и треугольника Рело?

24. Куб и симплекс — это множества постоянной ширины? А множество $\mathscr{A}$ из задачи 22?

25. Докажите, что диаметр тела постоянной ширины совпадает с его шириной.

26. Пусть B_1, B_2 — шары с общим центром и радиусами r_1, r_2 ($r_1 > r_2$). Рассмотрим $\mathscr{A} = B_1 \setminus B_2$. Будет ли $\mathscr{A}$ выпуклым? центрально-симметричным? замкнутым?

27. Докажите, что вершины правильного n-мерного симплекса, имеющего диаметр 1, лежат на сфере радиуса $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$.

28*. Докажите, что величина $f(n)$ не изменится, если изначально рассматривать только выпуклые замкнутые тела.

29*. Пусть $Q^n \subset \mathbb{R}^n$ — это множество всех векторов с рациональными координатами. Что такое ∂Q^n?

9. ОЦЕНКА $f(n) \geqslant n+1$ И ПРОБЛЕМА БОРСУКА ДЛЯ ШАРА

В седьмой главе мы говорили, что совсем просто установить неравенство $f(n) \geqslant n+1$. Это и впрямь так, ибо теперь мы знаем, что такое правильный n-мерный симплекс и множество его вершин. Если мы возьмём это самое множество и попытаемся разбить его на n частей, то, конечно же, найдётся хотя бы одна часть, в которой вершин по крайней мере две. Стало быть, и разбиение заведомо не обладает нужным свойством. Заметим, что мы сделали в точности то же, что и при $n \leqslant 3$, ведь, как мы уже говорили в предыдущей главе, симплекс есть прямое обобщение отрезка, правильного треугольника и правильного тетраэдра в соответствующих «школьных» размерностях. Несмотря на то, что геометрия многомерная, ничего не изменилось — значит, и с интуицией у нас всё не столь плохо.

Сейчас мы опишем оптимальное разбиение шара на $n+1$ часть меньшего диаметра. Оно тоже будет крайне похожим на своих не более чем трёхмерных предшественников («значок Мерседеса» и вписанный тетраэдр).

Итак, пусть B — шар, S — ограничивающая его сфера, а O — его центр. Рассмотрим произвольный правильный симплекс

$$R = \mathrm{conv}\,\{A_1, \ldots, A_{n+1}\},$$

вершины которого лежат на S (ср. задачу 27). Положим

$$R_i = \mathrm{conv}\,\{O, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n+1}\}.$$

По многограннику R_i и его вершине O можно определить n-мерный многогранный угол U_i точно так же, как это было сделано для правильного симплекса в предыдущей главе. Если для каждого i взять $B \cap U_i$, то получится разбиение шара на $n+1$ часть. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что это разбиение — искомое.

Заметим напоследок, что Борсук ещё в 1932 году доказал невозможность разбиения шара B на n частей меньшего диаметра. Это весьма тонкий результат, также дающий оценку $f(n) \geqslant n+1$.

10. ОЦЕНКА $f(n) \leqslant (2[\sqrt{n}+1])^n$

Здесь мы воспользуемся стандартной идеей *универсальной покрышки*, к помощи которой мы уже не раз прибегали. В данном случае роль покрышки будет играть куб. В самом деле, нетрудно показать, что всякое множество $\mathscr{A}$ диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ может быть покрыто некоторым кубом диаметра $\sqrt{n}$, т. е. кубом вида $[0, 1]^n + \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Мы оставим довольно рутинное (хотя и простое) доказательство читателю, а сами перейдём к разбиению куба на надлежащее число частей. Для пущей технической ясности мы даже увеличим куб и рассмотрим, соответственно,

$$\mathscr{K}_1 = \frac{[\sqrt{n}+1]}{\sqrt{n}} \times [0, 1]^n$$

(прибавлять какой-либо вектор не имеет смысла, так как дальнейшие действия от этого зависеть не будут). Рассмотрим в то же время куб-кирпичик

$$\mathscr{K}_2 = \frac{1}{2\sqrt{n}} \times [0, 1]^n.$$

Теперь, фиксируя произвольный вектор вида

$$\vec{a} = \left(\frac{a_1}{2\sqrt{n}}, \ldots, \frac{a_n}{2\sqrt{n}}\right), \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant 2[\sqrt{n}+1]-1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

применим преобразование параллельного переноса к кубику $\mathscr{K}_2$: $\mathscr{K}_2 \mapsto \mathscr{K}_2 + \vec{a}$. Непосредственная проверка показывает, что в результате мы получим $(2[\sqrt{n}+1])^n$ копий нашего кирпичика, причём объединение этих копий совпадёт с $\mathscr{K}_1$. Пользуясь исключительно одним определением расстояния в $\mathbb{R}^n$, убеждаемся, что между любыми двумя точками внутри всякого кирпичика расстояние не превосходит $1/2 < 1$, и всё в порядке.

Конечно, мы, с одной стороны, провели довольно грубое рассуждение. Ясно ведь, что мы взяли слишком маленький кирпичик: даже если мы увеличим его диаметр почти вдвое, результат останется прежним. Следовательно, и оценка $f(n) \leqslant (\sqrt{n}+1)^n$ вполне достижима. Однако, с другой стороны, сам тот факт, что в качестве покрышки мы взяли куб, тоже свидетельствует о грубости нашего подхода, и в этом мы вскоре убедимся.

11. НЕРАВЕНСТВА $f(n)\leqslant 2^n$ И $f(n)\leqslant 2^{n-1}+1$

В этой главе мы прибегнем к помощи всё тех же универсальных покрышек. Идея использования их, как видно, настолько глубока, что при всей своей кажущейся простоте она влечёт весьма и весьма нетривиальные следствия не только при $n\leqslant 3$, но и в совершенно общем случае. Желая отыскать покрышку, мы, естественно, пытаемся рассматривать, по возможности, наименее сложно устроенные множества. В прошлой главе речь шла о кубе. Но куб, так сказать, несколько «угловат», и он захватывает, тем самым, слишком много лишнего пространства. В результате нам приходится разбивать пустоты, а вовсе даже не исходное множество. Какое бы тогда придумать тело, которое покрывало бы любое множество диаметра 1, выглядело бы попроще, да к тому же ещё и «поплотнее облегало» покрытое множество? Конечно, в первую очередь в голову приходит обратиться к шару. И действительно, шар очень удобен. Еще в 1901 году Х. Юнг доказал следующую замечательную теорему.

Теорема. Всякое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ покрывается шаром радиуса

$$Y(n)=\sqrt{\frac{n}{2n+2}}.$$

Теорему Юнга можно доказывать различными способами, но каждый из них требует, к сожалению, довольно много места, каковым мы не располагаем. Мы поступим так: во-первых, предложим читателю попытаться самостоятельно доказать теорему (см. задачи 31 и 32); во-вторых, сошлёмся на книжку [3], где теорема доказана; в-третьих, мы откомментируем теорему, исходя из накопленного материала. В самом деле, в задаче 6 главы 4 и в задаче 11 главы 5 читателю уже предлагалось доказать частные случаи теоремы Юнга. Сперва речь шла о покрытии произвольного плоского множества кругом радиуса $1/\sqrt{3}$, потом — о покрытии трёхмерного множества шаром радиуса $\sqrt{3/8}$. Однако, если мы подставим в выражение $Y(n)$ двойку и тройку вместо n, то мы и получим упомянутые величины. Правда, в задачах 7 и 12 из тех же глав 4 и 5 мы говорили о том, что шара не хватит для решения проблемы Борсука в соответствующих размерностях. Ну, так и сейчас мы не утверждаем, что шар — это предел мечтаний. Просто в дальнейшем мы убедимся, насколько, с точки зрения нашей задачи, он лучше куба. В то же время из задачи 27 главы 8 мы

знаем (ср. главу 9), что вершины правильного симплекса диаметра 1 лежат как раз на границе шара радиуса $Y(n)$. Это означает, что симплекс — в некотором роде наихудшее множество: если каждое множество «шаром Юнга» покрывается, то симплекс нельзя покрыть меньшим шаром (ср. задачу 31).

С помощью теоремы Юнга удаётся доказать оценку $f(n)\leqslant 2^n$. Для этого нужно разбить шар B радиуса $Y(n)$ на 2^n частей диаметра меньше 1. Делается это так. Во-первых, считаем, не ограничивая общности, что центр шара — это точка $O=(0,\ldots,0)$. Далее, берём гиперплоскости $\{x_i=0\}$, $i=1,\ldots,n$. Эти гиперплоскости разбивают пространство на $m=2^n$ частей $U_1,\ldots,U_m$ (ср. случаи с $n=2, 3$, когда дело сводится к координатным прямым и плоскостям). Нетрудно видеть, что, поскольку радиус шара при любом n строго меньше величины $1/\sqrt{2}$, диаметры (одинаковых) частей $U_i\cap B$, разбивающих шар, меньше единицы.

Неравенство Лассака $f(n)\leqslant 2^{n-1}+1$ требует дополнительных соображений. Пусть множество $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}\mathscr{A}=1$, покрыто шаром Юнга B. Можно, как и прежде, считать, что центр B — это O. Ясно, что $\mathscr{A}$ всегда можно так «пошевелить» внутри B, чтобы $\mathscr{A}\cap\partial B\neq\varnothing$. Пусть $\vec{x}\in\mathscr{A}\cap\partial B$. Тогда любая точка из $\mathscr{A}$ принадлежит шару B' радиуса 1 с центром в $\vec{x}$. Таким образом, $\mathscr{A}\subset B\cap B'$, причём можно считать, что

$$\vec{x}=\{0,\ldots,0,Y(n)\}$$

(нетрудно понять, что геометрия множества $B\cap B'$ не зависит от положения точки $\vec{x}$). Теперь следует взять гиперплоскость $\{x_n=\varepsilon\}$, где $\varepsilon\in(0,Y(n))$ — параметр, который будет выбран оптимально в конце рассуждения. Гиперплоскость разбивает $B\cap B'$ на две части, в одной из которых лежит $\vec{x}$. Назовём эту часть B_1, а оставшуюся часть — B_1'. Рассмотрим гиперплоскости

$$\{x_i=0\}\,,\quad i=1,\ldots,n-1.$$

Они, очевидно, разбивают B_1' на $m=2^{n-1}$ частей $B_2,\ldots,B_{m+1}$. В результате мы имеем разбиение нашей универсальной покрышки $B\cap B'$ на нужное число частей $B_1,\ldots,B_{m+1}$. Покажите самостоятельно, что параметр ε можно подобрать так, чтобы $\operatorname{diam}B_i<1$ для каждого i.

Всё, что мы хотели доказать в этой главе, мы доказали. Заметим, что покрышка Лассака уже рассматривалась нами в задачах 8 и 13 из глав 4 и 5 соответственно. На рис. 19 показано разбиение множества $B\cap B'$ на пять частей.

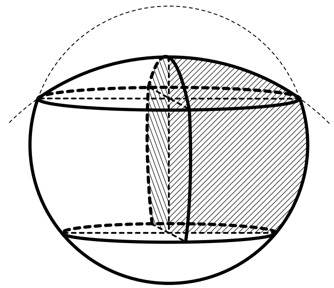


Рис. 19

30*. Докажите, что при разбиении $B \cap B'$ величину ε можно подобрать так, чтобы

$$\operatorname{diam} B_i \leqslant \sqrt{\frac{4n^2+\sqrt{8n^2+1}-1}{4n^2+4n}} < 1.$$

для каждого i.

31*. Докажите один из вариантов классической теоремы Хелли: если любое подмножество в множестве $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из не более чем $n+1$ точки, покрывается шаром радиуса r, то и само множество $\mathscr{A}$ покрывается шаром радиуса r.

32*. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите теорему Юнга.

12. НЕРАВЕНСТВО ШРАММА

В этой главе мы расскажем о том, на чём основано доказательство оценки $f(n) \leqslant \left(\sqrt{3/2}+o(1)\right)^n$, полученной О. Шраммом в 1988 году. Разумеется, у нас нет возможности изложить здесь само доказательство даже схематично. Оно опирается на достаточно нетривиальные факты анализа и теории вероятностей. Однако удивительным образом оно связано с двумя другими — по сути, совпадающими — задачами комбинаторной геометрии. Эти задачи представляют немалый самостоятельный интерес, и потому мы кое-что сперва скажем о них, а уж тогда и связь с нашей основной проблемой станет очевидна.

Рассмотрим произвольное замкнутое выпуклое тело $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ с $\operatorname{diam} \mathscr{A} = 1$. Положим $h(\mathscr{A})$ равным минимальному числу гомотетичных копий $\mathscr{A}$ с коэффициентом гомотетии $\lambda \in (0, 1)$, которыми $\mathscr{A}$ может быть покрыто. Иными словами, мы пытаемся отыскать наименьшее количество тел $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_h$, гомотетичных $\mathscr{A}$ и обладающих свойством

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_h.$$

Понятно, что ситуация весьма близка к той, с которой мы имели дело и в рамках задачи Борсука, и в рамках задачи Грюнбаума. Только если раньше мы либо разбивали тело на абы какие части, либо покрывали его геометрически никак не связанными с ним шарами, то теперь мы покрываем его телами, полученными из него же посредством вполне конкретного и притом совсем простого преобразования. Ясно, что работать с $h(\mathscr{A})$ гораздо проще, чем с $f(\mathscr{A})$, и при этом легко видеть, что $f(\mathscr{A}) \leqslant h(\mathscr{A})$. Тем самым, если оценить $h(\mathscr{A})$ сверху должным образом, то такая же оценка будет верна и для «числа Борсука».

Из задачи 28* главы 8 мы знаем, что

$$f(n) = \max_{\mathscr{A}} f(\mathscr{A}),$$

где любое тело $\mathscr{A}$ выпукло и замкнуто. Точно так же можно, конечно, определить и $h(n)$. Стало быть, $h(n)$ — это минимальное число гомотетичных копий с коэффициентом гомотетии меньше 1, которыми покрывается произвольное наперёд заданное тело. Опять-таки $f(n) \leqslant h(n)$.

Задача о нахождении величины $h(n)$ была поставлена в 1960 году И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом. Чуть ранее (в 1957 году) Г. Хадвигер начал изучать *задачу освещения*. Пусть, как и прежде, тело $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, замкнуто и имеет диаметр 1. Говорят, что направление, заданное прямой $\ell = \{\lambda \bar{y}\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$, освещает границу $\mathscr{A}$ в точке $\bar{x} \in \partial\mathscr{A}$, если $\bar{x}+\lambda\bar{y} \in \operatorname{Int} \mathscr{A}$ при некотором положительном λ. Если представить себе плоский или же трёхмерный случай, то станет ясно, в чём тут дело: по существу, речь идёт об освещении границы тела пучками параллельных прямых, причём точка считается освещённой, если она — первая точка тела, на которую упал свет, идущий по соответствующей прямой ($\lambda > 0$), и если свет не прошел её «по касательной», а попал, пройдя её, «в мясо» $\mathscr{A}$ (скажем, когда мы освещаем квадрат на плоскости направлением, заданным прямой, которая параллельна двум каким-нибудь его сторонам, очевидно, что ни одна из точек, лежащих на этих сторонах, не освещена). Как обычно, введём некоторую числовую характеристику тела, отвечающую на сей раз за «качество» освещения его границы. Пусть $i(\mathscr{A})$ — это минимальное число направлений в $\mathbb{R}^n$, таких, что каждая точка $\bar{x} \in \partial\mathscr{A}$ освещена одним из них. Величина $i(\mathscr{A})$ называется *числом освещения* тела $\mathscr{A}$. По аналогии с прежними ситуациями рассмотрим число

$$i(n) = \max_{\mathscr{A}} i(\mathscr{A}).$$

Довольно легко показать, что для любого тела $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^2$ числа $h(\mathscr{A})$ и $i(\mathscr{A})$ совпадают (см. [2]). На самом же деле это верно и в произвольной размерности. Соответствующую теорему доказал в 1960 году В. Г. Болтянский. Таким образом, $f(n) \leqslant h(n) = i(n)$.

Если рассмотреть какой-либо n-мерный куб $\mathscr{K}$, то нетрудно увидеть, что $h(\mathscr{K}) = i(\mathscr{K}) = 2^n$ (каждую вершину куба необходимо освещать отдельным направлением). С одной стороны, Хадвигер, Гохберг и Маркус высказали гипотезу, что $i(n) \leqslant 2^n$. Поразительно, но эта гипотеза до сих пор никем не доказана и не опровергнута (см. конец главы). Однако, с другой стороны, даже если мы допустим, что гипотеза верна, всё равно с точки зрения Борсука ничего хорошего мы не получим, ведь оценку $f(n) \leqslant 2^n$ мы и так знаем: она весьма проста, и для её обоснования вовсе не требуется решать проблему освещения. К чему же тогда все наши рассуждения? Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякое выпуклое тело $\mathscr{A}$ в $\mathbb{R}^n$, имеющее диаметр 1, покрывается некоторым телом $\mathscr{W}$ постоянной ширины, у которого и ширина, и диаметр равны единице. Иными словами, совокупность всех тел постоянной ширины 1 образует (бесконечную) универсальную покрывающую систему в $\mathbb{R}^n$.

В то же время Шрамм доказал такой глубокий факт: если $\mathscr{W}$ — тело постоянной ширины, то $i(\mathscr{W})\leqslant\left(\sqrt{3/2}+o(1)\right)^n$. Что отсюда следует? Ну, во-первых, $h(\mathscr{W})$ тоже не превосходит $\left(\sqrt{3/2}+o(1)\right)^n$. Во-вторых, если $\mathscr{A}$ — произвольное выпуклое тело, то по теореме найдётся $\mathscr{W}$, покрывающее $\mathscr{A}$ и имеющее тот же диаметр. Ясно, что $f(\mathscr{W})\leqslant h(\mathscr{W})\leqslant\left(\sqrt{3/2}+o(1)\right)^n$, а значит, $f(\mathscr{A})$ и вместе с ним $f(n)$ оцениваются так, как оно и было обещано.

В завершение главы добавим ещё несколько слов о проблеме освещения. Мы знаем теперь, что для тел постоянной ширины эта проблема решена, и даже, более того, в ней получены весьма хорошие оценки (правда, n должно быть достаточно велико). Для центрально-симметричных тел она также почти «дожата»: К. А. Роджерс показал в 1965 году, что если $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^n$ центрально-симметрично, то

$$i(\mathscr{A})\leqslant 2^n(n\ln n+n\ln\ln n+5n).$$

Особенно же поразительно то, что и в размерности 3 гипотеза Хадвигера—Гохберга—Маркуса до сих пор не доказана и не опровергнута. Наконец, в общем случае известно лишь, что

$$i(n)\leqslant(n+1)^n.$$

13. НЕРАВЕНСТВА РОДЖЕРСА И БУРГЕЙНА—ЛИНДЕНШТРАУССА

Как мы знаем, оценка Шрамма была передоказана Ж. Бургейном и Й. Линденштрауссом в 1991 году. Казалось бы, какой в том прок? Ведь оценка однажды уже получена. К чему бы получать её снова? Однако смысл был, и очень большой. Дело в том, что если Шрамм обосновывал свой результат, исходя из нового неравенства в проблеме освещения, то Бургейн и Линденштраусс пользовались совершенно иным соображением: они апеллировали к *задаче Грюнбаума*, и, в частности, им удалось установить относительно неё самые точные факты среди известных к настоящему времени.

Напомним, что задача Грюнбаума состоит в отыскании минимального числа $g_d(n)$ шаров диаметра d, которыми может быть покрыто произвольное множество диаметра 1 в пространстве. Конечно, когда в главе 5 мы говорили об этой задаче, речь шла только о малых размерностях, но ничего ведь не изменится, если мы формально озвучим то же определение и при $n\geqslant 4$.

Пусть $d=1$. Мы прекрасно понимаем, что и в этих условиях задача Грюнбаума весьма нетривиальна: разумеется, теорема Юнга

говорит нам о том, что всякое множество диаметра 1 покрывается шаром радиуса примерно $1/\sqrt{2}$, но так у этого шара диаметр куда как больше единицы. А в то же время есть правильный симплекс, который меньшим шаром покрыть нельзя (см. задачу 27 главы 8). Таким образом, нахождение величины $g_1(n)$ есть вполне разумная и, вероятно, сложная задача. С другой стороны, если мы покроем множество $g_1(n)$ шарами того же диаметра, то мы его и на $(n+1)g_1(n)$ частей меньшего диаметра без труда разобьём: шар-то на $n+1$ часть надлежащего вида, как известно, разбивается. Стало быть, $f(n)\leqslant(n+1)g_1(n)$, и если вдруг окажется, что

$$g_1(n)\leqslant\left(c+o(1)\right)^n,\quad \text{где } c>1,$$

то и с $f(n)$ дела будут обстоять не хуже ($o(1)$ — это ведь всё, что угодно: лишь бы оно к нулю стремилось*)).

Историю константы c, которая возникла в предыдущем абзаце, мы фактически уже знаем. А именно, сперва был К. А. Роджерс, который оценил c величиной $\sqrt{2}$, а затем Бургейн с Линденштрауссом добились бо́льшего успеха, доказав неравенство $c\leqslant\sqrt{3/2}$. Тем самым, и Роджерс, и Бургейн действовали одинаково, применяя к проблеме Борсука результаты о проблеме Грюнбаума.

В сущности, Роджерс установил следующий важный факт: шар радиуса r можно покрыть $\left(r/\rho+o(1)\right)^n$ шарами радиуса $\rho<r$. Этот факт крайне непрост, и относится он, вообще-то, к такой очень красивой геометрической науке, которая называется *теорией плотнейших упаковок и покрытий*. Как следствие, шар Юнга может быть покрыт $\left(\sqrt{2}+o(1)\right)^n$ шарами диаметра 1, откуда и вытекает соответствующая оценка на $f(n)$. В свою очередь, Бургейн и Линденштраусс реализовали более тонкую программу. Они рассмотрели два случая: либо множество покрывается шаром радиуса $\sqrt{3/8}$, либо нет. В первом случае они применили технику Роджерса, что тотчас же привело их к искомой оценке. Во втором же случае они сумели уточнить роджерсовский результат, который в целом неулучшаем, и это далось им немалой ценой.

Разумеется, мы не станем вдаваться здесь в какие-либо дальнейшие подробности метода. Заметим только, что при всей своей нетривиальности и технической сложности он довольно груб: с какой стати, в самом-то деле, покрывать множество именно шарами? К сожалению, метод Шрамма груб в не меньшей степени, — разве что там мы используем не шары, а гомотетичные копии исходных тел. Поразительно, что и Шрамм, и Бургейн абсолютно разными

*) Тут имеется аналитическая тонкость, которую тяжело обойти, не владея в достаточной мере теорией пределов. Главное — понимать, что функция $n+1$ растёт значительно медленнее экспоненты, а значит, и влияние её столь же несущественно, как и влияние «о малых».

путями приходят к совершенно одинаковым оценкам, но то, что эти оценки остаются слабыми, вовсе не удивительно. Особенно интересно тут, кстати сказать, что те же Бургейн и Линденштраусс установили неравенство $g_1(n) \geqslant (1{,}067 + o(1))^n$. Это означает, что с проблемой Грюнбаума всё гораздо легче, чем с проблемой Борсука, ведь если в случае с $g_1(n)$ мы знаем, что

$$(1{,}067 + o(1))^n \leqslant g_1(n) \leqslant \left(\sqrt{3/2} + o(1)\right)^n ,$$

т. е. что зазор между верхней и нижней оценками сравнительно невелик (всё упирается в подсчёт константы в основании экспоненты), то в случае с $f(n)$ известно лишь, что

$$(1{,}2255 + o(1))^{\sqrt{n}} \leqslant f(n) \leqslant \left(\sqrt{3/2} + o(1)\right)^n .$$

14. КОНТРПРИМЕРЫ К ГИПОТЕЗЕ БОРСУКА

В предыдущих главах мы постарались максимально подробно изложить большинство из доказанных к настоящему времени положительных фактов относительно гипотезы Борсука. Очевидно, что фактов много и что, более того, направлений для дальнейшей деятельности предостаточно. Однако всему когда-нибудь приходит конец, и, хотя в нашем случае его наступление скорее «безвременно», ибо обусловлено оно сравнительно невысоким уровнем нашей подготовки, всё же мы иссякли, и пора нам заняться отрицательными результатами — построением контрпримеров к гипотезе и доказательством нижних оценок вида $f(n) \geqslant (c + o(1))^{\sqrt{n}}$. И тут мы снова столкнёмся с нетривиальной комбинаторно-геометрической природой нашей задачи: если прежде мы имели дело и с чистой геометрией, и с комбинаторикой, то теперь комбинаторный аспект проблемы раскроется, так сказать, по полной программе.

Мы однажды отмечали уже, что все отрицательные факты основаны на построении весьма любопытных конечных систем векторов в пространстве. С высоты наших новых знаний можно сказать, что, по сути, речь пойдёт о многогранниках (см. задачу 28* из главы 8). Так оно звучит геометричнее, а впрочем, разницы никакой нет: главное — опровергнуть гипотезу. Правильно было бы сказать, что комбинаторика, которую мы начнём изучать вскоре, относится к так называемой *экстремальной теории гиперграфов*. Конечно, звучит красиво, но понятнее не становится. Просто знать терминологию никогда не вредно, а смысл будет ясен и так.

Дабы сделать метод более прозрачным, мы не станем обосновывать самую «передовую» оценку $f(n) \geqslant (1{,}2255\ldots + o(1))^{\sqrt{n}}$. Вместо этого мы обсудим следующую теорему.

Теорема. Пусть p — простое число, $m = 4p$, а $n = m^2$. Тогда имеет место неравенство

$$f(n) \geqslant \frac{C_m^{2p}}{4C_m^p}.$$

Выглядит теорема совершенно комбинаторно (биномиальные коэффициенты); однако остаётся масса вопросов, и основной из них состоит даже не в том, откуда теорема взялась, но в том, почему из теоремы вытекает опровержение гипотезы. Вопрос абсолютно правомочный, и сперва мы обсудим именно его. Запишем биномиальные коэффициенты по известной всем формуле, т. е. через факториалы. Получится выражение

$$\frac{C_m^{2p}}{4C_m^p} = \frac{m!}{(2p)!(m-2p)!} \cdot \frac{p!(m-p)!}{4m!}.$$

Теперь следует применить к факториалам замечательную формулу Стирлинга, которая гласит, что с ростом натурального числа k его факториал ведет себя примерно так же, как функция

$$\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k .$$

Здесь числа π и e — это именно те числа, о которых все наверняка подумали, а строгий смысл слов «примерно так же» заложен в записи

$$k! = \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k (1 + o(1)), \quad k \to \infty.$$

Иначе говоря, отношение факториала и упомянутой функции стремится к единице, коль скоро k стремится к бесконечности. Формула Стирлинга доказывается в курсе математического анализа довольно сложно, и тем не менее кое-какие похожие результаты делаются «вручную» (см. задачи).

Итак, рутинные, но с использованием формулы Стирлинга совсем простые, выкладки показывают, что

$$\frac{C_m^{2p}}{4C_m^p} = P(m)\frac{2^m}{\left(\frac{1}{4}\right)^{m/4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3m/4}} = (1{,}139\ldots + o(1))^m.$$

Здесь $P(m)$ — это выражение, в которое входят только корни из величин вида $2\pi k$ с тем или иным k, и мы не забываем, что $p = m/4$. При этом последнее равенство следует воспринимать на интуитивном уровне, коль скоро теория пределов вызывает формальные трудности: очевидно ведь, что как $P(m)$, так и $o(1)$ крайне мало влияют на поведение экспоненты типа $(1{,}139\ldots)^m$. Таким образом, теорема утверждает, что

$$f(n) \geqslant \bigl(1{,}139\ldots + o(1)\bigr)^m = \bigl(1{,}139\ldots + o(1)\bigr)^{\sqrt{n}},$$

и всё в порядке. Здесь, кстати, можно и n подобрать, начиная с которого

$$\frac{C_m^{2p}}{4C_m^p} > n + 1.$$

К сожалению, такое n огромно (оно куда больше, чем 2014), и мы предоставляем читателю отыскать его.

Здесь есть ещё один тонкий момент, который следует подчеркнуть сразу. Дело в том, что фактически мы доказываем оценку н е д л я в с е х n, а лишь для тех, которые могут быть представлены в виде $n = m^2$ с $m = 4p$, где p — простое. Эту проблему можно преодолеть за счёт весьма нетривиальной техники, которая относится к аналитической теории чисел. Разумеется, мы не станем вдаваться в подробности, но удержаться от упоминания некоторых красивейших фактов мы не в силах. Они таковы: количество простых чисел, не превосходящих заданного числа k, ведёт себя примерно так же, как и величина $k/\ln k$ (смысл слова «примерно» прежний); найдётся такая постоянная величина c, что между k и $k + ck^{39/61}$ есть хотя бы одно простое число при любом натуральном k. Вообще, законы, которым подчиняется распределение простых чисел, крайне замысловаты, и многие задачи, связанные с ними, до сих пор не решены. Однако нам хватит и упомянутых фактов.

Наконец-то мы готовы заняться собственно комбинаторикой. Основной при доказательстве теоремы является следующая лемма.

Лемма. Пусть $\mathcal{R} = \{1, \ldots, m\}$ — множество, состоящее из m элементов. Рассмотрим в $\mathcal{R}$ произвольную совокупность подмножеств (сочетаний) $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$, обладающую свойствами: $|M_j| = 2p$ (то есть M_j — $2p$-сочетание) для каждого $j \in \{1, \ldots, s\}$; $|M_i \cap M_j| \neq p$ при любых i, j. Тогда

$$s = |\mathcal{M}| \leqslant 2C_m^{p-1} < 2C_m^p.$$

На первый взгляд, лемма совершенно невероятна. Действительно, мы взяли произвольную совокупность $2p$-сочетаний в множестве из вдвое большего числа элементов и наложили на $M_j \in \mathcal{M}$ всего одно ограничение, состоящее в том, что эти сочетания не могут пересекаться ровно по p общим элементам. Казалось бы, ограничение очень слабое. Ан нет: если без него s вполне может оказаться равным C_m^{2p}, то с ним s обязано быть в э к с п о н е н ц и а л ь н о е (как мы выяснили выше) число раз меньше. Один-единственный запрет, и совокупность катастрофически «тощает».

Лемма была доказана П. Франклом и Р. Уилсоном в 1981 году с помощью весьма тонкого и красивого *линейно-алгебраического* метода в комбинаторике. Мы не имеем возможности изложить этот метод здесь, но комментарии к лемме мы сейчас приведём.

Во-первых, если приглядеться, то можно узнать в лемме обобщение довольно хорошо известной задачи. А именно: рассмотрим в $\mathcal{R}$ не $2p$-сочетания, но 3-сочетания, никакие два из которых не пересекаются по одному общему элементу. С помощью математической индукции легко показать, что, грубо говоря, количество таких 3-сочетаний не превосходит m (см. брошюру [1] и задачи). Тем самым, один запрет опять-таки даёт сильный результат: от C_m^3 мы переходим сразу к m. Пафос подхода, предложенного Франклом и Уилсоном, как раз в том и состоит, что в их ситуации никакая индукция уже не работает. Работает линейная алгебра, которая нам, к несчастью, недоступна. Вообще, похожие задачи рассматривались давно, и поначалу никому просто не приходило в голову использовать их в комбинаторной геометрии. Еще в 60-е годы XX века многие смежные вопросы были сформулированы П. Эрдешем (ср. задачи и брошюру [1]), и именно их принято объединять термином «экстремальная теория гиперграфов» (*гиперграфом* называют совокупности множеств (вершины — элементы, а рёбра — сами множества)).

Во-вторых, оценка в лемме «почти точна». Это значит, что можно подобрать такую совокупность $\mathcal{M}$, удовлетворяющую всем условиям леммы, что в ней будет практически $2C_m^p$ элементов (см. задачи). Остаётся некоторая странность, связанная с выбором параметров: отчего мы p берём простым? Почему бы нам не взять абы какое число? Это и впрямь непонятно. Метод Франкла—Уилсона работает только в предположении простоты, а ничего лучшего никто пока не придумал.

Для наших дальнейших целей удобнее будет научиться мыслить не в терминах сочетаний, а в терминах векторов. Пусть дано какое-то $2p$-сочетание M в $\mathcal{R}$. Сопоставим ему $(0, 1)$-вектор $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, у которого $x_i = 1$, если $i \in M$, и $x_i = 0$ в противном случае. Понятно, что мощности пересечения множеств $M, N \subset \mathcal{R}$, которым сопоставлены векторы $\vec{x}, \vec{y}$, отвечает тогда величина $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$. Эту величину называют *скалярным произведением* векторов. Отметим, что, в частности,

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) - 2(\vec{x}, \vec{y})$$

(проверьте это!), причём у нас и $(\vec{x}, \vec{x})$, и $(\vec{y}, \vec{y})$ (скалярные квадраты) равны $2p$. В конечном итоге имеем новую лемму.

Лемма$'$. Пусть

$$V = \bigl\{(x_1, \ldots, x_m)\colon x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, m;\ x_1 + \ldots + x_m = 2p\bigr\}.$$

Тогда каково бы ни было множество $Q \subset V$, в котором скалярное произведение любых двух векторов не совпадает с p, мощность Q не превосходит $2C_m^{p-1}$.

Ей эквивалентна

Лемма″. Пусть

$$W = \left\{(x_1, \ldots, x_m)\colon x_i \in \{-1, 1\}\,,\ i = 1, \ldots, m;\ x_1 + \ldots + x_m = 0\right\}.$$

Тогда каково бы ни было множество $Q \subset W$, в котором скалярное произведение любых двух векторов не равно нулю, мощность Q не превосходит $2C_m^{p-1}$.

Каждому вектору $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in W$ поставим в соответствие вектор

$$\vec{x} * \vec{x} = (x_1^2,\, x_1 x_2, \ldots, x_1 x_m,\, x_2 x_1, \ldots, x_2 x_m, \ldots, x_m x_1, \ldots, x_m^2),$$

т. е. вектор, лежащий в пространстве размерности $m^2 = n$. В результате получится новое семейство векторов $W^* \subset \mathbb{R}^n$. Нетрудно видеть, что

$$|W^*| = \frac{1}{2}|W| = \frac{1}{2}C_m^{2p}$$

(векторы $\vec{x} * \vec{x}$ и $-\vec{x} * (-\vec{x})$ совпадают).

Найдём расстояние между произвольными двумя векторами $\vec{x} * \vec{x}$ и $\vec{y} * \vec{y}$ из W^* в терминах их скалярного произведения:

$$|\vec{x} * \vec{x} - \vec{y} * \vec{y}|^2 = (\vec{x} * \vec{x},\, \vec{x} * \vec{x}) + (\vec{y} * \vec{y},\, \vec{y} * \vec{y}) - 2(\vec{x} * \vec{x},\, \vec{y} * \vec{y}).$$

Понятно, что

$$(\vec{x} * \vec{x},\, \vec{y} * \vec{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j y_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right)^2 = (\vec{x}, \vec{y})^2.$$

Таким образом, расстояние между векторами $\vec{x} * \vec{x}, \vec{y} * \vec{y} \in W^*$ максимально (на векторах $\vec{x} * \vec{x}, \vec{y} * \vec{y}$ достигается диаметр W^*) тогда и только тогда, когда скалярное произведение их прообразов $\vec{x}, \vec{y} \in W$ равно нулю.

Предположим, W^* представлено в виде

$$W^* = W_1^* \cup \ldots \cup W_f^*,$$

где $\operatorname{diam} W_i^* < \operatorname{diam} W^*$ при всех i. Если

$$f < \frac{C_m^{2p}}{4C_m^p},$$

то найдётся такое i, что $|W_i^*| > 2C_m^p$. Но тогда $|W_i| > 2C_m^p$, коль скоро $W_i \subset W$ — это семейство прообразов векторов из W_i^*. Стало быть, по лемме″ в W_i существуют векторы $\vec{x}, \vec{y}$, скалярное произведение

которых — нуль, а значит, $\operatorname{diam} W_i^* = \operatorname{diam} W^*$, что невозможно. Посему

$$f(n) \geqslant f \geqslant \frac{C_m^{2p}}{4C_m^p},$$

и теорема доказана.

Стоит сказать несколько слов о том, как можно улучшать установленную нами оценку. Прежде всего, ясно, что пытаться усиливать лемму бессмысленно. Вернее, её, конечно, удастся улучшить, но все подобные улучшения повлияют лишь на вид «о малого» (и на минимальную размерность контрпримера); константа же (1,139) изменений не претерпит. Значит, нужны другие идеи.

Во-первых, есть очень простое соображение, которое, впрочем, не вполне элементарно. Дело в том, что, когда мы осуществляли переход от W к W^*, мы считали, что $W^* \subset \mathbb{R}^{m^2}$. Так-то оно, безусловно, так, да только, вообще-то, можно сказать гораздо больше: $W^* \subset \mathbb{R}^{C_m^2}$. Читателя подобное обстоятельство наверняка удивит. Действительно, как может вектор с m^2 координатами иметь более чем вдвое меньшую размерность? Но ведь если речь идёт о плоскости или об $\mathbb{R}^3$, то нас не удивляет, что некоторые множества имеют размерность 1 или 2. Примерно то же и здесь: соотношения $x_i x_j = x_j x_i$ и $x_i^2 = 1$ задают подпространство $\mathbb{R}^{m^2}$ надлежащей размерности, и этим-то всё и объясняется. Если поверить в такие нестрогие рассуждения и положить $n = C_m^2$, так что $m \approx \sqrt{2}\sqrt{n}$, то окажется, очевидно, что

$$f(n) \geqslant \left(1{,}139\ldots + o(1)\right)^{\sqrt{2}\sqrt{n}} \geqslant \left(1{,}203\ldots + o(1)\right)^{\sqrt{n}}.$$

Последнее неравенство, как мы знаем, принадлежит Кану и Калаи, оставаясь в то же время не самым лучшим из известных. Что же делать?

Можно рассмотреть такую — абсолютно общую — конструкцию. Положим

$$W = \left\{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)\colon x_i \in \{b_1, \ldots, b_r\}\,;\ \left|\{i\colon x_i = b_j\}\right| = l_j\right\}.$$

Имеется в виду, что W состоит из всевозможных векторов, у каждого из которых ровно l_1 координат совпадает с b_1, ровно l_2 координат — с b_2, и т. д. вплоть до l_r координат, равных b_r. Разумеется, $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$, и $l_1 + \ldots + l_r = m$. Понятно, что

$$|W| = \frac{m!}{l_1! \cdot l_2! \cdot \ldots \cdot l_r!}.$$

В частности, если $r = 2$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, то при подходящем значении l_1 мы возвращаемся к уже исследованной ситуации. В той ситуации для нас «критическим» было нулевое скалярное произведение. Теперь же мы и в выборе нового критического произведения, в принципе, вольны. Тут есть огромное количество разных тонкостей, повязанных на неизвестный нам линейно-алгебраический метод, и мы не станем даже пробовать рассуждать сейчас о них. Однако суть задачи ясна, и, кроме того, видно, что деятельности здесь — непочатый край. В сущности, дай Бог разобраться хотя бы с $r=3$, $b_1=-1$, $b_2=0$, $b_3=1$, и мы вернёмся к этому аспекту проблемы в разделе задач.

Заметим напоследок, что Г. М. Циглер со своими учениками доказал такой замечательный факт: в пространстве размерности $n\leqslant 9$ каждое множество, состоящее из (0, 1)-векторов, разбивается на $n+1$ часть меньшего диаметра. Стало быть, если в малых размерностях контрпримеры и найдутся, то устроены они будут не так, как их многомерные собратья.

33. Докажите, что

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n\leqslant n!\leqslant e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

34 («точность» оценки в лемме). Пусть $m=8q$, где q — любое натуральное число. Докажите, что в $\mathcal{R}=\{1,\ldots,m\}$ найдётся совокупность, состоящая из $\left(C_{4q}^q\right)^2$ $2q$-сочетаний, никакие два из которых не пересекаются по q общим элементам. С помощью формулы Стирлинга докажите, что

$$\left(C_{4q}^q\right)^2=\left(1{,}754\ldots+o(1)\right)^m \quad \text{и} \quad C_m^{2q}=\left(1{,}754\ldots+o(1)\right)^m.$$

Это будет означать, что если и можно улучшить лемму, то только на уровне бесконечно малых.

35. Рассмотрим

$$V=\left\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_m)\colon x_i\in\{0,1\}\,;\ x_1+\ldots+x_m=3\right\}.$$

Пусть $Q=\left\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_s\right\}\subset V$ таково, что $(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\neq 1$ для любых i и j. Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q.

36*. Рассмотрим

$$V=\left\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_m)\colon x_i\in\{0,1\}\,;\ x_1+\ldots+x_m=5\right\}.$$

Пусть множество $Q=\left\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_s\right\}\subset V$ таково, что $(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\neq 2$ для любых i и j. Докажите, что существует константа $c>0$, такая, что $s=|Q|\leqslant cm^2$.

37* (проблема). Пусть $m=4q$, где q — любое натуральное число. Рассмотрим

$$V=\left\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_m)\colon x_i\in\{0,1\}\,;\ x_1+\ldots+x_m=2q\right\}.$$

Пусть $Q=\left\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_s\right\}\subset V$ таково, что $(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\neq q$ для любых i и j. Какая оценка для s является наилучшей?

38* (проблема). Пусть $m=2^k$, а

$$V=\left\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_m)\colon x_i\in\{-1,0,1\}\,;\ \left|\{i\colon x_i=\pm1\}\right|=\frac{m}{2}\right\}.$$

Ясно, что $|V|=C_m^{m/2}\cdot 2^{m/2}$. А сколь велико может быть подмножество $Q\subset V$, свободное от пар векторов с нулевым скалярным произведением? В частности, если при $m=16$ окажется, что

$$|Q|\leqslant\frac{C_{16}^8\cdot 2^8}{137}$$

(а это весьма правдоподобно), то гипотеза Борсука будет опровергнута при $n\geqslant 135$.

39* (проблема). Пусть $V\subset\mathbb{R}^n$ таково, что расстояние между любыми двумя его точками есть либо a, либо b, т. е. V — это так называемое *двухдистанционное множество*. Верно ли, что $f(V)\leqslant n+1$?

40. Найдите как можно большую размерность, в которой любое множество $(-1,0,1)$-векторов разбивается на $n+1$ часть меньшего диаметра.

41 (теорема Эрдеша—Ко—Радо). Пусть любые два множества в совокупности k-сочетаний из $\{1,\ldots,m\}$ имеют непустое пересечение. Какая максимальная мощность может быть у совокупности?

42* (теорема Франкла—Уилсона—Алсведе—Хачатряна). Пусть любые два множества в совокупности k-сочетаний из $\{1,\ldots,m\}$ пересекаются не менее чем по t общим элементам. Какая максимальная мощность может быть у совокупности?

15. О СВЯЗИ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНОЙ $f(n)$ И ХРОМАТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ ПРОСТРАНСТВА

В этой, заключительной, главе мы поговорим о связи между проблемой Борсука и задачей отыскания хроматического числа пространства. Напомним (см. [1]), что в последнем случае речь идёт о минимальном числе цветов, в которые можно так раскрасить всё $\mathbb{R}^n$, чтобы одноцветные точки не могли отстоять друг от друга на расстояние 1. Иными словами, определяется величина $\chi(\mathbb{R}^n)=\min\chi$, в которой минимум берётся по всем *разбиениям* пространства, имеющим вид

$$\mathbb{R}^n=V_1\cup\ldots\cup V_\chi,$$

где для каждого $i\in\{1,\ldots,\chi\}$ и для любых двух точек $\vec{x},\vec{y}\in V_i$ выполнено $|\vec{x}-\vec{y}|\neq 1$.

Уже из приведённого определения видно, что между величинами $f(n)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$ должна быть какая-то связь. В самом деле, если в случае хроматического числа мы разбиваем всё пространство на части, «не содержащие» расстояний 1, то в проблеме Борсука мы аналогичным образом поступаем с каждым множеством диаметра 1. Естественно, возникает целая серия «промежуточных» задач. Рассмотрим произвольное множество $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}\mathcal{A}=1$, и постараемся как можно экономнее представить его в виде

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\cup\ldots\cup\mathcal{A}_\chi,$$

предполагая, что в каждом $\mathcal{A}_i$ нет пар точек, отстоящих друг от друга на данное расстояние $a\in(0, 1]$. Положим $\chi_a(\mathcal{A})=\min\chi$ (в этом-то как раз и «экономия»), далее, положим

$$\chi(n, a)=\max_{\mathcal{A}}\chi_a(\mathcal{A}).$$

Понятно, что при a, близком к единице, мы имеем аналог проблемы Борсука, а при a, близком к нулю, аналог хроматического числа пространства. Вернее, в последнем случае мы фактически будем раскрашивать всё равно не всё пространство, но те его подмножества, которые от него в некотором смысле мало отличаются, — подмножества сколь угодно большого диаметра*). Задача отыскания оценок на $\chi(n, a)$ весьма трудна и увлекательна. Мы не станем приводить здесь те результаты, которые уже известны: они достаточно громоздки, хотя и любопытны. Получены они А. М. Райгородским и М. М. Китяевым.

Заметим, далее, что все нижние оценки на $\chi(n, a)$ основаны в широком смысле на всё том же линейно-алгебраическом методе в экстремальной теории гиперграфов. Только конструкции становятся более нетривиальными и изощрёнными. Сыграть на этом удалось недавно автору настоящей брошюры. Дело в том, что мы умеем доказывать неравенства

$$f(n)\geqslant(1{,}2255\ldots+o(1))^{\sqrt{n}} \text{ и } \chi(\mathbb{R}^n)\geqslant(1{,}239\ldots+o(1))^n$$

(см. [1]); однако ничего лучшего придумать не выходит. Тем не менее задачи настолько близки, что возникает следующее удивительное утверждение.

Теорема. Существует такое $\delta>0$, что либо

$$f(n)\geqslant(1{,}2255\ldots+\delta+o(1))^{\sqrt{n}},$$

либо

$$\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant(1{,}239\ldots+\delta+o(1))^n.$$

Наверное, этим интригующим результатом и стоит закончить брошюру.

*) Идея в том, что диаметр фиксирован и a стремится к нулю — это то же самое, что $a=1$ и диаметр стремится к бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Райгородский А. М. Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.

[2] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1965.

[3] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли. — М.: Мир, 1968.

[4] Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. — М.: Гостехиздат, 1951.

[5] Хадвигер Г., Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. — М.: Наука, 1965.

[6] Роджерс К. Укладки и покрытия. — М.: Мир, 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

1. **В. М. Тихомиров** Великие математики прошлого и их великие теоремы
2. **А. А. Болибрух** Проблемы Гильберта (100 лет спустя)
3. **Д. В. Аносов** Взгляд на математику и нечто из неё
4. **В. В. Прасолов** Точки Брокара и изогональное сопряжение
5. **Н. П. Долбилин** Жемчужины теории многогранников
6. **А. Б. Сосинский** Мыльные плёнки и случайные блуждания
7. **И. М. Парамонова** Симметрия в математике
8. **В. В. Острик, М. А. Цфасман** Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые
9. **Б. П. Гейдман** Площади многоугольников
10. **А. Б. Сосинский** Узлы и косы
11. **Э. Б. Винберг** Симметрия многочленов
12. **В. Г. Сурдин** Динамика звёздных систем
13. **В. О. Бугаенко** Уравнения Пелля
14. **В. И. Арнольд** Цепные дроби
15. **В. М. Тихомиров** Дифференциальное исчисление (теория и приложения)
16. **В. А. Скворцов** Примеры метрических пространств

17. **В.Г.Сурдин**
Пятая сила

18. **А.В.Жуков**
О числе π

19. **А.Г.Мякишев**
Элементы геометрии треугольника

20. **И.В.Ященко**
Парадоксы теории множеств

21. **И.Х.Сабитов**
Объёмы многогранников

22. **А.Л.Семёнов**
Математика текстов

23. **М.А.Шубин**
Математический анализ для решения физических задач

24. **А.И.Дьяченко**
Магнитные полюса Земли

25. **С.М.Гусейн-Заде**
Разборчивая невеста

26. **К.П.Кохась**
Ладейные числа и многочлены

27. **С.Г.Смирнов**
Прогулки по замкнутым поверхностям

28. **А.М.Райгородский**
Хроматические числа

29. **С.Б.Гашков**
Системы счисления и их применение

30. **Ю.П.Соловьёв**
Неравенства

31. **В.Ю.Протасов**
Максимумы и минимумы в геометрии

32. **А.В.Хачатурян**
Геометрия Галилея

33. **А.М.Райгородский**
Проблема Борсука