Независимый московский университет

Московский центр непрерывного математического образования

Высший колледж математики

И. М. Парамонова, О. К. Шейнман

Задачи семинара «Алгебры Ли и их приложения»

МЦНМО, ВКМ НМУ 2004

Ирина Михайловна Парамонова
Олег Карлович Шейнман

И. М. Парамонова, О. К. Шейнман

Задачи семинара «Алгебры Ли и их приложения». — М: МЦНМО: ВКМ НМУ, 2004. — 48 с.

Введение

Первое издание настоящего сборника содержало задачи первых двух лет работы семинара «Алгебры Ли и их приложения», действовавшего в Независимом московском университете в 1995—98 учебных годах под руководством авторов. Настоящее второе издание дополнено задачами спецкурсов по группам и алгебрам Ли и их представлениям, прочитанных И. М. Парамоновой в последующие годы.

Авторы стремились дать элементарное и современное введение в предмет, по мере сил отобрав из современного джентльменского набора специалиста по алгебрам Ли то, что, с одной стороны, может быть наиболее легко понято студентами, а с другой — знакомит их с основными методами изучаемой науки. Для иллюстрации этих методов были выбраны приложения к комбинаторике (тождества Макдональда) и математической физике (интегрируемые системы многих тел).

Сборник охватывает классические основы теории нильпотентных, разрешимых и полупростых алгебр Ли, классификацию конечных систем корней, универсальные обертывающие алгебры, элементы теории когомологий алгебр Ли, основы теории аффинных алгебр Каца—Муди, элементы теории представлений до формулы характеров Вейля—Каца включительно, а также вышеупомянутые приложения.

Источники, которыми мы пользовались при составлении задач, перечислены в списке литературы. Среди них имеются как классические монографии, так и журнальные статьи, в том числе не слишком известные. Многие из последних попали в этот список по той причине, что с точки зрения авторов в них настолько просто излагается какой-либо интересный вопрос, что изложение вполне может быть представлено в виде последовательности задач для студентов.

1. Основные определения

Определение. *Алгеброй Ли над полем* k называется линейное пространство $\mathfrak{g}$ над k с дополнительной операцией, которая обозначается $[x, y]$, называется коммутированием (а ее результат — коммутатором или скобкой) и удовлетворяет следующим условиям:

1) билинейность над k;

2) антисимметричность: $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$;

3) тождество Якоби:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Пример. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейное пространство над k с тождественно нулевой скобкой: $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$. Такая алгебра Ли называется *коммутативной*.

1. Описать все (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли размерности 1, 2 и 3

а) над полем $\mathbb{C}$;

б) над полем $\mathbb{R}$.

2. Пусть A — ассоциативная алгебра. Положим $[x, y] = xy - yx$. Доказать, что эта операция задает на A структуру алгебры Ли (иногда эту алгебру Ли обозначают A_L). В частности, получаем следующие *классические* алгебры Ли (задачи *а—д*):

а) полная линейная алгебра $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли всех линейных операторов в n-мерном линейном пространстве V над полем k; она изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n; k)$ матриц порядка n с элементами из k (в тех случаях, когда поле k несущественно или когда нет сомнений в том, о каком именно поле идет речь, обозначение сокращается до $\mathfrak{gl}(n)$);

б) специальная линейная алгебра $\mathfrak{sl}(n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid \operatorname{tr}(x) = 0\}$;

в) ортогональная алгебра $\mathfrak{so}(n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x + x^t = 0\}$;

г) алгебры Ли над $\mathbb{R}$:

д) унитарная: $\mathfrak{u}(n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) \mid x + x^* = 0\}$;

е) специальная унитарная: $\mathfrak{su}(n) := \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$;

ж) симплектическая алгебра $\mathfrak{sp}(2n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x^t J_{2n} + J_{2n} x = 0\}$, где

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

1_n обозначает единичную матрицу порядка n.

Назовем *алгеброй Гейзенберга* $\mathfrak{hei}(2n+1)$ алгебру Ли с базисом $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$ и соотношениями $[z, x_i] = [z, y_i] = [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$, $[x_i, y_j] = \delta_{ij} z$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Определение. *Линейным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм T алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$ для некоторого линейного пространства V. При этом $\dim V$ называется размерностью представления T.

Представление T называется *неприводимым*, если пространство V не содержит нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов вида $T(x)$, где $x \in \mathfrak{g}$.

Представление T называется *точным*, если $\operatorname{Ker} T = 0$.

Представления $T_1 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и $T_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $C \colon V_1 \to V_2$ линейных пространств V_1 и V_2, что $CT_1(x) = T_2(x)C$ для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$.

Теорема Адо. *Любая конечномерная алгебра Ли обладает точным конечномерным представлением.*

3. Описать все (с точностью до эквивалентности) неприводимые комплексные конечномерные представления следующих алгебр Ли:

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$ (см. задачу 1).

4. Указать точное конечномерное представление

а) n-мерной коммутативной алгебры Ли;

б) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

в) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$.

Определение. *Дифференцированием* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение $D \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющее условию $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$.

5. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $x \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $\operatorname{ad} x$ линейный оператор в $\mathfrak{g}$, заданный формулой $(\operatorname{ad} x)y = [x, y]$. Доказать, что $\operatorname{ad} x$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (такие дифференцирования называются внутренними), что соответствие $x \mapsto \operatorname{ad} x$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{g}$ и что ядро этого представления совпадает с центром алгебры $\mathfrak{g}$.

Представление $x \mapsto \operatorname{ad} x$ называется *присоединенным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

6. Описать все дифференцирования (по модулю внутренних)

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$;

в) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$;

г) алгебры $\mathfrak{sl}(2)$.

7. Найти алгебры Ли следующих групп Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$[1]:

а) полная линейная группа $GL(n)$ — группа всех невырожденных матриц $n \times n$ или невырожденных линейных преобразований n-мерного линейного пространства V;

б) специальная линейная группа $SL(n)$ — группа всех матриц с определителем 1 или линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму объема;

в) специальная ортогональная группа $SO(n)$ — группа ортогональных матриц $n \times n$ с определителем 1 или специальных линейных преобразований, сохраняющих невырожденную симметрическую билинейную форму (скалярное произведение);

г) симплектическая группа $Sp(n)$ — группа симплектических матриц $2n \times 2n$ или линейных преобразований n-мерного пространства, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму (симплектическую форму);

д) унитарная группа $U(n)$ — группа унитарных матриц $n \times n$ или линейных преобразований комплексного n-мерного пространства, сохраняющих невырожденную эрмитову форму;

е) специальная унитарная группа $SU(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1;

[1] Определение группы Ли и ее алгебры Ли см. в [2].

ж) группа Гейзенберга $HEI(2n+1)$ — группа невырожденных матриц порядка $n+2$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a — строка длины n, b — столбец длины n, $c \in \mathbb{C}$, а 1_n — единичная матрица порядка n;

з) полная аффинная группа $GA(n)$ — группа всех невырожденных аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства S (как реализовать $GA(n)$ квадратными матрицами порядка $(n+1)$?).

8. Найти связные односвязные группы Ли со следующими алгебрами Ли:

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$.

9. Для всякой линейной (т.е. содержащейся в $\mathfrak{gl}(n)$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определим *экспоненциальное отображение* $exp\colon \mathfrak{g} \to GL(n)$, $x \mapsto \exp x$.

а) Доказать, что образы при экспоненциальном отображении алгебр Ли из задач 2*а*—*д* содержатся в связных компонентах единиц соответствующих групп из задачи 7, причем существует такая окрестность нуля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которую exp диффеоморфно отображает на некоторую окрестность единицы соответствующей группы.

В целом отображение exp хорошими свойствами не обладает. Например:

б) $exp\colon \mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ не инъективно;

в) $exp\colon \mathfrak{sl}(2;R) \to SL(2;R)$ не сюръективно.

10. Описать все вещественные связные группы Ли размерностей 1 и 2.

11. Пусть G — линейная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и $g \in G$. Обозначим через $\operatorname{Ad} g$ линейный оператор в $\mathfrak{g}$, заданный формулой $(\operatorname{Ad} g)x = gxg^{-1}$. Доказать, что оператор $\operatorname{Ad} g$ является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что соответствие $g \mapsto \operatorname{Ad} g$ является представлением группы G в пространстве $\mathfrak{g}$ (оно называется *присоединенным представлением* группы G), и что представление ad является касательным отображением к Ad в единице.

Коприсоединенным представлением Ad^* называется представление группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственное к Ad: $(\mathrm{Ad}^* g)\,\alpha(x) = \alpha((\mathrm{Ad}\,g^{-1})x)$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $x \in \mathfrak{g}$.

12. Описать орбиты в присоединенном и коприсоединенном представлениях групп Ли $HEI(3)$, $GA(1)$, $SO(3)$, $SL(n)$.

2. Простые, полупростые, нильпотентные и разрешимые алгебры Ли

Понятия подалгебры, идеала и факторалгебры для алгебр Ли определяются стандартным образом.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если она не содержит нетривиальных идеалов и $\dim \mathfrak{g} > 1$.

Производным рядом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ряд

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}'' \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(n)} \supset \ldots,$$

определяемый соотношениями $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ для некоторого n.

Убывающим центральным рядом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ряд

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(1)} \supset \mathfrak{g}_{(2)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_{(n)} \supset \ldots,$$

определяемый соотношениями $\mathfrak{g}_{(n+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(n)}]$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если $\mathfrak{g}_{(n)} = 0$ для некоторого n.

1. К каким классам относятся алгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n+1)$, $\mathfrak{ga}(1)$, $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$?

Доказать следующие утверждения.

2. Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима.

3. Любая подалгебра и любая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.

4. Если идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешимы, то алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима.

5. Если $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ — разрешимые идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

6. В любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует и единствен максимальный разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ (называемый *радикалом*). Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ не содержит разрешимых идеалов, отличных от 0.

Определение. Алгебра Ли называется *полупростой*, если ее радикал равен 0, т. е. она не содержит нетривиальных разрешимых идеалов.

7. Доказать, что алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит нетривиальных коммутативных идеалов.

Доказать следующие утверждения для вещественных или комплексных алгебр Ли.

8. Теорема Ли. Приведем три эквивалентные формулировки.

а) Любое неприводимое представление разрешимой алгебры Ли в конечномерном комплексном линейном пространстве одномерно.

б) В пространстве любого конечномерного комплексного представления разрешимой алгебры Ли существует одномерное инвариантное подпространство.

в) Любое комплексное представление разрешимой алгебры Ли приводится к треугольному виду.

9. Алгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант нильпотентен.

10. Теорема Энгеля. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных операторов. Тогда в некотором базисе алгебра $\mathfrak{g}$ приводится к треугольному виду с нулями на главной диагонали.

11. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда, и только тогда, когда для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$ оператор $\operatorname{ad} X$ нильпотентен.

Будем обозначать через $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ комплексификацию вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (по определению $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$), а через $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ — овеществление комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

12. Доказать, что подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является подалгеброй тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

13. Доказать, что $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})' = \mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ разрешима (нильпотентна).

14. Доказать, что $\operatorname{rad} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (\operatorname{rad} \mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ полупроста.

3. Разложение Фиттинга

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы говорим о комплексных алгебрах Ли.

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, а X, Y — ее элементы. Доказать тождества:

$$(\operatorname{ad} X)^n Y = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m X^{n-m} Y X^m;$$

$$X^n Y = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (\operatorname{ad} X)^{n-m} Y X^m.$$

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли; $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Доказать тождество:

$$(\operatorname{ad} X - \lambda - \mu)^n [Y, Z] = \sum_{m=0}^{n} C_n^m [(\operatorname{ad} X - \lambda)^{n-m} Y, (\operatorname{ad} X - \mu)^m Z].$$

Определение. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — линейная алгебра Ли. Функция $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ называется *весом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $Xv = \lambda(X)v$ для некоторого $v \in V$, $v \neq 0$, и всех $X \in \mathfrak{g}$. Подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{g}\ \exists n \in \mathbb{N} \colon (X - \lambda(X))^n v = 0\}$$

называется *весовым подпространством* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ веса λ.

3. Если линейная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то

а) для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$ подпространство $V_{\lambda(X)} := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon (X - \lambda(X))^n v = 0\}$ инвариантно относительно любого элемента $Y \in \mathfrak{g}$;

б) пространство V разлагается в прямую сумму $V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$, где суммирование ведется по конечному множеству линейных форм λ, являющихся весами алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — ее нильпотентная подалгебра, $\hat{\mathfrak{n}} = \mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ — линейная алгебра Ли. Применяя результат задачи 3*б* к алгебре $\hat{\mathfrak{n}}$, получим разложение (называемое *разложением Фиттинга*) $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{\alpha} \mathfrak{g}_\alpha$, где суммирование ведется по весам α алгебры $\mathfrak{n}$.

Определение. Веса $\alpha \neq 0$ называются *корнями* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а пространства $\mathfrak{g}_\alpha$ — ее *корневыми подпространствами*.

4. Доказать, что:

а) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ для любых корней α и β;

б) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$; $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ для любого корня α;

в) $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$.

Определение. Элемент H алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *регулярным*, если оператор $\mathrm{ad}\, H$ имеет минимальную возможную кратность нулевого собственного значения (называемую *рангом* алгебры $\mathfrak{g}$).

5. а) Доказать, что множество регулярных элементов связно, открыто и всюду плотно в $\mathfrak{g}$.

б) Описать регулярные элементы в алгебрах $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{ga}(1)$.

6. Пусть H — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = \mathbb{C}H$ — одномерная нильпотентная подалгебра и $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ — разложение Фиттинга относительно $\mathfrak{n}$. Обозначим $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus\limits_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$, так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$.

а) Пусть $X_0 \in \mathfrak{g}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $X = H + \varepsilon X_0$. Доказать, что при достаточно малом ε ограничение оператора $\mathrm{ad}\, X$ на подпространство $\tilde{\mathfrak{g}}$ невырождено. Вывести отсюда, что $\mathrm{ad}\, X|_{\mathfrak{h}}$ — нильпотентный оператор.

Указание. Рассмотреть многочлен $P(\varepsilon) = \det_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathrm{ad}(H + \varepsilon X_0))$.

б) Доказать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна.

Указание. Рассмотреть многочлен $P_0(\lambda, \varepsilon) = \det_{\mathfrak{h}}(\lambda - \operatorname{ad}(H + \varepsilon X_0))$.

в) Доказать, что $\mathfrak{h}$ — максимальная нильпотентная подалгебра, содержащая H (такие подалгебры называются *картановскими*, а разложение Фиттинга относительно них — *корневым разложением*). В разложении Фиттинга относительно $\mathfrak{h}$ имеет место равенство $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. В частности, $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$.

г) Описать картановские подалгебры и корневые разложения для $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{ga}(1)$, $\mathfrak{hei}(3)$.

7. Доказать, что любые две картановские подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ сопряжены друг другу относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, т.е. подгруппы $G \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, порожденной элементами вида $\exp(\operatorname{ad} x)$, $x \in \mathfrak{g}$.

8. Рассмотрим элемент $Z = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, где $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Тогда Z принадлежит $\mathfrak{h}$ и, значит, на Z определено значение $\lambda(Z)$ любого корня $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

а) Доказать, что $\lambda(Z) = r_\lambda \alpha(Z)$, где r_λ — рациональное число (зависящее от λ и α), причем, если $\alpha \neq 0$, то $r_\lambda \neq 0$ при некотором λ.

Указание. Рассмотреть подпространство $V = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_{\lambda + k\alpha}$.

б) Доказать, что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Z)^m = \rho_m \alpha(Z)^m$, где коэффициент ρ_m рационален и $\rho_m \neq 0$ при четном m.

4. Форма Картана—Киллинга

Определение. *Формой Картана—Киллинга* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется билинейная форма на $\mathfrak{g}$, задаваемая формулой

$$(X, Y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} Y)).$$

Если $\mathfrak{h}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, то через $\mathfrak{h}^\perp$ будем обозначать подпространство всех векторов, ортогональных к любому вектору из $\mathfrak{h}$ относительно формы Картана—Киллинга.

1. Доказать следующие свойства формы Картана—Киллинга:

а) $(X, Y) = (Y, X)$ (симметричность);

б) $([X, Y], Z) = (X, [Y, Z])$ (инвариантность);

в) если $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и $X, Y \in \mathfrak{n}$, то $(X, Y)_{\mathfrak{n}} = (X, Y)_{\mathfrak{g}}$;

г) если $\mathfrak{h}$ — идеал, то $\mathfrak{h}^{\perp}$ — тоже идеал (в частности, $\mathfrak{g}^{\perp}$ — идеал).

Доказать следующие утверждения.

2. Если $\mathfrak{g}^{\perp} = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

3. Если $\mathfrak{g}^{\perp} = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ разрешима.

4. Критерий Картана. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^{\perp} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

5. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Картана—Киллинга невырождена.

6. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда она является прямой суммой простых алгебр Ли.

7. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то все ее дифференцирования — внутренние.

8. Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра (см. задачу 6*в* раздела 3) и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$ — разложение Фиттинга, то

а) если $\alpha + \beta \neq 0$, то $\mathfrak{g}_{\alpha} \perp \mathfrak{g}_{\beta}$;

б) ограничение формы Картана—Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено;

в) $\mathfrak{h}$ — коммутативная алгебра Ли (максимальная коммутативная подалгебра, содержащая регулярный элемент);

г) $\mathfrak{h}$ диагонализуема (т.е. все операторы $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathfrak{h}$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду).

5. Представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$

1. Рассмотрим стандартный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверить следующие коммутационные соотношения:

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h.$$

2. Пусть

$$H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad E = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad F = y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Проверить, что соответствие $h \to H, e \to E, f \to F$ задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathbb{C}[x, y]$ многочленов от переменных x, y, в котором подпространства Pol_n однородных многочленов степени n образуют неприводимые инвариантные подпространства.

3. Обозначим через H, E, F образы элементов h, e, f в произвольном комплексном конечномерном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$.

а) Доказать следующие соотношения между операторами:

$$[H, E^k] = 2kE^k, \quad [H, F^k] = -2kF^k, \quad [E, F^k] = kF^{k-1}(H - (k-1));$$

б) Доказать, что оператор $\Delta = 2(EF + FE) + H^2 = 4FE + H^2 + 2H$ коммутирует с H, E, F.

4. Доказать, что если v — собственный вектор оператора H с собственным значением λ, то либо $Ev = 0$, либо Ev — собственный вектор оператора H с собственным значением $\lambda + 2$. Аналогично, если $Fv \neq 0$, то Fv — собственный вектор оператора H с собственным значением $\lambda - 2$. Вывести отсюда, что в пространстве любого комплексного конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ существует *примитивный вектор*, т.е. ненулевой вектор v_Λ, $\Lambda \in \mathbb{C}$, такой что

1) $Hv_\Lambda = \Lambda v_\Lambda$,

2) $Ev_\Lambda = 0$.

5. Доказать, что если v_Λ — примитивный вектор, то подпространство V, натянутое на векторы вида $v_k = F^k v_\Lambda$, является $\mathfrak{g}$-инвариантным, а $\mathfrak{g}$-действие в нем задается формулами

$$Hv_k = (\Lambda - 2k)v_k, \quad Ev_k = k(\Lambda - k + 1)v_{k-1}, \quad Fv_k = v_{k+1}.$$

Вывести отсюда, что если $\dim V = m$, то $\Lambda = n = m - 1$.

6. Доказать следующие утверждения (дающие описание неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$).

а) В каждой размерности $m \in \mathbb{N}$ существует ровно одно с точностью до эквивалентности неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Спектр оператора H в этом представлении всегда целочисленный и простой.

б) В любом таком представлении существует единственный примитивный вектор (старший вектор); его вес равен $n = m - 1$. (Само представление принято называть представлением со *старшим весом* n. Мы будем обозначать его через T_n.) Спектр оператора H в T_n имеет вид $n, n-2, n-4, \ldots, -n$.

в) Если $v \in T_n$ — весовой вектор веса k, то $F^k v \neq 0$ при $k > 0$ и $E^{-k} v \neq 0$ при $k < 0$.

7. а) Доказать изоморфизмы

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

б) Доказать, что комплексные представления любых двух из трех алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ находятся во взаимно однозначном соответствии, причем эти представления приводимы или неприводимы одновременно.

в) Доказать, что любое комплексное конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ или $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ вполне приводимо.

8. Вывести из предыдущей задачи следующие свойства произвольного комплексного конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$:

а) оператор H всегда диагонализуем и его спектр целочислен;

б) число k является весом тогда и только тогда, когда число $-k$ является весом;

в) если k — вес, а V_k — соответствующее весовое подпространство, то при $k > 0$ отображение $F^k \colon V_k \to V_{-k}$ — изоморфизм линейных пространств, а при $k < 0$ отображение $E^{-k} \colon V_k \to V_{-k}$ — изоморфизм линейных пространств.

Для любых двух представлений $T \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ и $T' \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V')$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно определить их сумму:

$$T \oplus T' \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \oplus V'), \quad (T \oplus T')(x)(v \oplus v') = T(x)v \oplus T'(x)v',$$

и тензорное произведение:

$$T \otimes T' \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \otimes V'),$$
$$(T \otimes T')(x)(v \otimes v') = T(x)v \otimes v' + v \otimes T'(x)v',$$

где $x \in \mathfrak{g}, v \in V, v' \in V'$.

9. Пусть T_m и T_n — неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ со старшими весами m и n соответственно. Разложить на неприводимые компоненты их тензорное произведение $T_m \otimes T_n$.

6. Система корней полупростой алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

— корневое разложение.

Определение. *Системой корней* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется множество

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

1. Описать картановские подалгебры, корневые векторы и системы корней для классических комплексных алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1), \mathfrak{sp}(2n), \mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$. Доказать простоту этих алгебр.

Указание. Рассмотреть реализацию ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе, где матрица скалярного произведения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$.

Форма Картана—Киллинга задает естественный изоморфизм между пространствами $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через H^α элемент пространства $\mathfrak{h}$, двойственный к корню α, т. е. определяемый соотношением $\alpha(H) = (H^\alpha, H)$ для любого $H \in \mathfrak{h}$.

2. Доказать, что множество Δ порождает пространство $\mathfrak{h}^*$.

3. Если $H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $(H, [X, Y]) = (H^\alpha, H)(X, Y)$.

4. Если $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $[X, Y] = (X, Y)H^\alpha$.

5. Положим $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Доказать, что $\dim(\mathfrak{h}_\alpha) = 1$.

6. Доказать, что существует элемент $h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$, для которого $\alpha(h_\alpha) = 2$.

7. Доказать, что для любого элемента $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ найдется такой элемент $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, что будут выполняться равенства

$$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha, \quad [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha.$$

Таким образом, с каждым корнем $\alpha \in \Delta$ связана трехмерная подалгебра Ли с базисом $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$, изоморфная $\mathfrak{sl}(2)$.

8. Рассмотрим на $\mathfrak{h}^*$ скалярное произведение, индуцированное с $\mathfrak{h}$: $(\alpha, \beta) = (H^\alpha, H^\beta)$. Тогда

$$\beta(h_\alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

9. Доказать, что $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in \Delta$.

10. Если $\alpha, c\alpha \in \Delta$ $(c \in \mathbb{C})$, то $c = 1$ или $c = -1$.

11. Если $\alpha, \beta \in \Delta$, то $\beta(h_\alpha)$ — целое число и $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Delta$.

12. Пусть $\beta \neq \pm\alpha$, p и q — наибольшие целые числа, для которых $\beta - p\alpha \in \Delta$ и $\beta + q\alpha \in \Delta$, и пусть $V = \bigoplus\limits_{k \in Z} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$. Тогда

а) $\beta(h_\alpha) = p - q$;

б) V — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2) = \langle e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha \rangle$ размерности $p + q + 1$;

в) отображения $\operatorname{ad} e_\alpha\colon \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \to \mathfrak{g}_{\beta + (k+1)\alpha}$, $-p \leqslant k \leqslant q - 1$, суть изоморфизмы.

13. Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta + \alpha}$.

14. Рассмотрим вещественные линейные пространства V и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, натянутые на корни $\alpha \in \Delta$ и элементы h_α соответственно:

$$V = \Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha \mid c_\alpha \in \mathbb{R} \Big\}, \quad \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha h_\alpha \mid c_\alpha \in \mathbb{R} \Big\}$$

Доказать, что $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ и $V = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

15. Доказать, что ограничение формы Картана—Киллинга на $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ является положительно определенной вещественной формой.

7. Абстрактные системы корней. Группа Вейля

Пусть V — вещественное n-мерное евклидово пространство. Для любого $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, обозначим через s_α отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α:

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Определение. Множество Δ векторов пространства V называется (*абстрактной*) *системой корней* в V, если

1) Δ конечно, не содержит 0 и порождает V;
2) $s_\alpha(\Delta) = \Delta$ для любого $\alpha \in \Delta$;
3) для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ число $n_{\beta\alpha} = \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ является целым.

Число n называется *рангом* системы корней Δ, а элементы множества Δ называются *корнями*.

1. Доказать, что система корней любой полупростой алгебры Ли является абстрактной системой корней.

2. а) Описать все абстрактные системы корней ранга 1 и 2;

б) для любых двух элементов абстрактной системы корней Δ определить возможные значения угла между ними и отношения их длин.

3. Нарисовать системы корней алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sl}(3)$, $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{sp}(4)$.

4. Доказать, что если $\alpha, c\alpha \in \Delta$ и $|c| < 1$, то $c = \pm\dfrac{1}{2}$.

Определение. Система корней Δ называется *приведенной*, если из того, что $\alpha, c\alpha \in \Delta$, следует, что $c = \pm 1$.

Пусть Δ — приведенная система корней в пространстве V, а $f \in V^*$ — такой линейный функционал на V, что $f(\alpha) \neq 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. Пусть $\Delta_f^+ = \{\alpha \in \Delta \mid f(\alpha) > 0\}$ и $\Delta_f^- = \{\alpha \in \Delta \mid f(\alpha) < 0\}$. Ясно, что $\Delta_f^- = -\Delta_f^+$ и $\Delta = \Delta_f^- \cup \Delta_f^+$.

Определение. Корень $\alpha \in \Delta_f^+$ называется *разложимым*, если найдутся такие $\beta, \gamma \in \Delta_f^+$, что $\alpha = \beta + \gamma$. В противном случае корень $\alpha \in \Delta_f^+$ называется *неразложимым* или *простым*.

Пусть $\Sigma_f = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — множество всех простых корней из Δ_f^+ (говорят также «система простых корней»).

5. Доказать, что любой корень $\beta \in \Delta_f^+$ (соответственно $\beta \in \Delta_f^-$) может быть представлен в виде $\beta = \sum m_i \omega_i$, где m_i — целые неотрицательные (соответственно неположительные) числа.

6. Если $\alpha, \beta \in \Delta$ и $(\alpha, \beta) > 0$, то $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha \in \Delta$.

7. Если $\alpha, \beta \in \Sigma_f$, то $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.

8. Σ_f — базис в V.

9. Пусть функционал $f \in V^*$ и множество $\Sigma = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \subset \Delta$ таковы, что

1) Σ образует базис в V;

2) любой корень $\alpha \in \Delta$ является линейной комбинацией элементов ω_i с целыми коэффициентами одного знака;

3) $f(\omega_i) > 0$ для любого $\omega_i \in \Sigma$.

Доказать, что $\Sigma = \Sigma_f$.

10. Доказать, что любой положительный корень β можно представить в виде $\beta = \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}$ так, что все частичные суммы $\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k}$, $k = 1, \ldots, m-1$, также являются корнями.

Обозначим через s_α $(\alpha \in \Delta)$ отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α.

Определение. *Группой Вейля* системы корней называется группа, порожденная отражениями s_α $(\alpha \in \Delta)$.

11. Описать системы простых корней и группы Вейля алгебр Ли из задачи 3.

12. Доказать, что отражение s_{ω_i} переводит множество $\Delta_f^+ \setminus \{\omega_i\}$ в себя.

13. Положим $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta \in \Delta_f^+} \beta$. Доказать, что для любого простого корня ω имеет место равенство $s_\omega(\rho) = \rho - \omega$.

14. Пусть W_f — группа, порожденная отражениями s_ω, $\omega \in \in \Sigma_f$. Определим действие группы W_f в пространстве V^* стандартным образом: $w(F)(v) = F(w^{-1}(v))$, где $w \in W_f$, $F \in V^*$, $v \in V$. Доказать, что для любого линейного функционала $F \in V^*$ найдется такой элемент $w \in W_f$, что $w(F)(\omega) \geqslant 0$ для любого $\omega \in \Sigma_f$.

15. Доказать, что группа Вейля действует транзитивно на множестве систем простых корней.

16. Доказать, что для любого корня $\beta \in \Delta$ найдется такой элемент $w \in W_f$, что $w(\beta) \in \Sigma_f$.

17. Доказать, что группа Вейля совпадает с группой W_f.

18. Описать системы простых корней и группы Вейля комплексных алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$.

Матрица Картана и схема Дынкина

Пусть Δ — приведенная система корней, $\Sigma = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — система простых корней. Положим $a_{ij} = \dfrac{2(\omega_i, \omega_j)}{(\omega_j, \omega_j)}$. Матрица $A = = (a_{ij})$ называется *матрицей Картана* системы корней Δ.

19. Выписать матрицы Картана для алгебр Ли из задачи 3.

20. Доказать, что $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ при $i \neq j$.

21. Вычислить матрицы Картана для алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$.

Схемой Дынкина системы корней называется ориентированный граф, вершины которого соответствуют простым корням $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, число ребер, соединяющих вершины i и j, равно числу $a_{ij}a_{ji}$ и если корни имеют разную длину, то эти ребра ориентированы в сторону более короткого корня.

22. Нарисовать схемы Дынкина для алгебр Ли из задачи 3.

23. Доказать, что схема Дынкина системы корней Δ несвязна тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$, и существуют подпространства $V_1, V_2 \subset V$, для которых $V = V_1 \oplus V_2$, $V_1 \perp V_2$ и Δ_i — система корней в V_i.

Если Δ является системой корней полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то перечисленные условия эквивалентны тому, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, причем Δ_i — система корней подалгебры $\mathfrak{g}_i$.

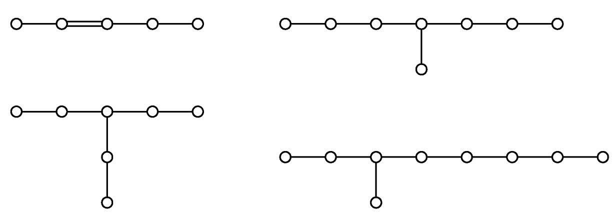
24. Доказать, что если схема Дынкина содержит не меньше трех вершин, то в ней нет тройных ребер.

25. Доказать, что схема Дынкина не может содержать циклов.

26. Назовем узлом вершину, которая соединена более чем с двумя другими вершинами. Доказать, что в схеме Дынкина из любого узла выходит три ребра, причем эти ребра простые (однократные).

27. Назовем особенностью узел или двойное ребро. Доказать, что схема Дынкина может содержать не более одной особенности.

28. Доказать, что схема Дынкина не может содержать следующих фрагментов:



29. а) Нарисовать схемы Дынкина простых классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$ (серия A_n), $\mathfrak{so}(2n+1)$ (серия B_n), $\mathfrak{sp}(2n)$ (серия C_n), $\mathfrak{so}(2n)$ (серия D_n).

б) Доказать так называемые *изоморфизмы малых размерностей*:

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2), \qquad \mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{so}(3),$$
$$\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{sl}(4), \qquad \mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(4).$$

в) Нарисовать 5 возможных исключительных (т. е. не входящих в серии A_n, B_n, C_n, D_n) схем Дынкина. (Они обозначаются G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, индекс равен числу вершин схемы Дынкина).

30. (Простая алгебра Ли типа G_2.) Пусть V — трехмерное линейное пространство с фиксированной трилинейной кососимметрической формой ω (формой объема), а V^* — двойственное пространство.

Рассмотрим прямую сумму линейных пространств $\mathfrak{g} = V^* \oplus \oplus \mathfrak{sl}(V) \oplus V$ и определим на ней коммутирование:

1) если $A, B \in \mathfrak{sl}(V)$, то $[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{sl}(V)$;

2) если $A \in \mathfrak{sl}(V)$, $v \in V$, то $[A, v] = Av \in V$;

3) если $A \in \mathfrak{sl}(V)$, $\alpha \in V^*$, то $[A, \alpha] \in V^*$ и $[A, \alpha](v) = -\alpha(Av)$;

4) если $v \in V$, $\alpha \in V^*$, то $[v, \alpha] = v \otimes \alpha - \dfrac{1}{3}\alpha(v) \cdot \mathrm{id} \in \mathfrak{sl}(V)$, где id — тождественное отображение в пространстве V (т. е. для любого вектора $w \in V$ значение линейного преобразования $[v, \alpha]$ на нем вычисляется по формуле $[v, \alpha](w) = \alpha(w)v - \dfrac{1}{3}\alpha(v)w)$;

5) если $v, w \in V$, то $[v, w] = \omega(v, w, \cdot) \in V^*$;

6) если $\alpha, \beta \in V^*$, то $[\alpha, \beta] := v \in V$, где вектор v удовлетворяет соотношению $\omega(v, \cdot, \cdot) = \alpha \wedge \beta$.

Доказать, что формулы (1)—(6) задают на $\mathfrak{g}$ структуру простой алгебры Ли типа G_2 (см. задачу 29*в*).

31. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, $A = (a_{ij})$ — матрица Картана алгебры $\mathfrak{g}$, Δ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$, а $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — система простых корней. Положим (см. задачу 7 раздела 6):

$$e_i = e_{\alpha_i}, \qquad f_i = f_{\alpha_i} \qquad h_i = h_{\alpha_i}$$
$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \text{ (борелевская подалгебра)}$$

Доказать, что

а) $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$;

б) $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ — нильпотентные подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$, порожденные элементами $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_n\}$ соответственно;

в) $\mathfrak{b}$ — разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b}' = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}_+$;

г) имеют место следующие соотношения:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad [h_i, e_j] = a_{ji} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ji} f_j,$$

$$(\operatorname{ad} e_j)^{1-a_{ij}} e_i = 0, \quad (\operatorname{ad} f_j)^{1-a_{ij}} f_i = 0.$$

Элементы $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots f_n$ называются *образующими Шевалле* или *каноническими образующими* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а два последних набора соотношений — *соотношениями Серра*.

8. Модули над полупростыми конечномерными алгебрами Ли и их характеры

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — ее система простых корней, $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ — соответствующие образующие Шевалле, а V — произвольный модуль над $\mathfrak{g}$.

1. Доказать, что если модуль V конечномерен, то существует элемент $\chi \in \mathfrak{h}^*$ и ненулевой элемент $v_\chi \in V$, для которых

1) $h \cdot v_\chi = \chi(h) v_\chi$; для всех $h \in \mathfrak{h}$;

2) $\mathfrak{n}_+ v_\chi = 0$.

Элемент v_χ называется *примитивным* вектором веса χ.

Модуль V называется *модулем со старшим весом* $\chi \in \mathfrak{h}^*$, если в V существует примитивный вектор $v_\chi \in V$ веса χ, порождающий V как $\mathfrak{g}$-модуль. (Элемент v_χ при этом называется *старшим вектором*.)

2. Доказать, что если V_χ — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом χ, то

а) модуль V_χ порождается (как линейное пространство) элементами вида

$$f_{\beta_1}^{m_1} \ldots f_{\beta_k}^{m_k} v_\chi, \quad m_i \in \mathbb{N},$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — различные положительные корни;

б) действие картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ в V диагонализуемо, веса модуля V имеют вид

$$\chi - \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{N},$$

и их кратности конечны;

в) кратность веса χ равна 1;

г) модуль V_χ неразложим;

д) модуль V_χ неприводим тогда и только тогда, когда он содержит единственный (с точностью до пропорциональности) примитивный вектор.

3. Доказать, что

а) любое неприводимое конечномерное представление комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является представлением со старшим весом;

б) неприводимые конечномерные представления L_χ и L_ψ со старшими весами χ и ψ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$;

в) если χ является старшим весом некоторого неприводимого конечномерного представления L_χ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то значения $\chi(h_i) = n_i$, где $h_i = [e_i, f_i]$, являются целыми неотрицательными числами;

г) если v_χ — старший вектор представления L_χ, то

$$f_i^{n_i+1} v_\chi = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

(*соотношения Серра* для модулей).

Характером модуля со старшим весом χ называется ряд $\mathrm{ch}(V_\chi) = \sum m_\lambda q^\lambda$, где m_λ — кратность веса λ, q — формальная переменная.

Для конечномерного неприводимого модуля со старшим весом χ справедлива следующая *формула Вейля для характера*:

$$\mathrm{ch}(V_\chi) = \frac{1}{D} \sum_{w \in W} (-1)^w q^{w(\chi+\rho)},$$

где

$$D=\prod_{\alpha\in\Delta_+}(q^{\alpha/2}-q^{-\alpha/2}).$$

Доказательство этой формулы мы разберем в разделе 16.

4. Проверить формулу Вейля для $\mathfrak{sl}(2)$.

5. Вывести из формулы Вейля *формулу знаменателя*:

$$D=\sum_{w\in W}(-1)^w q^{w\rho}.$$

Указание. Применить формулу Вейля к тривиальному представлению.

6. Проверить (не используя формулу Вейля) формулу знаменателя для простейших классических алгебр ($\mathfrak{sl}(2),\mathfrak{sl}(3),\ldots$ — кто больше?).

9. Тождества Макдональда с точки зрения конечных систем корней

Пусть $\varphi(q)=\prod_{m>0}(1-q^m)$, $\eta(\tau)=q^{1/24}\varphi(q)$, где $q=e^{2\pi i\tau}$, $\operatorname{Im}\tau>0$. Тогда $\eta(-1/\tau)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\eta(\tau)$.

1. Используя свойства модулярности $\eta(\tau)$ и формулу суммирования Пуассона, доказать следующие тождества:

$$\varphi(q)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}, \qquad \text{(Эйлер)}$$

$$\varphi(q)^3=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(4n+1)q^{2n^2+n}, \qquad \text{(Якоби)}$$

$$\varphi(q)^2/\varphi(q^2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}, \qquad \text{(Гаусс)}$$

$$\varphi(q^2)^2/\varphi(q)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{2n^2+n}. \qquad \text{(Гаусс)}$$

2. Для системы корней полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ рассмотрим число $g = \frac{1}{2}(\|\tilde{\alpha} + \rho\|^2 - \|\rho\|^2)$, где $\tilde{\alpha}$ — старший корень, ρ — полусумма положительных корней.

а) Доказать, что $g = (\tilde{\alpha}, \rho) + \frac{1}{2}\|\tilde{\alpha}\|^2$.

б) Доказать, что g — целое число, равное $\varepsilon + (\tilde{\alpha}, \rho)$, где $\varepsilon = 1, 2$ или 3 в зависимости от системы корней.

в) Вывести следствие: $\left(\tilde{\alpha}, \frac{1}{g}\rho\right) < 1$.

г) Проверить на примерах «странную формулу»[2]

$$(\rho, \rho)/g = d/12, \quad \text{где} \quad d = \dim \mathfrak{g}.$$

Рассмотрим θ-ряд

$$\theta(\tau) = \sum_{\mu \in gQ^\vee} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\mu + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)} \right) \exp\Big(\frac{\pi i \tau}{g} (\mu + \rho, \mu + \rho) \Big).$$

3. Преобразовать θ-ряд с помощью формулы суммирования Пуассона. Результат назовем *двойственным рядом*.

Указание. Воспользоваться свойствами гауссова интеграла и связью между дифференцированием и умножением на двойственную переменную при преобразовании Фурье.

4. Формула суммирования Пуассона предписывает после преобразования Фурье суммировать по двойственной решетке. Показать, что двойственной к решетке $gQ^\vee$ будет решетка $g^{-1}P$, где P — двойственная к Q (P называется *решеткой весов*).

5. Доказать W-антиинвариантность полинома $F(\nu) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (\nu, \alpha)$, где W — группа Вейля.

Указание. Достаточно проверить утверждение для отражений относительно простых корней.

6. Показать, что $\frac{1}{g}\rho + Q^\vee \subset g^{-1}P$, а все остальные слагаемые двойственного ряда (см. задачу 3) аннулируются.

[2] Так эта формула называется в литературе.

7. Показать, что

$$\theta(\tau) = c\Big(\frac{\tau}{i}\Big)^{-d/2}\theta\Big(-\frac{1}{\tau}\Big),$$

где

$$c = \frac{1}{v}g^{l/2}(-i)^{|\Delta_+|}\sum_{w\in W}(-1)^w e^{2\pi i(w\rho, g^{-1}\rho)},$$

v — объем фундаментальной области решетки $gQ^\vee$ и l — ранг алгебры $\mathfrak{g}$.

8. Из «странной формулы» (задача 2*г*) вывести, что $\theta(\tau) \sim \sim e^{\pi i\tau d/12}$ при $\tau \to \infty$.

Следствие. $\theta(\tau)$ *не есть тождественный нуль.*

9. Показать, что $|c| = 1$.

Указание. Дважды применить результат задачи 7 и воспользоваться следствием задачи 8.

10. Показать, что c — вещественная положительная константа.

Указание. Применить формулу знаменателя (задача 5 раздела 8).

11. Исследовать поведение $\theta(\tau)$ при сдвиге $\tau \mapsto \tau + 1$. Убедиться, что θ и η^d имеют одинаковое модулярное поведение.

12. Из «странной формулы» (задача 2*г*) вывести совпадение порядков нулей θ и η^d в точке $\tau = i\infty$ ($\theta(\tau) \sim \eta(\tau)^d \sim e^{\pi i\tau d/12}$ при $\tau \to \infty$).

13. Доказать, что $\dfrac{\theta(\tau)}{\eta(\tau)^d}$ на верхней полуплоскости есть константа, отличная от нуля; иными словами $\eta(\tau)^d = \mathrm{const}\cdot\theta(\tau)$.

Указание. Фактор верхней полуплоскости по модулярной группе — это риманова сфера.

10. Когомологии алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и A — модуль над $\mathfrak{g}$. Под *k-мерной коцепью* алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в A понимается кососимметрический k-линейный функционал на $\mathfrak{g}$ со значениями в A.

Множество таких коцепей обозначается $C^k(\mathfrak{g}; A)$. *Дифференциал* $d = d_k : C^k(\mathfrak{g}; A) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}; A)$ определяется формулой

$$dc(g_1, \dots, g_{k+1}) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant k+1} (-1)^{s+t-1} c([g_s, g_t], g_1, \dots, \hat{g}_s, \dots, \hat{g}_t, \dots, g_{k+1}) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant s \leqslant k+1} (-1)^s g_s c(g_1, \dots, \hat{g}_s, \dots, g_{k+1}),$$

где $c \in C^k(\mathfrak{g}; A)$, $g_1, \dots, g_{k+1} \in \mathfrak{g}$. Соответствующие когомологии называются когомологиями алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в A и обозначаются $H^k(\mathfrak{g}; A)$. Если A — одномерный тривиальный модуль, то обозначения сокращаются до $C^k(\mathfrak{g})$ и $H^k(\mathfrak{g})$.

1. Дать интерпретацию $H^0(\mathfrak{g}; A)$ и $H^1(\mathfrak{g})$.

2. Установить изоморфизм между $H^1(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ и пространством внешних дифференцирований (т.е. факторпространством всех дифференцирований по внутренним) алгебры $\mathfrak{g}$.

3. Доказать, что $H^2(\mathfrak{g})$ задает множество классов одномерных центральных расширений алгебры $\mathfrak{g}$.

4. Вычислить:
а) $H^1(\mathfrak{sl}(2); \mathfrak{sl}(2))$, $H^2(\mathfrak{sl}(2))$, $H^2(\mathfrak{sl}(2); \mathfrak{sl}(2))$;
б) $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ и $H^2(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — простая классическая алгебра Ли.

11. Универсальная обёртывающая алгебра и модуль Верма

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $T(\mathfrak{g})$ — тензорная алгебра пространства $\mathfrak{g}$:

$$T(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \dots \oplus T^{\otimes k}\mathfrak{g} \oplus \dots,$$

I — двусторонний идеал в $T(\mathfrak{g})$, порожденный элементами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{g})$.

Универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется факторалгебра $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$.

Пусть $U(\mathfrak{g})_L$ — алгебра Ли, ассоциированная с ассоциативной алгеброй $U(\mathfrak{g})$ (см. задачу 2 раздела 1).

Каноническое вложение $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$ определяет каноническое отображение линейных пространств $i\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$.

1. Доказать, что $i\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})_L$ — гомоморфизм алгебр Ли и вложение.

2. Пусть $\tau\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что его можно продолжить до представления ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$. При этом подпространство $W \subset V$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $U(\mathfrak{g})$. В частности, неприводимость относительно $\mathfrak{g}$ эквивалентна неприводимости относительно $U(\mathfrak{g})$.

Иными словами, категории представлений алгебры Ли и ее универсальной обертывающей алгебры эквивалентны.

3. Пусть A — ассоциативная алгебра, $\varphi\colon \mathfrak{g} \to A_L$ — гомоморфизм алгебр Ли. Доказать, что существует гомоморфизм ассоциативных алгебр $\tilde{\varphi}\colon U(\mathfrak{g}) \to A$, продолжающий φ.

4. Пусть $\mathfrak{g}$ — коммутативная алгебра Ли. Тогда $U(\mathfrak{g})$ — это симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g})$ пространства $\mathfrak{g}$ (т.е. алгебра симметрических тензоров на $\mathfrak{g}$, или, что то же самое, алгебра $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ многочленов на $\mathfrak{g}^*$).

Алгебра $U(\mathfrak{g})$ не является градуированной, но на ней можно ввести *фильтрацию*, т.е. выделить набор подпространств U_i таких, что $U_1 \subset U_2 \subset \ldots U_i \subset \ldots$, $U_iU_j \subset U_{i+j}$ и $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{i \geq 0} U_i$, положив

$$U_k = \bigoplus_{i \leq k} T^{\otimes i}\mathfrak{g} \mod I.$$

По фильтрованной алгебре можно построить градуированную:

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} U_i/U_{i-1}.$$

Теорема (Пуанкаре—Биркгоф—Витт). *Вложение* $i\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ *продолжается до изоморфизма ассоциативных алгебр* $i\colon S(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$.

5. Доказать теорему Пуанкаре—Биркгофа—Витта. Установить изоморфизм $S(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$.

Таким образом, теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витта позволяет отождествить (но не каноническим образом) линейное пространство универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ либо с пространством симметрической алгебры $S(\mathfrak{g})$, либо с пространством полиномов $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$.

6. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Тогда $\{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} | k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ — базис в $U(\mathfrak{g})$.

7. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(3)$ — алгебра с базисом X, Y, Z и соотношениями $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$. Согласно предыдущей задаче, $X^k Y^l Z^p$ — базис $U(\mathfrak{g})$. Выразить $X^k Y^l Z^p \cdot X^m Y^n Z^q$ через базисные элементы.

8. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (как линейное пространство) представляется в виде прямой суммы двух своих подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Доказать, что $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с картановской подалгеброй $\mathfrak{h}$ и борелевской подалгеброй $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. Обозначим через V_λ, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, одномерный $\mathfrak{b}$-модуль, на котором картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ действует с весом λ, а нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}_+$ — тривиально.

Для произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$-модуля W определим *индуцированный модуль* $\mathrm{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} W$ по формуле

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} W = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} W,$$

где символ $\underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes}$ означает, что для $g \in U(\mathfrak{g})$, $h \in U(\mathfrak{h})$, $w \in W$ элемент $gh \otimes w$ отождествляется с $g \otimes hw$.

Модулем Верма со старшим весом λ называется $\mathfrak{g}$-модуль

$$M_\lambda = \mathrm{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} V_\lambda = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} V_\lambda \cong U(\mathfrak{n}_-) V_\lambda.$$

9. Доказать, что любой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ является фактормодулем модуля Верма M_λ.

10. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(3)$ — алгебра Гейзенберга с базисом X, Y, Z и коммутационными соотношениями

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = [Y, Z] = 0,$$

а $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{Y, Z\}$. Пусть W_λ — одномерный $\mathfrak{h}$-модуль с базисным элементом w:

$$Zw = \lambda w, \quad Yw = 0.$$

а) Описать явно индуцированный модуль $\widehat{W}_\lambda = \mathrm{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} W_\lambda$.

б) Доказать, что если $\lambda \neq 0$, то полученный модуль $\widehat{W}_\lambda$ неприводим.

в) Доказать, что любой неприводимый $\mathfrak{hei}(3)$-модуль V, где Y действует локально нильпотентно (т.е. для любого $v \in V$ $Y^N v = 0$ при некотором $N = N(v)$), либо одномерен, либо изоморфен $\widehat{W}_\lambda$ при некотором λ.

г) Сформулировать и доказать аналогичные результаты для произвольной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$.

12. Проективные представления

Пусть V — комплексное линейное пространство, а $P(V)$ — соответствующее проективное пространство. Группа $GL(V)$ естественным образом действует в пространстве $P(V)$.

1. а) Описать все элементы группы $GL(V)$, действующие тождественно в проективном пространстве $P(V)$.

б) Доказать, что группа $PGL(V)$ автоморфизмов пространства $P(V)$ — группа *проективных преобразований* — изоморфна факторгруппе $GL(V)/\mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$.

в) Описать алгебру Ли $\mathfrak{pgl}(V)$ группы $PGL(V)$.

Проективным представлением группы Ли G называется гомоморфизм $G \to PGL(V)$. *Проективным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\mathfrak{g} \to \mathfrak{pgl}(V)$.

2. а) Выбирая для каждого элемента группы $PGL(V)$ проектирующийся в него элемент группы $GL(V)$, доказать, что любое проективное представление группы Ли G может быть задано как отображение $T\colon G \to GL(V)$, обладающее свойством

$$T(g_1)T(g_2) = c(g_1, g_2)T(g_1 g_2),$$

где функция $c\colon G \times G \to \mathbb{C}^*$ удовлетворяет соотношению

$$c(g_1, g_2)c(g_1 g_2, g_3) = c(g_1, g_2 g_3)c(g_2, g_3).$$

б) Описать, как изменяется функция $c(g_1, g_2)$ при изменении выбора представителей $T(g)$.

в) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для проективного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3. Доказать, что каждому проективному представлению алгебры Ли $\mathfrak{h}$ соответствует некоторый двумерный коцикл $\mathfrak{h}$ с коэффициентами в тривиальном модуле, причем эквивалентным представлениям соответствуют когомологичные коциклы.

4. Установить соответствие между множеством проективных представлений алгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве V и множеством линейных представлений в пространстве V всевозможных центральных расширений алгебры $\mathfrak{h}$.

Пусть $\tau\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимое линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для любого элемента $g \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ определим представление τ^g по формуле $\tau^g(\xi) = \tau(g^{-1}\xi)$ и будем говорить, что *g стабилизирует τ*, если представления τ и τ^g эквивалентны.

5. Пусть подгруппа Ли $H \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ стабилизирует представление τ, т.е. состоит из элементов, стабилизирующих представление τ. Показать, что представление τ канононически определяет проективное представление группы Ли H и, соответственно, проективное представление ее алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве V.

6. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(3)$ — алгебра Гейзенберга, а $V_\lambda, \lambda \neq 0$ — неприводимый индуцированный $\mathfrak{g}$-модуль, описанный в задаче 9 раздела 11.

а) Описать группу $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ и ее алгебру Ли $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ (ср. с задачей 6 раздела 1).

б) Описать подгруппу $H \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, стабилизирующую представление V_λ, и ее алгебру Ли $\mathfrak{h}$.

в) Построить каноническое проективное представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве V_λ и доказать, что оно эквивалентно линейному представлению.

г) Решить аналогичную задачу для алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(2n+1)$. (В частности, данная конструкция задает так называемое представление Вейля симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n)$.)

13. Операторы Казимира и теорема Гельфанда

1. Теорема Гельфанда. Центр $Z(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры отождествляется с кольцом Ad-инвариантных элементов алгебры $S(\mathfrak{g})$.

Далее в этом разделе $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, W — ее группа Вейля.

2. Центр $Z(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры совпадает с пространством $\mathrm{Pol}_W(\mathfrak{h}^*)$ W-инвариантных полиномов на $\mathfrak{h}^*$.

3. Кольцо $\mathrm{Pol}_W(\mathfrak{h}^*)$ имеет $\operatorname{rank}\mathfrak{g}$ однородных образующих, набор степеней которых является инвариантом $\mathfrak{g}$.

Однородные образующие называются *инвариантами Шевалле*.

4. Найти базис W-инвариантов для $SL(n)$; для других классических алгебр Ли.

5. Доказать, что после канонического отождествления $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ форма Картана—Киллинга оказывается инвариантом второй степени, причем для простых алгебр Ли — единственным с точностью до пропорциональности.

В силу задачи 2 раздела 11 каждому представлению алгебры Ли соответствует представление центра универсальной обертывающей алгебры $Z(\mathfrak{g})$. Операторы этого представления называются *операторами Казимира*, а сами элементы центра — *элементами Казимира*.

6. Доказать, что для модуля Верма со старшим весом λ операторы Казимира простой алгебры Ли являются скалярными. Оператор представления элемента Казимира второй степени равен $\mu \cdot \mathrm{id}$, где $\mu = (\lambda, \lambda + 2\rho)$. То же самое верно для любого (в частности, для неприводимого) модуля со старшим весом λ.

14. Аффинные алгебры Ли. Аффинные системы корней

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ с формой Картана—Киллинга $(\cdot,\cdot)$, z — комплексная переменная. Пусть Z — одномерное линейное пространство над $\mathbb{C}$ с фиксированным базисным элементом c, d — *оператор градуировки* в пространстве лорановских полиномов от z, определяемый соотношением $dz^n = nz^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1. Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \oplus Z \oplus \mathbb{C}d$ и зададим на нем коммутирование с помощью соотношений $[xz^m, yz^n] = [x,y]z^{m+n} + (x,y)m\delta^m_{-n}c$, $[d, xz^n] = nxz^n$, $[c, \mathfrak{g}] = 0$, где $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Доказать, что $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли называется *аффинной алгеброй Каца—Муди* или просто *аффинной алгеброй Ли.*

2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ — канонические образующие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, $h_i = [e_i, f_i]$.

а) Доказать, что если присовокупить к этим образующим элементы d, $e_0 := f_\theta z$, $f_0 := e_\theta z^{-1}$, где θ — старший корень алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, e_θ, f_θ — соответствующие корневые векторы, и положить $h_0 := c - h_\theta$, где $h_\theta := [e_\theta, f_\theta]$, то получится набор образующих алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (*канонические образующие*, или *образующие Шевалле*).

б) Доказать, что эти образующие удовлетворяют соотношениям $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$, $[h_i, h_j] = 0$, $[h_j, e_i] = a_{ij}e_i$, $[h_j, f_i] = -a_{ij}f_i$, причем a_{ij} при $i, j > 0$ — это элементы матрицы Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Матрица (a_{ij}), $i, j = 0, \ldots, n$, называется *матрицей Картана* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

в) Найти матрицы Картана аффинных алгебр, соответствующих классическим алгебрам Ли.

г) Доказать, что матрица Картана аффинной алгебры имеет коранг 1 (в то время как для простых конечномерных алгебр Ли она невырождена).

3. Определим на $\mathfrak{g}$ билинейную форму с помощью соотношений $\langle xz^m, yz^n\rangle = (x,y)\delta_{m+n,0}$, $\langle c,d\rangle = 1$, $\langle xz^m, c\rangle = \langle xz^m, d\rangle = 0$, где $x,y \in \mathfrak{g}_0$. Доказать, что эта форма инвариантна и невырождена на $\mathfrak{g}$. В дальнейшем мы отождествляем пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью этой формы (в частности, элемент d оказывается двойственным к c, и наоборот).

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ — картановская подалгебра, Δ — соответствующая система корней. Назовем коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}_a := \mathfrak{h} \oplus Z \oplus \mathbb{C}d$ *картановской* для соответствующей аффинной алгебры. Положим $\Delta_a := \Delta_I \cup \Delta_W$, где $\Delta_W := \{\alpha + nc \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\}$, $\Delta_I := \{nc \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Δ_a называется *системой корней* аффинной алгебры Ли, Δ_W — системой вещественных корней, а Δ_I — системой мнимых корней. Каждому *вещественному* корню $\alpha \in \Delta_W$ сопоставим оператор в $\mathfrak{h}_a$ по формуле $s_\alpha(h) := h - \dfrac{2\langle\alpha,h\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$, $h \in \mathfrak{h}_a$. Группа W, порожденная операторами s_α, называется *группой Вейля* аффинной алгебры Ли.

4. Доказать, что любой корень представим в виде целочисленной линейной комбинации с коэффициентами одного и того же знака корней из набора $\Sigma := \{\alpha_0 = c - \theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — простые корни алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Элементы набора Σ называются *простыми корнями* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

5. Доказать, что группа W порождена отражениями относительно простых корней.

6. Доказать, что следующая формула определяет действие дуальной решетки корней $Q^\vee$ алгебры $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{h}$:

$$\gamma(h + \lambda c + \mu d) = h + \lambda c + \mu d - \Big[\langle h,\gamma\rangle + \frac{\mu}{2}\langle\gamma,\gamma\rangle\Big]c, \quad h \in \mathfrak{h},\ \gamma \in Q^\vee.$$

7. Доказать, что $W \cong W_0 \rtimes Q^\vee$, где W_0 — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Указание. Пусть $\alpha \in \Delta$, тогда действие $s_\alpha s_{\alpha+c}$ совпадает с действием $\alpha^\vee \in Q^\vee$ в смысле задачи 6.

8. Доказать, что следующая формула определяет действие дуальной решетки корней $Q^\vee$ на дополнении к f в $\mathfrak{g}$: $\gamma(x_\alpha \otimes z^n) = x_\alpha \otimes z^{n-\langle\alpha,\gamma\rangle}$ ($\gamma \in Q^\vee$, $\alpha + nc \in \Delta$, то есть α и n не равны 0 одновременно).

9. Доказать, что действие каждого элемента $\gamma \in Q^\vee$ на $\mathfrak{g}$, определенное в задачах 6 и 8, является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

10. Доказать, что мнимые корни неподвижны относительно группы Вейля (в противоположность ситуации с конечными системами корней, где любой корень можно перевести в любой другой).

11. Доказать, что пространство $\mathfrak{h}$ является W-инвариантным.

12. Доказать, что для элементов матрицы Картана справедливо соотношение $a_{ij} = \dfrac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle}$.

15. Аффинная алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$ и ее элемент Казимира

1. Доказать, что аффинная алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$, как линейное пространство, имеет базис $\{E_m, F_m, H_m, c, d \mid m \in \mathbb{Z}\}$, где для любого $X \in \mathfrak{sl}(2)$ $X_m := Xz^m$, E, F, H — образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, с коммутационными соотношениями $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$, $[E,F] = H$, c — образующая центра, а d — оператор градуировки.

2. Доказать, что элементы E, F_1, F, E_{-1}, c, d являются образующими алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$.

Ниже мы пишем также *произведения* символов E_m, F_m, H_m. В этом случае мы имеем в виду не элементы алгебры Ли, а элементы универсальной обертывающей алгебры.

Рассмотрим формальную бесконечную сумму

$$\Omega_0 := 2\sum_{n\geqslant 0} F_{-n}E_n + 2\sum_{m>0} E_{-m}F_m + \sum_{m>0} H_{-m}H_m.$$

Убедиться, что написанные ниже коммутаторы имеют смысл, и доказать соотношения:

3. а) $[E, 2F_{-n}E_n + 2E_{-n}F_n + H_{-n}H_n] = 0$, $n > 0$;
б) $[E, \Omega_0] = 2HE$.

4. а) $[F_1, 2F_{-n}E_n] = -2F_{-n}H_{n+1}$ $(n \geqslant 0)$;
б) $[F_1, 2E_{-m}F_m] = -2H_{1-m}F_m + 2\delta_{1,m}cF_m$;
в) $[F_1, 2H_{-m}H_m] = 2F_{1-m}H_m + 2H_{-m}F_{1+m}$;
г) $[F_1, \Omega_0] = 2(c - H)F_1$.

5. Найти аналоги соотношений из задач 3*б* и 4*г* для образующих F и E_{-1}.

6. Доказать, что $[d, \Omega_0] = 0$.

7. Доказать, что $\left[E, H + \frac{1}{2}H^2\right] = -2HE$. Найти аналог этого соотношения для образующей F.

8. Доказать, что $\left[F_1, H + \frac{1}{2}H^2\right] = 4F_1 + 2HF_1$. Найти аналог этого соотношения для образующей E_{-1}.

9. Доказать, что $[F_1, cd] = -cF_1$.

10. Пусть $\Omega := \Omega_0 + H + \frac{1}{2}H^2 + 4d + 2cd$. Тогда $[E, \Omega] = [F_1, \Omega] = [F, \Omega] = [E_{-1}, \Omega] = 0$.

Таким образом, с учетом результата задачи 2, Ω является элементом Казимира алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$.

16. Формула Вейля—Каца для характера

Пусть

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ — аффинная алгебра Каца—Муди, соответствующая простой алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ — треугольное разложение алгебры $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$;

Δ_+ — множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$;

d_α — кратность корня α, $e_\alpha^{(i)}$ — корневые векторы, соответствующие корню α, $\langle e_\alpha^{(i)}, e_{-\alpha}^{(j)}\rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, d_\alpha)$;

$\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — простые корни;

$e_0, \ldots, e_n, f_0, \ldots, f_n$ — образующие Шевалле;

$h_i = [e_i, f_i]$, $h^j \in \mathfrak{h}$: $\langle h_i, h^j \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 0, \ldots, n)$;

W — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$;

$D(\lambda) = \left\{ \lambda - \sum\limits_{i=0}^{n} k_i \alpha_i \mid k_i \in Z_+,\ i = 0, \ldots, n \right\}$ для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Определение. Говорят, что $\mathfrak{g}$-модуль V принадлежит категории $\mathcal{O}$, если

1) он обладает разложением $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ на весовые подпространства и $e_\alpha^{(i)} V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$;

2) $\dim V_\lambda < \infty$ для всех λ;

3) множество весов модуля V содержится в объединении конечного числа множеств вида $D(\lambda)$: $P(V) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq 0\} \subset \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} D(\lambda_i)$ для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$.

1. Доказать, что

а) любой модуль Верма M_χ (со старшим весом χ) принадлежит категории $\mathcal{O}$;

б) модуль, соответствующий присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{g}$, не принадлежит категории $\mathcal{O}$;

в) любой модуль из категории $\mathcal{O}$ содержит хотя бы один примитивный вектор;

г) на любом модуле из категории $\mathcal{O}$ определено действие *обобщенного оператора Казимира* $\Omega := 2\rho + \sum\limits_{i=0}^{n} h_i h^i + \sum\limits_{\alpha \in \Delta_+} \sum\limits_{i=1}^{d_\alpha} e_{-\alpha}^{(i)} e_\alpha^{(i)}$ (определение ρ см. в задаче 2);

д) $P(M_\chi) = D(\chi)$;

е) $\mathrm{ch}(M_\chi) = e^\chi \prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{-d_\alpha}$.

2. Пусть ρ_0 — полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Как и в задаче 3 раздела 14, мы отождествим элемент d с двойственным элементом к c относительно инвариантной билинейной формы и положим $\rho = \rho_0 + \theta d$, $\theta \in \mathbb{C}$.

а) Доказать, что можно выбрать константу θ так, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{2\langle\rho,\alpha_0\rangle}{\langle\alpha_0,\alpha_0\rangle}=1$.

б) Доказать, что отражение s_i относительно простого корня α_i действует на ρ по формуле $s_i(\rho)=\rho-\alpha_i$.

в) Преобразуем характер модуля Верма к виду $\mathrm{ch}(M_\chi) = e^{\chi+\rho}K^{-1}$, где $K=e^\rho\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})^{d_\alpha}$. Доказать, что K — выражение, антиинвариантное относительно группы Вейля W, т.е. $wK=\det(w)K$ для любого $w\in W$.

Указание. Достаточно рассмотреть лишь действие простых отражений s_i.

3. а) Пусть $V\in\mathcal{O}$. Тогда $\mathrm{ch}\,V=\sum c_\psi\,\mathrm{ch}(M_\psi)$, где c_ψ — целые числа.

б) Если $V=V_\chi$ — модуль, порожденный старшим весом χ, и $\psi\notin D(\chi)$, то $c_\psi=0$.

Указание. Пусть χ — примитивный вес модуля V (см. задачу 1*в*) и k — его кратность. Рассмотреть точную последовательность

$$0\to M\to(M_\chi)^k\xrightarrow{\pi}V\to N\to 0$$

(π — естественный гомоморфизм, M — его ядро, N — коядро). Показать, что $\mathrm{ch}\,V=k\,\mathrm{ch}\,M_\chi+\mathrm{ch}\,N-\mathrm{ch}\,M$. Продолжить этот процесс с M и N.

Модуль V называется *локально конечным*, если $e_i^N v=f_i^N v=0$ для любых $v\in V$, $i=0,\ldots,n$ и достаточно большого N.

4. а) Доказать, что присоединенный модуль локально конечен, а модуль Верма — нет.

б) Доказать, что условие локальной конечности достаточно проверять лишь для образующих модуля V.

в) Доказать, что модуль L_χ (неприводимый модуль со старшим весом χ) локально конечен тогда и только тогда, когда $\chi(h_i)\in Z_+$ для любых $i=0,\ldots,n$ (такие веса называют *доминантными*).

5. Если модуль $V\in\mathcal{O}$ локально конечен, то $\dim V_\lambda=\dim V_{w(\lambda)}$ для любого элемента $w\in W$ (в частности, множество всех весов, или *весовая диаграмма*, модуля V является W-инвариантным).

Указание. Рассмотреть $w = s_i$ и конечномерный $\mathfrak{sl}(2)$-модуль, порожденный подпространством $V_\lambda + V_{s_i\lambda}$.

Следствие. *Для доминантных весов χ весовая диаграмма модуля L_χ является W-инвариантной.*

6. Пусть $V = V_\chi$, а числа c_ψ те же, что и в задаче 3. Доказать, что если $c_\psi \neq 0$, то $\langle \psi+\rho, \psi+\rho\rangle = \langle \chi+\rho, \chi+\rho\rangle$.

Указание. Воспользоваться решением задачи 3 и тем фактом, что оператор Казимира второй степени коммутирует с действием $\mathfrak{g}$ и, следовательно, действует на модуле со старшим весом умножением на константу (какую?).

7. Пусть $V = L_\chi$, χ — доминантный вес. Если $\psi+\rho = w(\varphi+\rho)$, то $c_\psi = (\det w)c_\varphi$.

Указание. Из задач 2*в* и 3 следует, что $(\operatorname{ch} L_\chi)K = \sum\limits_\psi c_\psi e^{\psi+\rho}$ и левая часть этого равенства W-антиинвариантна.

8. Пусть χ — доминантный вес. Если $D \subset D(\chi)$ является W-инвариантным подмножеством, то для любого $\psi \in D$ найдется такой элемент $w \in W$, что $w\psi$ — доминантный вес.

9. Пусть $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}^*$; $\langle \varphi, \alpha_i\rangle \geqslant 0$ для любого $i = 0, \dots, n$. Пусть, кроме того, $\varphi \in D(\psi)$ и $\langle\varphi,\varphi\rangle = \langle\psi,\psi\rangle$. Тогда $\varphi = \psi$.

10. Пусть χ — доминантный вес и $D = \{\psi \in P(L_\chi) \mid c_{\psi-\rho} \neq 0\}$. Тогда $D = W(\chi+\rho)$ (орбита $\chi+\rho$ под действием W).

Указание. Воспользоваться результатами задач 6 и 9.

11. Пусть $V = L_\chi$. Тогда

а) $c_\psi \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\psi = w(\chi+\rho)-\rho$, причем $c_{w(\chi+\rho)-\rho} = \det w$;

б) $\operatorname{ch} L_\chi = K^{-1}\sum\limits_{w\in W}(\det w)e^{w(\chi+\rho)}$ (формула Вейля—Каца для характера);

в) $K = \sum\limits_{w\in W}(\det w)e^{w\rho}$.

17. Отображение момента

Пусть M — гладкое многообразие с действием группы Ли G на нем, а $\mathcal{F} = T^*(M)$ — кокасательное расслоение с канонической симплектической структурой[3]. Действие группы Ли G естественным образом поднимается до симплектического действия на $\mathcal{F}$. Обозначим через G_x орбиту точки $x \in \mathcal{F}$. Ограничим форму $p\,dq$ на G_x, поднимем полученную форму на G и ограничим на касательное пространство в единице. Получим *отображение момента* $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathfrak{g}^*$.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, и отождествляем $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ с помощью формы Картана—Киллинга.

1. Пусть G — полупростая группа Ли, а многообразие $M = \mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли с присоединенным действием. Тогда $\mathcal{F} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Доказать, что $\mu(x, y) = [x, y]$.

Указание. Для $X \in \mathfrak{g}$, $\delta Y \in T_X(\mathfrak{g})$, $dq = X$, $p = \delta Y$ имеем $p\,dq = (X, \delta Y)$, где $(\cdot,\cdot)$ — форма Картана—Киллинга.

2. Пусть $M = \mathbb{R}^3$, $G = SO(3)$. Доказать, что в этом случае момент μ совпадает с физическим моментом относительно начала координат. (Здесь q интерпретируется как набор обобщенных координат, а p — как набор обобщенных импульсов механической системы.)

3. Пусть $M = \mathbb{R}^3$, $G = SO(2)$ — группа вращений относительно оси. Доказать, что μ — физический момент относительно этой оси.

4. Пусть $M = \mathbb{R}^3$, G — группа переносов. Доказать, что μ — импульс.

---

[3]Каноническая 1-форма α на пространстве M обычно обозначается $p\,dq$, ее дифференциал $\Omega = d\alpha$ задает каноническую симплектическую форму на $T^*(m)$. Подробнее о симплектической структуре в кокасательном расслоении см. в [8].

18. Гамильтонова редукция на примере систем Калоджеро—Мозера

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathcal{F} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, $P, Q \in \mathfrak{g}$, $\delta P, \delta Q \in T\mathfrak{g}$ (касательное пространство).

1. Проверить, что форма $(P, Q) = \mathrm{tr}(PQ)$ пропорциональна форме Картана—Киллинга, $\Omega = \mathrm{tr}(\delta P \wedge \delta Q)$ — симплектическая форма на $\mathcal{F}$ (по определению если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то $A \wedge B = (\sum_k a_{ik} \wedge b_{kj})$).

2. Пусть $J = (J_{ij})$, $J_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Найти стабилизатор G_J элемента J в $\mathfrak{sl}(n)$.

3. Показать, что решение уравнения $\mu(P, Q) = J$ по модулю действия G_J имеет вид $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$, $P = \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_n) + \nu J'$, где $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$, ν — число, $J' = (J'_{ij})$, $J'_{ij} = \dfrac{1 - \delta_{ij}}{q_i - q_j}$ $(i \neq j)$, $J'_{ii} = 0$.

Указание. $\mu(P, Q) = [P, Q]$, матрица Q может быть диагонализирована преобразованиями из G_J.

4. Многообразие решений *уравнения момента* $\mu(P, Q) = J$ по модулю действия G_J называется *редуцированным многообразием.* Показать, что в координатах p_i, q_i ограничение симплектической формы Ω на редуцированное многообразие имеет канонический вид.

5. Рассмотрим *свободный гамильтониан* в $\mathcal{F}$: $H = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P^2)$. Проверить, что при ограничении на редуцированное многообразие H переходит в $\overline{H} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum\limits_{i<j} \dfrac{\nu}{(q_i - q_j)^2}$ (гамильтониан Калоджеро—Мозера).

6. Функционалы $H_k = \mathrm{tr}\, P^k$ являются функционально независимыми интегралами движения нередуцированной системы и находятся в инволюции.

7. (Общий факт) Показать, что отображение редукции пуассоново (сохраняет скобку Пуассона).

8. (Общий факт) Доказать, что G-инвариантные интегралы движения после редукции остаются интегралами движения.

9. Вывести из задач 6—8, что интегралы $\overline{H}_k$, полученные путем ограничения H_k на редуцированное фазовое пространство, функционально независимы и находятся в инволюции.

Следствие. *Система Калоджеро—Мозера вполне интегрируема в смысле теоремы Лиувилля.*

Изложенная в задачах 1—9 схема получения гамильтониана с потенциалом из свободной системы носит название *гамильтоновой редукции.*

19. Непериодическая цепочка Тоды

Пусть $\mathcal{F} = T^*(G/N)$, где $G = GL(n)$, $N \subset G$ — подгруппа треугольных матриц с единицами на диагонали, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, $\delta P, \delta Q \in \mathfrak{g}$, $S = \operatorname{tr}(\delta P \wedge \delta Q)$, $H = \operatorname{tr}(\delta P \cdot \delta Q) = (\delta P, \delta Q)$, μ — отображение момента.

1. Доказать, что база расслоения $\mathcal{F}$ может быть отождествлена с полупрямым произведением групп диагональных и ортогональных матриц, а слой — с пространством всех симметрических матриц.

2. Доказать, что S порождает на $\mathcal{F}$ инвариантную симплектическую форму, а H — невыроженную инвариантную симметрическую форму.

3. Если $q \in G$, $p \in T_q^*G$ $(p = qP,\ P \in \mathfrak{g}^*)$, то $\mu(q,p) = qPq^{-1}$.

4. Пусть J — симметрическая матрица. Показать, что уравнение момента

$$\mu(q,p) = qPq^{-1} = J$$

в $\mathcal{F}$ всегда может быть приведено к виду, где P — симметрическая матрица, q — диагональная (воспользоваться результатом задачи 1 и разложением Ивасавы для q).

5. Пусть J — трехдиагональная матрица, на главной диагонали которой стоят нули, а на двух соседних — единицы (остальные элементы — нули). Решить уравнение момента

$$\mu(q,p) = qPq^{-1} = J.$$

6. Пусть $q=\exp Q$, $Q=\operatorname{diag}(q_1,\ldots,q_n)$, $p_{ii}=p_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда на пространстве решений уравнения момента (называемом редуцированным пространством) форма H принимает вид

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i^2+\sum_{i=1}^{n}e^{2(q_{i+1}-q_i)}.$$

Это гамильтониан *непериодической цепочки Тоды.*

7. Убедиться в том, что полная система интегралов цепочки Тода получается редукцией тех же интегралов свободной системы, что и в случае систем Калоджеро—Мозера («следов степеней»).

8. Доказать вполне интегрируемость непериодической цепочки Тоды (см. задачи 6—9 раздела 18).

9*. Обобщить результат задачи 8 на случай произвольной конечной системы корней и гамильтониана

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i^2+\sum_{\alpha\in\Delta_s}e^{2\langle\alpha,Q\rangle},$$

где Δ_s — система простых корней.

20. Системы многих тел: случай Сазерленда

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная конечномерная полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, $\Delta=\{\alpha\}$ — ее система корней, $\hat{\mathfrak{g}}$ — соответствующая аффинная алгебра Ли, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — форма Картана—Киллинга на $\hat{\mathfrak{g}}$, $G=\exp\mathfrak{g}$. Введем также следующие обозначения:

$\widehat{G}:=\{g\colon S^1\to G\mid g$ — гладкое отображение$\}$ — группа петель;

A — гладкая $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на S^1;

$\varphi\colon S^1\to\mathfrak{g}$ — многозначное отображение;

k, c — комплексные числа;

$\oint$ — интеграл по S^1.

1. Доказать, что те отображения φ, для которых $\langle\varphi,\varphi\rangle$ — однозначный функционал на S^1, образуют линейное пространство (в дальнейшем предполагается, что φ принадлежит этому пространству).

Пусть Φ — пространство пар $\{(A,k),(\varphi,c)\}$, $\Omega := \oint(\delta\varphi\wedge\delta A + \delta c\wedge\delta k)$.

2. Доказать, что Ω является симплектической формой на Φ (вариация $\delta\varphi$ предполагается однозначной).

3. Определим действие $\widehat{G}$ на Φ (калибровочные преобразования):

$$(\varphi,c)\to\left(g\varphi g^{-1},\ c-\oint\langle\varphi,g^{-1}\partial g\rangle\right), \tag{а}$$

$$(A,k)\to(gAg^{-1}+kg\partial g^{-1},\ k) \tag{б}$$

($\varphi=\varphi(\xi)$, $g=g(\xi)$, $\xi\in[0,2\pi]$). Доказать, что форма Ω инвариантна относительно этого действия.

4. Доказать, что момент μ равен $k\partial\varphi+[A,\varphi]$.

5. (Классификация орбит коприсоединенного действия алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$)

а) Отождествить пространство пар (A,k) с $\hat{\mathfrak{g}}^*$;

б) доказать, что орбиты действия (б) из задачи 3 находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности монодромий уравнений $du=Au$ ($u\colon S^1\to G$ — многозначное отображение);

в) доказать, что почти все формы A преобразованиями 3(б) приводятся к постоянным формам со значениями в $\mathfrak{h}$ (такие формы A назовем регулярными и в дальнейшем ограничимся только ими).

Введем следующие обозначения:

$$J_\nu := \nu\sum_{\alpha\in\Delta}e_\alpha\in\mathfrak{g}\quad(\nu\in\mathbb{R}),\qquad G_0:=\mathrm{Stab}_G J_\nu.$$

6. а) Доказать, что $\mathrm{Stab}_{\widehat{G}}\,\delta(\xi)J_\nu=\{g\in\widehat{G}\mid g(0)\in G_0\}$.

б) Рассмотрим уравнение момента $k\partial\varphi+[A,\varphi]=\delta(\xi)J_\nu$ на пространстве регулярных форм A. Доказать, что преобразованиями из задачи 3 его можно привести к уравнению с постоянной $\mathfrak{h}$-значной формой A, не меняя правой части уравнения.

Указание. Можно считать известным аналогичный факт для системы Калоджеро—Мозера.

7. Пусть P — картановская часть элемента φ, Q — постоянная картановская форма для $\dfrac{1}{k}A$. Привести уравнение момента к форме

$$k\,\partial P = \delta(\xi), \tag{а}$$

$$k\,\partial\varphi_\alpha + \langle Q, \varphi_\alpha\rangle = \delta(\xi) \tag{б}$$

и решить его. $\Bigl($Ответ: $P = \mathrm{const}$, $\varphi_\alpha = \nu\dfrac{\exp(-i\langle Q,\alpha\rangle)}{\exp(-2i\langle Q,\alpha\rangle)-1}$.$\Bigr)$

8. Показать, что редукция гамильтониана $H = \oint\langle\varphi,\varphi\rangle$ на Φ приводит к *гамильтониану Сазерленда*

$$H_{\mathrm{red}} = -\frac{1}{2}\langle P, P\rangle + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{\nu^2}{\sin^2\langle Q,\alpha\rangle}.$$

Литература

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
2. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: УРСС, 1995.
3. Желобенко Д. П. Комплексные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
4. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.
5. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. — М.: Мир, 1993.
6. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Структура представлений, порожденных векторами старшего веса // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 1. С. 1—9.
7. Frenkel I. B. Orbital theory of affine Lie algebras // Invent. Math. 1984. V. 77, № 2. P. 301—352.
8. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
9. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. Цепочка Тоды как редуцированная система // Теор. и матем. физика. 1980. Т. 45, вып. 1. С. 3—18.
10. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Рейман А. и Семенов-Тянь-Шаньский М. Интегрируемые системы и конечномерные алгебры Ли // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем. Т. 16. С. 86—226.
11. Горский А. Интегрируемые системы многих тел в теории поля // Теор. и матем. физика. 1995, Т. 103. С. 681.
12. Van Asch B. Modular forms and root systems // Math. Ann. 1976. V. 222. P. 145—170.

Оглавление