ГЛАВА III

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 16. Формулировка теоремы Хёрмандера и комментарии.

16.1. Формулировка и пример. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, на котором задана гладкая положительная плотность dx, A — такой самосопряженный эллиптический оператор порядка m на M, что $a_m(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Будем использовать введенные в § 15 обозначения $e(x, y, \lambda)$, $N(t)$, $V_x(\lambda)$, $V(\lambda)$. Следующая теорема уточняет теоремы 15.1 и 15.2.

Теорема 16.1 (Л. Хёрмандер). *Имеет место оценка*

$$|e(x, x, \lambda) - V_x(\lambda)| \leqslant C\lambda^{(n-1)/m}, \quad \lambda \geqslant 1, \quad x \in M, \tag{16.1}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от x и λ.

Следствие 16.1. *При $\lambda \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-1/m})). \tag{16.2}$$

Замечание 16.1. Оценка остатка в формулах (16.1) и (16.2) является неулучшаемой. В этом можно убедиться, например, из рассмотрения оператора $A = -d^2/dx^2$ на окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Собственные функции здесь имеют вид $\psi_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а собственные значения равны $\lambda_k = k^2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Далее, поскольку $|\psi_k(x)|^2 = (2\pi)^{-1}$, то ясно, что $e(x, x, \lambda) = (2\pi)^{-1} N(\lambda)$. Поскольку при этом $V_x(\lambda) = (2\pi)^{-1} V(\lambda)$, то формулы (16.1) и (16.2) равносильны. Поэтому достаточно проверить неулучшаемость оценки остатка в формуле (16.2), которая имеет здесь вид $N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-1/2}))$ или $N(\lambda) = 2\sqrt{\lambda} + O(1)$. Но неулучшаемость последней асимптотики очевидна из целочисленности $N(\lambda)$.

В дальнейшем (§ 22) мы приведем более содержательный пример, являющийся обобщением изложенного (оператор Лапласа на сфере) и позволяющий получить неулучшаемость оценки (16.1) в случае произвольных n и m.

16.2. Схема доказательства. Во-первых, теория комплексных степеней позволяет свести дело к случаю, когда A — ПДО порядка 1. В этой ситуации мы покажем, что e^{itA} при малых t представляет собой ИОФ с фазовой функцией, являющейся решением некоторого нелинейного уравнения 1-го порядка. Заметим теперь, что ядро оператора e^{itA} представляет собой преобразование Фурье (по λ) спектральной функции $e(x, y, \lambda)$ оператора A. Отсюда асимптотика (16.1) получается, если применить рассуждение типа тауберовой теоремы для преобразования Фурье.

Дальнейший план этой главы таков: § 17 содержит необходимые сведения о нелинейных уравнениях 1-го порядка; в § 18 доказана важная теорема о действии ПДО на экспоненту, из которой вытекает, в частности, формула композиции ПДО и ИОФ; в § 19 изучаются фазовые функции, отвечающие классу ПДО; в § 20 мы строим оператор e^{itA} в виде ИОФ для оператора A 1-го порядка; в § 21 теорема 16.1 доказана в общем случае (имеется также информация об $e(x, y, \lambda)$ при $x \neq y$); наконец, § 22 содержит определение оператора Лапласа на римановом многообразии и вычисление его спектральной функции в случае сферы.

Задача 16.1. Для оператора

$$A = -\Delta = -\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\Big)$$

на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ вычислить $N(t)$ и $e(x, x, \lambda)$ и убедиться в справедливости асимптотических формул (16.1) и (16.2).

§ 17. Нелинейные уравнения 1-го порядка

17.1. Бихарактеристики. Пусть M — n-мерное многообразие, $a(x, \xi)$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на открытом подмножестве в T^*M. Рассмотрим гамильтонову систему в T^*M, порожденную функцией $a(x, \xi)$ как гамильтонианом:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_\xi, \\ \dot{\xi} = -a_x. \end{cases} \tag{17.1}$$

где $a_\xi = \Big(\dfrac{\partial a}{\partial \xi_1}, \ldots, \dfrac{\partial a}{\partial \xi_n}\Big)$, $a_x = \Big(\dfrac{\partial a}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial a}{\partial x_n}\Big)$, (x, ξ) — координаты в T^*M, индуцированные некоторой локальной системой координат в M. Как известно (см., например, Арнольд В. И. [1]), векторное поле на T^*M, определяемое правыми частями (17.1), не зависит от выбора локальных координат в M.

Определение 17.1. Кривая $(x(t), \xi(t))$, являющаяся решением (17.1), называется *бихарактеристикой* функции $a(x, \xi)$.

Бихарактеристика не обязана быть определена при всех $t \in \mathbb{R}$. В этом случае мы будем считать ее определенной на максимальном возможном интервале (см. по этому поводу также задачи 17.1 и 17.2).

Предложение 17.1. *Функция $a(x, \xi)$ является первым интегралом системы* (17.1), *т. е. если $(x(t), \xi(t))$ — бихарактеристика функции $a(x, \xi)$, то $a(x(t), \xi(t)) = \text{const}$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt}\, a(x(t), \xi(t)) = a_x \dot{x} + a_\xi \dot{\xi} = a_x a_\xi - a_x a_\xi = 0. \quad \blacksquare$$

Предложение 17.1 делает осмысленным следующее

Определение 17.2. Бихарактеристика $(x(t), \xi(t))$ функции $a(x, \xi)$ называется *нулевой* бихарактеристикой, если $a(x(t), \xi(t)) \equiv 0$.

17.2. Уравнение Гамильтона—Якоби. Рассмотрим уравнение в частных производных 1-го порядка

$$a(x, \varphi_x(x)) = 0, \tag{17.2}$$

где φ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на открытом подмножестве в M, φ_x — ее градиент. Такое уравнение называется *уравнением Гамильтона—Якоби*. Для его рассмотрения удобно ввести график φ_x, т. е. множество

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi_x(x)),\ x \in M\} \subset T^*M. \tag{17.3}$$

Предложение 17.2. *Если φ — решение уравнения* (17.2), *то многообразие Γ_φ инвариантно относительно фазового потока системы* (17.1), *т. е. если $(x(t), \xi(t))$ — бихарактеристика функции a, $x(t)$ при $t \in [0, b]$ лежит в области определения φ и $(x(0), \xi(0)) \in \Gamma_\varphi$, то $(x(t), \xi(t)) \in \Gamma_\varphi$ при всех $t \in [0, b]$.*

Доказательство. В силу теоремы единственности достаточно проверить, что гамильтоново поле $(a_\xi, -a_x)$ касается многообразия Γ_φ во всех его точках. Последнее равносильно тому, что если $(x(t), \xi(t))$ — бихарактеристика и $(x(0), \xi(0)) \in \Gamma_\varphi$ (т. е. $\xi(0) = \varphi_x(x(0))$), то $\left\{\frac{d}{dt}[\xi(t) - \varphi_x(x(t))]\right\}\Big|_{t=0} = 0$. Но это вытекает из следующей выкладки:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d}{dt}[\xi(t) - \varphi_x(x(t))]\right\}\Big|_{t=0} &= (\dot{\xi} - \varphi_{xx} \cdot \dot{x})|_{t=0} = \\ &= -a_x(x(0), \xi(0)) - \varphi_{xx}(x(0))\, a_\xi(x(0), \xi(0)) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}[a(x, \varphi_x(x))]_{x=x(0)} = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

В дальнейшем для нас будет существен лишь случай, когда функция $a(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка m, т. е.

$$a(x, t\xi) = t^m a(x, \xi), \quad t > 0,\ \xi \neq 0, \tag{17.4}$$

где m — пока любое вещественное число. Такие функции характеризуются теоремой Эйлера:

$$\xi \cdot a_\xi = ma. \tag{17.5}$$

Предложение 17.3. *Пусть $a(x, \xi)$ однородна порядка m, $\varphi(x)$ — решение уравнения (17.2). Тогда функция φ постоянна вдоль проекции нулевых бихарактеристик функции $a(x, \xi)$, лежащих на Γ_φ, т. е. если $(x(t), \xi(t))$ — нулевая бихарактеристика и $\xi(0) = \varphi_x(x(0))$, то $\varphi(x(t)) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt}\,\varphi(x(t)) = \varphi_x \dot{x} = \varphi_x a_\xi = \varphi_x(x(t))\, a_\xi(x(t),\, \xi(t)) = \\ = \varphi_x(x(t))\, a_\xi(x(t),\, \varphi_x(x(t))) = ma(x(t),\, \varphi_x(x(t))) = 0. \quad \blacksquare$$

17.3. Задача Коши. Задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби (17.2) состоит в том, что надо найти решение $\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\varphi|_S = \psi, \tag{17.6}$$

где S — гиперповерхность (подмногообразие коразмерности 1) в M, $\psi \in C^\infty(S)$. Гиперповерхность S локально можно считать гиперплоскостью, т. е. выбором локальной системы координат в окрестности точки $x_0 \in S$ можно добиться того, что

$$S = \{x\colon x_n = 0\}, \tag{17.7}$$

так что $\psi = \psi(x')$, где $x' = (x_1,\, \ldots,\, x_{n-1})$. В этой системе координат удобно сформулировать условие *нехарактеристичности*, гарантирующее локальную разрешимость задачи Коши в окрестности точки $x' \in S$: уравнение

$$a(x',\, 0,\, \psi_{x'}(x'),\, \lambda) = 0 \tag{17.8}$$

имеет простой корень λ, т. е. такой корень $\lambda \in \mathbb{R}$, что вместе с (17.8) выполнено условие

$$\frac{\partial a}{\partial \xi_n}\,(x',\, 0,\, \psi_{x'}(x'),\, \lambda) \neq 0. \tag{17.9}$$

Пусть фиксирована точка $0 \in S$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение

$$a(x,\, \xi',\, \lambda) = 0 \tag{17.10}$$

при $|x| < \varepsilon$ и $|\xi' - \psi_{x'}(0)| < \varepsilon$ имеет решение $\lambda = a'(x,\, \xi')$, являющееся гладкой функцией от x и ξ'. Легко проверить, что функция $a'(x,\, \xi')$ однородна 1-го порядка по ξ', так что мы можем считать, что она определена при $|x| < \varepsilon$ и при всех $\xi' \neq 0$ в конической окрестности $\psi_{x'}(0)$.

Уравнение (17.10) при $|x|<\varepsilon$ и для векторов (ξ',λ), близких по направлению к $(\psi'_{x'}(0),\, a'(0,\,\psi'_{x'}(0)))$, можно переписать в виде

$$\lambda - a'(x,\,\xi') = 0. \tag{17.11}$$

Локальная задача Коши ставится тогда следующим образом: найти такое решение $\varphi=\varphi(x)$ уравнения (17.2), что выполнено условие (17.6) и, кроме того,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(0,\,0) = a'(0,\,\psi'_{x'}(0)). \tag{17.12}$$

Поскольку в описанной ситуации возможен переход от (17.10) к (17.11), то нашу задачу можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - a'\Big(x,\,\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\Big) = 0, \tag{17.13}$$

$$\varphi|_{x_n=0} = \psi(x'), \tag{17.14}$$

т. е. дело сводится к случаю

$$a(x,\,\xi) = \xi_n - a'(x,\,\xi'). \tag{17.15}$$

Рассмотрим бихарактеристики функции $a(x,\xi)$ вида (17.15). Их уравнения таковы

$$\begin{cases} \dot{x}' = -a'_{\xi'}(x,\,\xi'), \\ \dot{x}_n = 1, \\ \dot{\xi} = a'_x(x,\,\xi'). \end{cases} \tag{17.16}$$

Рассмотрим нулевую бихарактеристику $(x(t),\,\xi(t))$, лежащую на Γ_φ и начинающуюся на S, т. е. такую, что $x_n(0)=0$. Тогда из (17.16) ясно, что $x_n(t)=t$. Фиксируем еще точку $x'=x'(0)\in S$. Ясно, что условие $(x(0),\,\xi(0))\in\Gamma_\varphi$ означает следующее:

$$\xi'(0) = \psi'_{x'}(x'), \qquad \xi_n(0) = \frac{\partial\varphi}{x_n}(x',\,0), \tag{17.17}$$

а условие $a(x(0),\,\xi(0))=0$ дает

$$\xi_n(0) = a'(x',\,0,\,\psi'_{x'}(x')). \tag{17.18}$$

Таким образом, нулевая бихарактеристика, лежащая на Γ_φ и такая, что $x_n(0)=0$, $x'(0)=x'$, однозначно определена. Из формул (17.17), (17.18) очевидна ее гладкая зависимость от x'. Кроме того, если рассмотреть отображение

$$g\colon (x',\,x_n) \mapsto (x'(x_n),\,x_n), \tag{17.19}$$

определенное при $|x|<\varepsilon$, то из начального условия $x'(0)=x'$ вытекает, что его якобиан обращается в 1 при $x_n=0$, так что g является локальным диффеоморфизмом. Но из предложения 17.3 тогда с необходимостью вытекает, что

$$\varphi(x)=\psi([g^{-1}(x)]'), \tag{17.20}$$

где $[g^{-1}(x)]'$ — вектор, полученный из $g^{-1}(x)$ отбрасыванием последней компоненты (в соответствии с обозначением x' для $x=(x', x_n)$.

Таким образом, мы доказали единственность решения локальной задачи Коши и получили формулу (17.20) для этого решения. Существование же решения может быть получено простой проверкой. Мы рекомендуем читателю

Упражнение 17.1. Показать, что формула (17.20) действительно задает решение локальной задачи Коши, описанной выше.

17.4. Глобальная формулировка. Мы хотим сформулировать условия, достаточные для существования решения задачи Коши в окрестности S, уже не ограничиваясь малой окрестностью точки на S (хотя окрестность гиперповерхности S может быть и очень малой в смысле, например, какого-нибудь расстояния до S). Они состоят, конечно, во-первых, в выполнении условий разрешимости локальной задачи в каждой точке $x\in S$ и, во-вторых, грубо говоря, в существовании непрерывно зависящего от x корня λ уравнения (17.8). Последнее означает, что на S можно определить поле ковекторов $\xi=\xi(x')\in T^*_{x'}M$, непрерывно зависящих от $x'\in S$ и таких, что

1) $i^*\xi(x')=\psi_{x'}(x')$ где $i\colon S\to M$, $\psi_{x'}(x')$ — градиент функции $\psi(x')$ в точке $x'\in S$, рассматриваемый как ковектор на S (элемент $T^*_{x'}S$);

2) если ввести локальные координаты, описанные в п. 17.3, в окрестности какой-нибудь точки $x'\in S$, то мы получим

$$\xi(x')=(\psi_{x'}(x'),\ \lambda(x')),$$

где $\lambda(x')$ — корень уравнения (17.8), удовлетворяющий условию (17.9), т. е. выполнены все условия разрешимости локальной задачи Коши. Заметим, что условие (17.12) можно без локальных координат записать здесь в виде

$$\varphi_x(x')=\xi(x'), \qquad x'\in S. \tag{17.21}$$

Таким образом, окончательная формулировка задачи Коши: найти определенное в связной окрестности гиперповерхности S решение уравнения (17.2), удовлетворяющее начальному условию (17.6) и дополнительному условию (17.21). В такой формулировке эта задача имеет единственное решение, гладко зависящее от параметров (если таковые имеются), при условии, что сами ее данные a, S, ψ и ξ гладко зависят от этих же параметров.

Замечание 17.1. Условие 1) очевидным образом необходимо (если считать выполненными все остальные) для разрешимости задачи Коши и означает просто отсутствие топологических препятствий для глобального существования поля $\xi(x')$, локальное существование и гладкость которого обеспечиваются условиями разрешимости локальных задач в точках $x' \in S$.

17.5. Линейные однородные уравнения. Уравнение (17.2) называется *линейным однородным*, если фунция $a(x, \xi)$ линейна по ξ, т. е.

$$a(x, \xi) = V(x) \cdot \xi, \tag{17.22}$$

где $V(x)$ — векторное поле на M. Проекции бихарактеристик на M являются в этом случае решениями системы

$$\dot{x} = V(x), \tag{17.23}$$

а решения системы (17.2) — это просто первые интегралы системы (17.23). Сама система (17.1) содержит вместе с (17.23) еще уравнения

$$\dot{\xi} = -V_x(x) \cdot \xi, \tag{17.24}$$

линейные по ξ. Стандартная оценка роста $|\xi(t)|$ показывает, что если $x(t) \in K$, где K — компакт в M, то $|\xi(t)|$ ограничено на любом конечном интервале оси t. Поэтому либо бихарактеристика определена для всех t, либо ее проекция $x(t)$ выходит за пределы любого компакта $K \subset M$. Условие нехарактеристичности S означает, что $V(x)$ трансверсально к S во всех точках S.

Рассмотрим отображение g, переводящее (x', t) в $x(t)$, где $x(t)$ — решение системы (17.23) с начальным условием $x(0) = x'$. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого x' решение $x(t)$ определено при $|t| < \varepsilon$, то g задает отображение

$$g \colon S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M. \tag{17.25}$$

Если g является диффеоморфизмом, то решение задачи Коши с начальными данными на S определено на образе g. Поэтому важно уметь оценивать снизу число $\varepsilon > 0$, для которого отображение (17.25) является диффеоморфизмом. Один важный случай, когда такая оценка возможна, мы укажем ниже.

17.6. Неоднородные линейные уравнения. Это уравнения вида

$$V(x) \cdot \varphi_x(x) + b(x)\, \varphi(x) = f(x), \tag{17.26}$$

где $b(x)$, $f(x) \in C^\infty(M)$, $V(x)$ — векторное поле на M, $\varphi(x)$ — неизвестная функция, φ_x — ее градиент. Если $x(t)$ — решение системы (17.23), то ясно, что $\frac{d}{dt}\varphi(x(t))+b(x(t))\varphi(x(t))=f(x(t))$, откуда $\varphi(x(t))$ находится решением обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, если известно $\varphi(x(0))$. Основное обстоятельство, вытекающее отсюда, состоит в том, что область, в которой существует решение задачи Коши, зависит лишь от $V(x)$ и S, но не зависит от правой части $f(x)$ и начального данного $\psi\in C^\infty(S)$.

В частности, в дальнейшем нам понадобится уравнение специального вида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}-\sum_{j=1}^{n-1}a_j(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+b(x)\,\varphi=f(x), \tag{17.27}$$

где $x=(x',\,x_n)$, $x'\in M'$, M' — некоторое $(n-1)$-мерное замкнутое многообразие, $x_n\in(-a,\,a)$, где $a>0$. Система (17.23) (для соответствующего однородного уравнения) имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x}'=V'(x),\\ \dot{x}_n=1.\end{cases} \tag{17.28}$$

Решения $x(t)$ этой системы, начинающиеся при $x_n=0$, определены при $t\in(-a,\,a)$, и если мы положим $S=M'=\{x\colon x_n=0\}$, то отображение g из предыдущего пункта осуществляет диффеоморфизм $g\colon M\to M$, где $M=M'\times(-a,\,a)$, причем из (17.28) ясно, что «слой» $M'\times\{x_0\}$ диффеоморфно отображается на себя. По этой причине задача Коши для уравнения (17.27) с начальным условием

$$\varphi|_{x_n=0}=\psi(x'),\qquad x'\in M, \tag{17.29}$$

имеет решение $\varphi\in C^\infty(M)$.

В ряде случаев аналогичное расуждение можно провести и для некомпактного M'.

Задача 17.1. Пусть функция $a(x,\,\xi)$ определена при $x\in M$, $\xi\neq0$, имеет по ξ порядок однородности 1. Доказать, что если $(x(t),\,\xi(t))$ — бихарактеристика, то либо она определена при всех t, либо $x(t)$ выходит за пределы любого компакта $K\subset M$. В частности, если M компактно, то все бихарактеристики определены при всех $t\in\mathbb{R}$.

Задача 17.2. Доказать, что то же самое верно, если порядок однородности m функции $a(x,\,\xi)$ произволен, но зато выполнено условие эллиптичности

$$a(x,\,\xi)\neq0\quad\text{при}\quad\xi\neq0,\ x\in M.$$

§ 18. Действие псевдодифференциального оператора на экспоненту

18.1. Формулировка результата. Речь идет об описании асимптотического поведения при $\lambda \to +\infty$ выражения вида $A(e^{i\lambda\psi(x)})$, где A — ПДО, а ψ — гладкая функция, не имеющая критических точек.

Теорема 18.1. *Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, оператор A собственный и $a(x,\xi)$ — его символ. Пусть $\psi(x) \in C^\infty(X)$ и $\psi'_x(x) \neq 0$ при $x \in X$ (здесь ψ'_x означает градиент функции ψ). Тогда для любой функции $f \in C^\infty(X)$ и для любого целого $N \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant 1$ справедлива формула*

$$A(fe^{i\lambda\psi}) = e^{i\lambda\psi}\left[\sum_{|\alpha|<N} a^{(\alpha)}(x,\lambda\psi'_x(x))\,\frac{D_z^\alpha(f(z)\,e^{i\lambda\rho_x(z)})}{\alpha!}\Big|_{z=x} + \lambda^{m-(\rho-1/2)N}R_N(x,\lambda)\right], \quad (18.1)$$

где $\rho_x(y) = \psi(y) - \psi(x) - (y-x)\cdot\psi'_x(x)$, $a^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$, а для $R_N(x,\lambda)$ выполнены оценки

$$|\partial_x^\gamma R_N(x,\lambda)| \leqslant C_{\gamma,N,K}\lambda^{\delta|\gamma|}, \quad x \in K, \quad (18.2)$$

где K — компакт в X, а постоянные $C_{\gamma,N,K}$ не зависят от λ.

Если есть семейства функций $f(x)$, $\psi(x)$, ограниченные в $C^\infty(X)$ (т. е. производные $\partial^\gamma f(x)$, $\partial^\gamma\psi(x)$ равномерно ограничены на каждом компакте при любом фиксированном γ), и если градиенты ψ'_x равномерно отделены (по модулю) от нуля на каждом компакте, то постоянные $C_{\gamma,N,K}$ в оценках (18.2) не зависят от выбора функций f, ψ этих семейств.

Замечание 18.1. Эта теорема похожа по формулировке на теорему 4.2 о преобразовании символа ПДО при диффеоморфизме и, как видно из дальнейшего, эквивалентна ей. Однако ввиду важности теоремы 18.1 мы приведем два ее доказательства: вывод из теоремы 4.2 и независимое доказательство, основанное, по существу, на методе стационарной фазы. Последнеее позволяет вывести из теоремы 18.1 инвариантность класса ПДО при диффеоморфизмах и формулы замены переменных. Мы рекомендуем читателю реализовать этот путь в качестве упражнения (исторически это был первый путь доказательства инвариантности класса ПДО при диффеоморфизмах).

Замечание 18.2. Полезно сразу же заметить, почему формула (18.1) является асимптотической при $\lambda \to +\infty$.

Ясно, что условие $\psi'_x(x)\neq 0$ обеспечивает оценку

$$|a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\psi'_x(x))|\leqslant C_{\alpha,K}\lambda^{m-\rho|\alpha|},\quad x\in K. \tag{18.3}$$

Проверим теперь, что $D_z^\alpha(f(z)e^{i\lambda\rho_x(z)})|_{z=x}$ является многочленом по λ степени не более $|\alpha|/2$. В самом деле, имеем, очевидно,

$$D_z^\alpha(f(z)\,e^{i\lambda\rho_x(z)})=\sum_{\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\alpha}c_{\gamma_0\ldots\gamma_k}(D_z^{\gamma_0}f(z))\cdot\lambda^k(D_z^{\gamma_1}\rho_x(z))\ldots$$
$$\ldots(D_z^{\gamma_k}\rho_x(z))\,e^{i\lambda\rho_x(z)}, \tag{18.4}$$

причем в этой сумме $|\gamma_j|\geqslant 1$ при $j=1,\,\ldots,\,k$. Поскольку $\rho_x(z)$ имеет при $x=z$ нуль 2-го порядка, то при $x=z$ в (18.4) остаются лишь слагаемые, в которых $|\gamma_j|\geqslant 2$, $j=1,\,\ldots,\,k$. Но $\sum\limits_{j=1}^{k}|\gamma_j|\leqslant|\alpha|$, так что отсюда получаем $2k\leqslant|\alpha|$, что и требовалось.

Теперь, учитывая (18.3), мы видим, что

$$\left|a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\psi'_x(x))\,\frac{D_z^\alpha(f(z)e^{i\lambda\rho_x(z)})}{\alpha!}\bigg|_{z=x}\right|\leqslant C_{\alpha,K}\lambda^{m-(\rho-1/2)|\alpha|},\quad x\in K,$$

что и дает требуемое убывание порядков роста конечных членов формулы (18.4), поскольку $\rho>1/2$.

18.2. Первое доказательство теоремы 18.1. Сделаем замену переменных $y=\varkappa(x)=(x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,\psi(x))$. Эта замена имеет якобиан, равный ψ'_{x_n}. Поэтому мы можем ее сделать лишь там, где $\psi'_{x_n}\neq 0$. Однако общий случай легко сводится к этому разбиением единицы и перестановкой осей координат. В самом деле, оператор A — собственный и, следовательно, для любого компакта K_1 существует такой компакт K_2, что $Au|_{K_1}$ зависит только от $u|_{K_2}$. Поэтому $A(fe^{i\lambda\psi})|_{K_1}$ можно записать в виде конечной суммы слагаемых вида $A(f_je^{i\lambda\psi})$, где $f_j\in C_0^\infty(X)$ и для любого j существует такое целое k, $1\leqslant k\leqslant n$, что $\psi'_{x_k}(x)\neq 0$ при $x\in\operatorname{supp}\,f_j$.

Итак, пусть $\psi'_{x_n}(x)\neq 0$, $x\in X$. Пусть оператор A_1 — это оператор A, записанный в координатах $y=\varkappa(x)$ (см. § 4). Пусть $a_1(y,\,\eta)$ — символ оператора A_1. По теореме 4.2 мы имеем

$$a_1(y,\,\eta)|_{y=\varkappa(x)}=e^{-i\varkappa(x)\cdot\eta}A(e^{i\varkappa(x)\cdot\eta})=$$
$$=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\,a^{(\alpha)}(x,\,{}^t\varkappa'(x)\,\eta)\,(D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta})|_{z=x}+r_N(x,\,\eta),$$

где $\varkappa''_{x_n}(z)=\varkappa(z)-\varkappa(x)-\varkappa'(x)(z-x)$, $r_N\in S^{m-(\rho-1/2)N}_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$. В частности, полагая здесь $\eta=(0,\,\ldots,\,0,\,\lambda)$, мы в точности получаем формулу (18.1) при $f\equiv 1$, где R_N оценивается в соответствии с (18.2). Утверждения о равномерности и случай произвольной функции f получаются повторением доказательства теоремы 4.2, что мы предоставляем читателю в качестве упражнения. ■

18.3. Второе доказательство теоремы 18.1. В этом доказательстве мы будем считать для простоты, что $\delta=0$ и $\rho=1$.

Заметим опять-таки, что поскольку оператор A является собственным, то мы можем считать, что $f\in C_0^\infty(X)$. Положим для краткости $I(\lambda)=e^{-i\lambda\psi(x)}A(fe^{i\lambda\psi})(x)$ (точку x мы считаем фиксированной). Имеем

$$I(\lambda)=\int a(x,\,\xi)\,f(y)\,e^{i\lambda(\psi(y)-\psi(x))+i(x-y)\cdot\xi}\,dy\,đ\xi. \tag{18.5}$$

Сделаем здесь замену переменной $\xi=\lambda\zeta$:

$$I(\lambda)=\lambda^n\int a(x,\,\lambda\zeta)\,f(y)\,e^{i\lambda[\psi(y)-\psi(x)-(y-x)\cdot\zeta]}\,dy\,đ\zeta. \tag{18.6}$$

Мы хотим найти асимптотику этого интеграла при $\lambda\to+\infty$. Далее мы увидим (в этом суть метода стационарной фазы), что главную роль здесь играют окрестности критических точек функции

$$g(y,\,\zeta)=\psi(y)-\psi(x)-(y-x)\cdot\zeta. \tag{18.7}$$

Но поскольку $g'_\zeta=x-y$, $g'_y=\psi'_y(y)-\zeta$, то имеется ровно одна критическая точка этой функции — точка $y=x$, $\zeta=\psi'_x(x)$. Положим для краткости $\xi_x=\psi'_x(x)$. Введем срезающую функцию $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(z)=1$ при $|z|<\varepsilon/2$, $\chi(z)=0$ при $|z|>\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, и рассмотрим интеграл

$$\tilde I(\lambda)=\lambda^n\int a(x,\,\lambda\zeta)\,\chi(y-x)\,\chi(\zeta-\xi_x)\,f(y)\,e^{i\lambda g(y,\,\zeta)}\,dy\,đ\zeta. \tag{18.8}$$

Тогда для любого $N>0$

$$|I(\lambda)-\tilde I(\lambda)|\leqslant C_N\lambda^{-N}. \tag{18.9}$$

В самом деле, полагая

$${}^tL=\lambda^{-1}[(\psi'(y)-\zeta)^2+(x-y)^2]^{-1}[(\psi'(y)-\zeta)\cdot D_y+(x-y)\cdot D_\zeta],$$

мы видим, что ${}^tLe^{i\lambda g(y,\,\zeta)}=e^{i\lambda g(y,\,\zeta)}$. Выполняя в осциллирующем интеграле $I(\lambda)-\tilde I(\lambda)$ интегрирование по частям с учетом того, что

$$|(\psi'(y)-\zeta)^2+(x-y)^2|\geqslant\varepsilon_1>0 \quad\text{на}\ \operatorname{supp}[1-\chi(y-x)\,\chi(\zeta-\xi_x)],$$

мы видим, что

$$I(\lambda)-\tilde{I}(\lambda)=\lambda^n \int e^{i\lambda g(y,\,\zeta)} L^N [a(x,\,\lambda\zeta)\,(1-\chi(y-x)\,\chi(\zeta-\xi_x))\,f(y)]\,dy\,đ\zeta,$$

и, преобразуя этот осциллирующий интеграл в абсолютно сходящийся (см. § 1), мы легко получаем отсюда оценку (18.9) за счет множителя λ^{-1}, присутствующего в выражении для L. Аналогично получаются оценки и для производных по x от разности $I(\lambda)-\tilde{I}(\lambda)$. Отметим, впрочем, что они вытекают из оценок $I(\lambda)-\tilde{I}(\lambda)$, если воспользоваться рассуждением, аналогичным доказательству предложения 3.6. В дальнейшем мы опускаем оценки производных, предоставляя читателю воспроизвести любой из указанных путей их получения.

Итак, вместо $I(\lambda)$ можно рассматривать $\tilde{I}(\lambda)$. Делая еще одну замену переменной $\zeta=\xi_x+\lambda^{-1}\eta$, мы получим

$$\tilde{I}(\lambda)=\int e^{i(x-y)\cdot\eta} a(x,\,\lambda\xi_x+\eta)\,\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)\chi(y-x)\,f(y)\,e^{i\lambda\rho_x(y)}\,dy\,đ\eta. \quad (18.10)$$

Разложим $a(x,\,\lambda\xi_x+\eta)$ по формуле Тейлора при $\eta=0$:

$$a(x,\,\lambda\xi_x+\eta)=\sum_{|\alpha|<N} a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x)\,\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}+r_N(x,\,\eta,\,\lambda),$$

где

$$r_N(x,\,\eta,\,\lambda)=\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha \int_0^1 (1-t)^{N-1}\eta^\alpha a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x+t\eta)\,dt.$$

Умножая это разложение на срезающую функцию $\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)\chi(y-x)$ и подставляя результат в (18.10), мы получаем

$$\tilde{I}(\lambda)=\sum_{|\alpha|<N}\int e^{i(x-y)\cdot\eta} a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x)\times \\ \times\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)\chi(y-x)\,f(y)\,e^{i\lambda\rho_x(y)}\,dy\,đ\eta+R'_N(x,\,\lambda). \quad (18.11)$$

где

$$R'_N(x,\,\lambda)=\sum_{|\alpha|<N} c_\alpha \int dy\,đ\eta \int_0^1 (1-t)^{N-1}\eta^\alpha a^{(\alpha)}(x,\,\lambda\xi_x+t\eta)\times \\ \times\chi(y-x)\,\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)e^{i(x-y)\cdot\eta} f(y)\,e^{i\lambda\rho_x(y)}\,dt. \quad (18.12)$$

Как следует из приведенных выше рассуждений, асимптотика конечных членов формулы (18.11) не изменится, если отпустить срезающие множители $\chi\left(\dfrac{\eta}{\lambda}\right)$. Но тогда эти члены просто преобразуются по формуле обращения преобразования Фурье:

$$\int e^{i(x-y)\cdot\eta} a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x)\, \frac{\eta^\alpha}{\lambda!}\, \chi(y-x)\, f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)}\, dy\, đ\eta = \\ = a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x)\, D_y^\alpha(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)})|_{y=x},$$

так что остается лишь оценить остаток R'_N или равномерно по $t (0<t\leqslant 1)$ оценить интеграл

$$r_\alpha(x,\, \lambda,\, t) = \int \eta^\alpha a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x + t\eta)\, \chi(y-x)\, \chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right) \times \\ \times e^{i(x-y)\cdot\eta} D_y^\alpha\big(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)}\big)\, dy\, đ\eta = \\ = \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} c_{\alpha'\alpha''} \int e^{i(x-y)\cdot n} a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x + t\eta) \times \\ \times \chi^{(\alpha')}(y-x)\, \chi\left(\frac{n}{\lambda}\right) D^{\alpha''}(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)})\, dy\, đ\eta, \quad (18.13)$$

где $|\alpha| = N$.

Введем еще обозначение

$$\tilde a_\alpha(x,\, \eta,\, \lambda,\, t) = \chi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right) a^{(\alpha)}(x,\, \lambda\xi_x + t\eta).$$

Если число ε в определении $\chi(z)$ выбрано так, что $\varepsilon < |\xi_x|/2$, то для $\tilde a_\alpha$ выполнены оценки

$$|\partial_\eta^\gamma\, \partial_x^\beta\, \tilde a_\alpha(x,\, \eta,\, \lambda,\, t)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma} \lambda^{m-N-|\gamma|}. \quad (18.14)$$

Теперь воспользуемся формулой (18.4) и подставим в (18.13) даваемое ею выражение для $D_y^\alpha(f(y)\, e^{i\lambda\rho_x(y)})$. В этом выражении все члены содержат произведение

$$\lambda^k (D_y^{\gamma_1}\rho_x(y)) \ldots (D_y^{\gamma_k}\rho_x(y)), \quad (18.15)$$

в котором $|\gamma_1| + \ldots + |\gamma_k| \leqslant N$. Если $k \leqslant N/2$, то не будем никак преобразовывать это произведение. Если $k > N/2$, то по принципу Дирихле в (18.15) есть не менее чем $k - N/2$ таких индексов γ_j, что $|\gamma_j| = 1$. Но тогда по лемме Адамара

$$(D_y^{\gamma_1}\rho_x(y)) \ldots (D_y^{\gamma_k}\rho_x(y)) = \sum_{|\gamma| \geqslant k - N/2} g_\gamma(y,\, x)\, (x-y)^\gamma,$$

где $g_\gamma(y, x)$ — гладкая (по x и y) функция, определенная, когда y достаточно близко к x. Подставляя это выражение в (18.13) и интегрируя по частям (с использованием экспоненты $e^{i(x-y)\cdot\eta}$, позволяющей заменить $(x-y)^\gamma$ на $(-D_\eta)^\gamma$), мы получаем, что $r_\alpha(x, \lambda, t)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$I_1(\lambda) = \lambda^k \int \tilde{a}_\alpha^{(\gamma)}(x, \eta, \lambda, t)\, e^{i(x-y)\cdot\eta} e^{i\lambda\rho_x(y)} \tilde{f}(y, x)\, dy\, d\eta, \qquad (18.16)$$

где $\tilde{a}_\alpha^{(\gamma)} = \partial_\eta^\gamma \tilde{a}_\alpha$, $\tilde{f}(y, x)$ — гладкая (по x и y) функция, сосредоточенная при $|y-x| \leqslant \varepsilon$, а индексы k и γ связаны соотношением $|\gamma| \geqslant k - N/2$. Учитывая, что объем области интегрирования по η в (18.16) не превосходит $C\lambda^n$, и используя (18.14), мы получаем для $I_1(\lambda)$ оценку

$$|I_1(\lambda)| \leqslant C\lambda^{k+m-(N+|\gamma|)+n} \leqslant C\lambda^{m+n-N/2},$$

которая позволяет завершить доказательство применением рассуждения типа доказательства предложения 3.6. ■

18.4. Произведение псевдодифференциального оператора и интегрального оператора Фурье. Пусть X, Y — область в $\mathbb{R}^{n_X}$ и $\mathbb{R}^{n_Y}$, и пусть P — ИОФ вида

$$Pu(x) = \int p(x, y, \theta)\, e^{i\varphi(x, y, \theta)} u(y)\, dy\, d\theta, \qquad (18.17)$$

где $p(x, y, \theta) \in S^{m'}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$, $\varphi(x, y, \theta)$ — операторная фазовая функция (см. § 2, определение 2.3). Пусть еще на X дан собственный ПДО $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$ с символом $a(x, \xi)$. Поскольку P отображает $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$, а оператор A переводит пространства $C^\infty(X)$ и $\mathscr{D}'(X)$ в себя, то композиция $A \circ P$ определена как оператор, переводящий $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$.

Теорема 18.2. *Пусть $1-\rho \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$. Тогда композиция $Q = A \circ P$ также имеет вид* (18.17) *с той же фазовой функцией $\varphi(x, y, \theta)$, что и у оператора P, и с амплитудой $q(x, y, \theta)$ вида*

$$q(x, y, \theta) = e^{-i\varphi(x, y, \theta)} a(x, D_x)\, [\, p(x, y, \theta)\, e^{i\varphi(x, y, \theta)}], \qquad (18.18)$$

которая при $|\theta| \to +\infty$ разлагается в следующий асимптотический ряд:

$$q(x, y, \theta) \sim \sum_\alpha a^{(\alpha)}(x, \varphi_x(x, y, \theta))\, \frac{D_z^\alpha(p(z, y, \theta)\, e^{i\rho(z, x, y, \theta)})}{\alpha!}\Big|_{z=x}, \quad (18.19)$$

где $\rho(z, x, y, \theta) = \varphi(z, y, \theta) - \varphi(x, y, \theta) - (z-x)\cdot\varphi_x(x, y, \theta)$.

З а м е ч а н и е 18.3. Поскольку $\varphi(x,\, y,\, \theta)$ не является гладкой функцией при $\theta = 0$, то из (18.18) не видно сразу, что Q — это ИОФ. Однако это все-таки верно, поскольку, добавляя к P оператор с гладким ядром, мы можем считать, что $p(x,\, y,\, \theta) = 0$ при $|\theta| < 1$. Тогда выражение (18.18) определяет гладкую функцию по всем переменным и таковы же все члены в разложении (18.19), которое имеет обычный смысл (см. определение 3.4). Однако оператор с гладким ядром всегда можно записать в виде (18.17) с финитной по θ амплитудой $p(x,\, y,\, \theta)$, равной 0 при $|\theta| < 1$ (см. указание к упражнению 2.4). Таким образом, Q является ИОФ с фазовой функцией φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 18.2. Введем использовавшееся в § 1 и § 2 множество

$$C_\varphi = \{(x,\, y,\, \theta) \colon \varphi'_\theta(x,\, y,\, \theta) = 0\}.$$

Заметим, что $\varphi'_x(x,\, y,\, \theta) \neq 0$ при $(x,\, y,\, \theta) \in C_\varphi$ по определению операторной фазовой функции. Меняя P на оператор с гладким ядром, мы можем считать, что $\operatorname{supp} p(x,\, y,\, \theta)$ лежат в сколь угодно малой конической окрестности множества C_φ (см. предложение 2.1) и, в частности, что $\varphi'_x \neq 0$ на $\operatorname{supp} p$. Кроме того, в соответствии с замечанием 18.3 мы будем предполагать, что $p(x,\, y,\, \theta) = 0$ при $|\theta| < 1$.

Заметим теперь, что поскольку A непрерывно отображает $C^\infty(X)$ в $C^\infty(X)$, то мы можем применить его под знаком интеграла в (18.17) (для этого надо вначале преобразовать этот интеграл в абсолютно сходящийся, как в § 1; заметим, что переменная x в этом преобразовании не учавствует, являясь просто параметром). Теперь нужно лишь проверить формулу (18.19), понимаемую в смысле определения 3.4 (см. также замечание 18.3). Но она есть банальное следствие теоремы 18.1, если положить $\lambda = |\theta|$ и считать параметрами y и θ. В самом деле, имеем

$$q(x,\, y,\, \theta) = \lambda^{m'} e^{-i\lambda\varphi(x,\, y,\, \theta')} a(x,\, D_x)\, [\lambda^{-m'} p(x,\, y,\, \theta)\, e^{i\lambda\varphi(x,\, y,\, \theta')}],$$

где $\theta' = \theta/|\theta|$. Замечая теперь, что при изменении параметров $y,\, \theta$ функции $\varphi(x,\, y,\, \theta')$, $\lambda^{-m'} p(x,\, y,\, \theta)$ лежат в ограниченном подмножестве $C^\infty(X)$, мы видим, что применима теорема 18.1. ■

У п р а ж н е н и е 18.1. Получить из теоремы 18.2 фомулу композиции двух собственных ПДО класса $L^m(X)$ (см. теорему 3.4).

У п р а ж н е н и е 18.2. Пусть A и P такие же, как в теореме 18.2. Доказать утверждение, аналогичное теореме 18.2, для оператора $Q_1 = P \circ A$.

У к а з а н и е. Воспользоваться операцией транспонирования.

З а д а ч а 18.1. Получить из теоремы 18.1 формулы замены переменной в ПДО (см. теорему 4.2).

§ 19. Фазовые функции, определяющие класс псевдодифференциальных операторов

19.1. В формулировке теоремы 4.1 содержится пример некоторого класса фазовых функций, для которых соответствующий класс ИОФ совпадает с классом ПДО. Для дальнейшего нам необходим следующий вариант этой теоремы для нелинейных фазовых функций.

Теорема 19.1. *Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x, y, \xi)$ — такая фазовая функция на $X \times X \times \mathbb{R}^n$, что*

1) $\varphi'_\xi(x, y, \xi) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\varphi_x(x, x, \xi) = \xi$.

Тогда, если $1-\rho \leqslant \delta < \rho$, то класс ИОФ *с фазовой функцией φ и с амплитудами $p(x, y, \xi) \in S^m_{\rho,\,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ совпадает с классом $L^m_{\rho,\,\delta}(X)$. Класс* ИОФ, *у которых фазовая функция равна φ, а амплитуда $a(x, y, \xi)$ является классическим символом, совпадает с классом классических* ПДО.

Замечание 19.1. Условия 1) и 2) при близких x и y можно записать в виде одного условия:

$$\varphi(x, y, \xi) = (x-y)\cdot\xi + O(|x-y|^2|\xi|). \tag{19.1}$$

19.2. Доказательство теоремы 19.1. 1. Поскольку ядра ИОФ с фазовыми функциями, удовлетворяющими условию 1) теоремы 19.1, являются гладкими при $x \neq y$ в силу предложения 2.1, то мы можем считать все амплитуды $a(x, y, \xi)$ сосредоточенными в сколь угодно малой окрестности диагонали $x = y$.

2. Пусть φ, φ_1 — две фазовые функции, удовлетворяющие условиям теоремы 19.1. Обозначая через $L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi)$ класс ИОФ с фазовой функцией φ и с амплитудами из $S^m_{\rho,\,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, мы видим, что достаточно проверить включение

$$L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi) \subset L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi_1), \tag{19.2}$$

ибо из него, конечно, вытекает совпадение всех классов $L^m_{\rho,\,\delta}(X, \varphi)$ и, в частности, их совпадение с $L^m_{\rho,\,\delta}(X)$.

3. Обозначим через $\mathscr{K}_k$ класс функций $\psi(x, y, \xi)$, положительно однородных по ξ порядка k, гладких при $\xi \neq 0$ и определенных при близких x и y. Заметим, что $\mathscr{K}_0$ является алгеброй, содержащей гладкие функции от x и y в качестве подалгебры, а $\mathscr{K}_1$ является $\mathscr{K}_0$-модулем.

Для нас существенно, что разность $\varphi_1 - \varphi$ можно при близких x и y записать в виде

$$\varphi_1 - \varphi = \sum_{j,\,k=1}^{n} b_{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}, \quad b_{jk} \in \mathscr{K}_1. \tag{19.3}$$

Проверим это. Из формулы Тейлора находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j} = (x_j - y_j) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x_k - y_k),$$

где $a_{jk} \in \mathscr{K}_0$, $a_{jk}(x, x, \xi) = 0$. Это можно также записать в виде

$$\varphi'_\xi = (I + A)\,(x - y),$$

где I — единичная матрица, A — матрица с элементами из $\mathscr{K}_0$, равная 0 при $x = y$. Но тогда при близких x и y существует матрица $(I + A)^{-1}$ с элементами из $\mathscr{K}_0$. Это означает, что мы можем написать

$$x_j - y_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}, \qquad \tilde{a}_{jk} \in \mathscr{K}_0. \tag{19.4}$$

Теперь, учитывая условие (19.1) для φ и φ_1, мы видим, что $\varphi_1 - \varphi$ на диагонали (при $x = y$) имеет нуль 2-го порядка и по формуле Тейлора

$$\varphi_1 - \varphi = \sum_{j,\,k=1}^{n} \tilde{b}_{jk}(x_j - y_j)\,(x_k - y_k), \qquad \tilde{b}_{jk} \in \mathscr{K}_1.$$

Подставляя сюда выражение $x_j - y_j$ из (19.4), мы получаем (19.3).

4. Рассмотрим теперь гомотопию

$$\varphi_t = \varphi + t(\varphi_1 - \varphi), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{19.5}$$

Каждая из функций φ_t удовлетворяет условию (19.1). Банальное повторение только что проведенного рассуждения показывает, что вместо (19.3) можно написать

$$\varphi_1 - \varphi = \sum_{j,\,k=1}^{n} b^t_{jk}\,\frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_j}\,\frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_k}, \tag{19.6}$$

где $b^t_{jk} \in \mathscr{K}_1$ и b^t_{jk} гладко зависит от t.

Пусть теперь P_t — ИОФ, заданный формулой

$$P_t\,u(x) = \int e^{i\varphi_t(x,y,\xi)} p(x,\, y,\, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi.$$

Тогда

$$\frac{d^r}{dt^r}(P_t\,u) = \iint p(x,\,y,\,\xi)\, i^r\, (\varphi_1 - \varphi)^r e^{i\varphi_t}\, u(y)\, dy\, d\xi =$$
$$= \sum_{j_1,\dots,j_{2r}} \iint d_{j_1,\dots,j_{2r}} \frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_{j_1}} \cdots \frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi_{j_{2r}}}\, e^{i\varphi_t} pu\, dy\, d\xi, \tag{19.7}$$

где $d_{j_1,\ldots,j_{2r}} \in \mathscr{K}_r$. Без ограничения общности можно считать, что $p(x, y, \xi) = 0$ при $|\xi| < 1$, так что $d_{j_1,\ldots,j_{2r}} p \in S^{m+r}_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$. Теперь интегрируем в (19.7) по частям, пользуясь формулой

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi_j} e^{i\varphi_t} = i^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{i\varphi_t}.$$

Это интегрирование показывает, что

$$\frac{d^r}{dt^r} P_t \in L^{m+r(1-2\rho)}_{\rho,\delta}(X, \varphi_t), \tag{19.8}$$

причем все оценки равномерны по t. Но если теперь положить

$$Q_j = \left.\frac{(-1)^j}{j!} \frac{d^j P_t}{dt^j}\right|_{t=1} \in L^{m+j(1-2\rho)}_{\rho,\delta}(X, \varphi_1),$$

то по формуле Тейлора

$$P_0 = \sum_{j=0}^{k-1} Q_j + (-1)^k \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k P_t}{dt^k} dt. \tag{19.9}$$

Остаток в (19.9) имеет ядро, гладкость которого увеличивается при $k \to +\infty$. Поэтому ясно, что если $Q \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$ (асимптотически суммируем амплитуды), то $Q \in L^m_{\rho,\delta}(X, \varphi_1)$, и $P_0 - Q \in L^{-\infty}(X)$, что и доказывает включение (19.2).

Тот факт, что классические амплитуды при этом переходят в классические, очевиден из построения. ■

З а д а ч а 19.1. Пусть φ_1, φ_2 — две фазовые функции, причем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_k},$$

где $b_{jk} \in C^\infty(X \times X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ и b_{jk} однородно по ξ порядка 1. Показать, что $L^m_{\rho,\delta}(X, \varphi_2) \subset L^m_{\rho,\delta}(X, \varphi_1)$.

§ 20. Оператор $\exp(-itA)$

20.1. Определение и формулировка. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, на котором задана гладкая плотность, A — самосопряженный классический ПДО порядка 1 на M с главным символом $a_1(x, \xi)$, удовлетворяющим условию

$$a_1(x, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0 \tag{20.1}$$

(в частности, оператор A эллиптичен). Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1,\,2,\,\ldots}$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора A, λ_k — соответствующие собственные значения. Если $u(x)\in C^\infty(M)$, то обозначим через u_k коэффициенты Фурье функции $u(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$:

$$u_k=(u,\,\varphi_k). \tag{20.2}$$

П р е д л о ж е н и е 20.1. *Если $u(x)\in C^\infty(M)$, то*

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k(x), \tag{20.3}$$

где ряд сходится в топологии C^∞(M).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем, очевидно,

$$u_k\lambda_k^N=(u,\,A^N\varphi_k)=(A^Nu,\,\varphi_k),$$

и поскольку $A^Nu\in C^\infty(M)$, то к ряду (20.3) можно почленно применять A^N при любом $N\in\mathbb{Z}_+$, получая все время ряды, сходящиеся в $L^2(M)$. Но отсюда сразу следует, что при любом $s\in\mathbb{R}$ ряд (20.3) сходится по норме $H^s(M)$, поскольку при $s=N\in\mathbb{Z}_+$ эта норма эквивалентна $\|u\|+\|A^Nu\|$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(M)$. Отсюда и из теоремы вложения 7.6 следует искомое утверждение. ■

Это предложение позволяет дать

О п р е д е л е н и е 20.1. Оператор $\exp(-itA)$ при $t\in\mathbb{R}$ определяется формулой

$$\exp(-itA)\,u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-it\lambda_k)\,u_k\varphi_k(x). \tag{20.4}$$

Легко видеть, что ряд (20.4) при $u\in C^\infty(M)$ сходится в топологии $C^\infty(M)$. Более того, если $u\in H^s(M)$, где s — целое число, то этот ряд сходится по норме пространства $H^s(M)$ (см. доказательство предложения 10.2). Оператор $\exp(-itA)$ представляет собой ограниченный оператор в $H^s(M)$ при целом s. Заметим, что он также является унитарным оператором в $L^2(M)$.

Другой способ определения состоит в том, чтобы рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+iAu=0, & (20.5)\\ u|_{t=0}=u_0, & (20.6)\end{cases}$$

где $u=u(t,\,x)\in C^\infty(\mathbb{R}\times M)$, $u_0\in C^\infty(M)$ и оператор A в (20.5) применяется по переменным x при каждом фиксированном t. Решая задачу «методом Фурье», мы видим, что решение задается формулой (20.4), где вместо u надо подставить u_0, т. е.

$$u(t,\,x)=\exp(-itA)\,u_0(x). \tag{20.7}$$

Но решение задачи (20.5)—(20.6) единственно. Это можно увидеть, например, написав для какого-то решения $u(t,\,x)$ разложение

$$u(t,\,x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\varphi_k(x),$$

подстановка которого в (20.5)—(20.6) приводит к уравнениям $c'_k(t)+ i\lambda_k c_k(t)=0$ с начальными условиями $c_k(0)=(u_0,\,\varphi_k)$, откуда однозначно находятся $c_k(t)$.

Теорема 20.1. *Если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то при $|t|<\varepsilon$ оператор $U(t)=\exp(-itA)$ можно представить в виде суммы оператора с гладким по $t,\,x,\,y$ ядром и* ИОФ, *который задается с помощью линейной по t фазовой функции*

$$\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)=\psi(x,\,y,\,\xi)-ta_1(y,\,\xi) \tag{20.8}$$

и амплитуды $p(t,\,x,\,y,\,\xi)$, являющейся гладким по t классическим символом 0-го порядка, так что выполнены оценки

$$|\partial_\xi^\alpha\,\partial_{x,\,y,\,t}^\beta p(t,\,x,\,y,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}. \tag{20.9}$$

Пример 20.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ оператор $A=\sqrt{-\Delta}$, имеющий символ $|\xi|$. Задача Коши (20.5)—(20.6) на убывающих при $|x|\to+\infty$ функциях решается с помощью преобразования Фурье по x. А именно, поскольку $Au(x)=F^{-1}_{\xi\to x}(|\xi|\tilde u(\xi))$, то

$$u(t,\,x)=\exp(-itA)\,u_0(x)=F^{-1}_{\xi\to x}(e^{-it|\xi|}\tilde u_0(\xi))=\iint e^{i(x-y)\,\xi-it|\xi|}u(y)\,dy\,đ\xi.$$

Мы видим, что в этом случае (формально не соответствующем, впрочем, изложенной схеме) оператор $\exp(-itA)$ — ИОФ с фазовой функцией $(x-t)\cdot\xi-t|\xi|$.

20.2. Доказательство теоремы 20.1. 1. Построим оператор $Q(t)$, аппроксимирующий $U(t)$ и являющийся ИОФ вида

$$Q(t)\,f(x)=\iint q(t,\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)}f(y)\,dy\,đ\xi. \tag{20.10}$$

Оператор $U(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases}(D_t+A)\,U(t)=0, & (20.11)\\ U(0)=I. & (20.12)\end{cases}$$

Мы попробуем подобрать $Q(t)$ так, чтобы были выполнены условия

$$\begin{cases} (D_t + A)\, Q(t) \in L^{-\infty}(M), & (20.13) \\ Q(0) - I \in L^{-\infty}(M). & (20.14) \end{cases}$$

Точнее, левая часть (20.13) будет также гладкой функцией от t со значениями в $L^{-\infty}(M)$.

Линейность задачи позволяет с помощью разбиения единицы свести дело к построению q и φ в локальной системе координат.

В силу теоремы 18.2 соотношение (20.13) будет выполнено, если

$$e^{-i\varphi}[D_t + A]\,(qe^{i\varphi}) \in S^{-\infty}, \tag{20.15}$$

где A применяется по переменной x.

Напишем асимптотические разложения символов $a(x, \xi)$ и $q(t,\, x,\, y,\, \xi)$ по однородным функциям:

$$a \sim a_1 + a_0 + a_{-1} + \ldots,$$
$$q \sim q_0 + q_{-1} + q_{-2} + \ldots$$

Тогда по теореме 18.2

$$e^{-i\varphi}[D_t + A]\,(qe^{i\varphi}) \sim (\varphi_t + a_1(x,\, \varphi_x))\, q_0 + r_0 + r_{-1} + \ldots,$$

где r_j — сумма членов порядков однородности j.

Потребуем, чтобы было

$$\varphi_t + a_1(x,\, \varphi_x) = 0. \tag{20.16}$$

Начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = \psi(x,\, y,\, \xi) \tag{20.17}$$

должны быть выбраны так, чтобы при $t = 0$ мы могли обеспечить выполнение условия (20.14). Но тогда от ψ нужно требовать, чтобы она была фазовой функцией, соответствующей классу ПДО (см. § 19), т. е. при близких x и y

$$\psi(x,\, y,\, \xi) = (x - y) \cdot \xi + O(|\,x - y\,|^2 |\,\xi\,|). \tag{20.18}$$

Саму функцию $\psi(x,\, y,\, \xi)$ мы будем искать в окрестности диагонали $x = y$. Добавок $O(|\,x - y\,|^2 |\,\xi\,|)$ в (20.18) необходим для того, чтобы можно было добиться линейности функции $\varphi(t,\, x,\, y,\, \xi)$ по t, а это, в свою очередь, полезно, поскольку в дальнейшем по t придется делать преобразование Фурье.

Итак, ищем φ в виде

$$\varphi(t,\, x,\, y,\, \xi) = \psi(x,\, y,\, \xi) - ta'(y,\, \xi).$$

Это еще одно требование на φ. Мы увидим, что ему можно удовлетворить. Подставим это выражение для φ в (20.16):

$$-a'(y,\,\xi)+a_1(x,\,\psi_x(x,\,y,\,\xi))=0.$$

Полагая здесь $x=y$, получаем в силу (20.18), что $a'(y,\,\xi)=a_1(y,\,\xi)$. Итак,

$$\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)=\psi(x,\,y,\,\xi)-ta_1(y,\,\xi), \tag{20.19}$$

где $\psi(x,\,y,\,\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$a_1(x,\,\psi_x(x,\,y,\,\xi))=a_1(y,\,\xi). \tag{20.20}$$

Вместо условия (20.18) мы потребуем выполнения условий

$$\psi(x,\,y,\,\xi)|_{(x-y)\cdot\xi=0}=0, \tag{20.21}$$

$$\psi_x(x,\,y,\,\xi)|_{x=y}=\xi, \tag{20.22}$$

из которых (20.18) сразу следует. Соотношения (20.20)—(20.22) определяют для ψ задачу Коши, в которой y и ξ являются параметрами. При этом можно считать, что $|\xi|=1$, так как, решив эту задачу при $|\xi|=1$, мы можем затем продолжить ψ по однородности (порядка 1) на все значения ξ.

Отметим, что плоскость $(x-y)\cdot\xi=0$ не является характеристической, так как $\partial_\xi a_1(x,\,\xi)\neq 0$ ввиду формулы Эйлера $\xi\cdot\partial_\xi a_1(x,\,\xi)=$ $=a_1(x,\,\xi)$. Из результатов § 17 ясно, что решение существует при x, близком к y, и, более того, соответствующая окрестность точки y, в которой существует решение, может быть выбрана равномерно по y, ξ, так что функция $\psi(x,\,y,\,\xi)$ определена в некоторой окрестности диагонали $x=y$.

2. Из теоремы 19.1 вытекает теперь, что существует такой классический символ $I(x,\,y,\,\xi)\in CS^0$, что $I(x,\,y,\,\xi)$ сосредоточен в сколь угодно малой окрестности диагонали $x=y$ и

$$\iint I(x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}f(y)\,dy\,đ\xi-f(x)=kf(x), \tag{20.23}$$

где k — оператор с гладким ядром.

Из (20.23) и (20.14) вытекает теперь, что мы должны задать следующие начальные условия для q:

$$q(0,\,x,\,y,\,\xi)=I(x,\,y,\,\xi)\pmod{S^{-\infty}}. \tag{20.24}$$

Если ввести разложение $I(x,\,y,\,\xi)$ по однородным компонентам

$$I\sim I_0+I_{-1}+\ldots,$$

то можно переписать (20.24) в виде

$$q_{-j}(0,\, x,\, y,\, \xi) = I_{-j}(x,\, y,\, \xi), \quad j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{20.25}$$

Теперь выпишем уравнения для функций q_{-j} даваемые соотношением (20.13) и условиями (20.25). Члены 1-го порядка обращаются в 0 в силу (20.16). Для членов 0-го порядка получим

$$\begin{cases} \partial_t q_0 + \sum\limits_{|\alpha|=1} a_1^{(\alpha)}(x,\, \varphi_x)\, \partial_x^\alpha q_0 + \sum\limits_{|\alpha|=2} a_1^{(\alpha)}(x,\, \varphi_x)\, \dfrac{\partial_x^\alpha \varphi}{\alpha!}\, q_0 + i a_0(x,\, \varphi_x)\, q_0 = 0, \\ q_0|_{t=0} = I_0, \end{cases} \tag{20.26}$$

где $a_1^{(\alpha)} = \partial_\xi^\alpha a$. Эта задача Коши позволяет определить $q_0(t,\, x,\, y,\, \xi)$ при малых t. Далее, при любом целом $j \geqslant 0$ мы получаем следующие уравнения, называемые *уравнениями переноса*:

$$\begin{cases} \partial_t q_{-j} + \sum\limits_{|\alpha|=1} a_1^{(\alpha)}(x,\, \varphi_x) \partial_x^\alpha q_{-j} + \sum\limits_{|\alpha|=2} a_1^{(\alpha)}(x,\, \varphi_x)\, \dfrac{\partial_x^\alpha \varphi}{\alpha!}\, q_{-j} + \\ \qquad\qquad + i a_0(x_1,\, \varphi_x) q_{-j} R_j = 0, \\ q_{-j}|_{t=0} = I_{-j}, \end{cases} \tag{20.27}$$

где R_j зависит только от $q_0,\, q_{-1},\, \ldots,\, q_{-(j-1)}$.

В силу рассуждений п. 17.6 решение задачи (20.27) может быть определено на том же интервале значений t, что и решение задачи (20.26).

Итак, в конечном счете мы получим определенный при $|t| < \varepsilon$ оператор $Q(t)$, который является ИОФ и для которого

$$(D_t + A)\, Q(t) = K(t), \tag{20.28}$$

$$Q(0) = I + k, \tag{20.29}$$

где $K(t)$ имеет гладкое ядро, гладко зависящее от t, k — оператор с гладким ядром.

3. Докажем теперь, что $[U(t) - Q(t)]$ — оператор с ядром, бесконечно дифференцируемым по $t,\, x,\, y$ (при $|t| < \varepsilon$). Для этого рассмотрим оператор

$$R(t) = U(-t)\, Q(t) - I \tag{20.30}$$

и продифференцируем его по t:

$$\begin{aligned} D_t R(t) &= -(D_t U)\, (-t)\, Q(t) + U(-t)\, (D_t Q)\, (t) = \\ &= A U(-t)\, Q(t) - U(-t)\, A Q(t) + U(-t)\, K(t). \end{aligned} \tag{20.31}$$

Законность этой выкладки следует из описанной структуры $Q(t)$ и из замечаний об $U(t)$, сделанных в начале этого параграфа (производную нужно, конечно, брать после применения оператора $R(t)$ к какой-нибудь функции $u(x) \in C^\infty(M)$). Поскольку $U(t)\,A = AU(t)$, то из (20.31) следует, что

$$D_t R(t) = U(-t)\,K(t). \tag{20.32}$$

С другой стороны, из (20.29) ясно, что

$$R(0) = k. \tag{20.33}$$

Поскольку $U(-t)\,K(t)$ — оператор с ядром, гладким по t, x, y, то, интегрируя (20.32) с учетом (20.33), мы видим, что тем же свойством обладает и $R(t)$, а тогда из (20.30) ясно, что оператор $U(t) - Q(t) = -U(t)\,R(t)$ также имеет гладкое по t, x, y ядро при $|t| < \varepsilon$. ■

Задача 20.1. Пусть A — классический ПДО 1-го порядка на M, удовлетворяющий условию (20.1), но не обязательно самосопряженный. Проведя для него построение параметрикса $Q(t)$, доказать, что задача Коши (20.5)—(20.6) имеет единственное решение, причем для определяемого этой задачей оператора $U(t) = \exp(-itA)$ также справедливо утверждение теоремы 20.1.

Указание. Составить для $U(t)$ интегральное уравнемие типа Вольтерра, пользуясь оператором $U_0(t) = \exp(-itA_0)$, где $A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*)$.

§ 21. Точная формулировка и доказательство теоремы Хёрмандера

21.1. Особенности преобразования Фурье спектральной функции вблизи нуля и оценки усреднения спектральной функции. Пусть $e(x, y, \lambda)$—спектральная функция такого же оператора A (1-го порядка), как в § 20, $U(t, x, y)$ — ядро оператора $\exp(-itA)$. Если $\varphi_j(x)$ — собственные функции A с собственными значениями λ_j, то мы имеем

$$e(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} \varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}, \tag{21.1}$$

$$U(t, x, y) = \sum_j e^{-i\lambda_j t} \varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}, \tag{21.2}$$

где последний ряд суммируется в смысле, например, обобщенных функций на $M \times M$, гладко зависящих от t (это легко доказать рассуждением, аналогичным тому, которое приведено после определения 20.1). Из формул (21.1) и (21.2) следует, что

$$U(t, x, y) = \int e^{-i\lambda t} d_\lambda e(x, y, \lambda), \tag{21.3}$$

где интеграл понимается как преобразование Фурье (от λ к t) в смысле обобщенных функций.

Пусть $\rho(\lambda)\in S(\mathbb{R}^1)$, $\hat\rho(t)=F_{\lambda\to t}\rho(\lambda)$ — преобразование Фурье $\rho(\lambda)$. Тогда из известных свойств преобразования Фурье вытекает, что

$$\hat\rho(t)\,U(t,\,x,\,y)=F_{\lambda\to t}\int\rho(\lambda-\mu)\,d_\mu e(x,\,y,\,\mu). \tag{21.4}$$

Выберем теперь $\rho(\lambda)$ так, что

1) $\rho(\lambda)>0$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}^1$;
2) $\hat\rho(0)=1$;
3) $\operatorname{supp}\hat\rho(t)\subset(-\varepsilon,\,\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало.

Упражнение 21.1. Доказать существование такой функции $\rho(\lambda)$.

Указание. Это делается аналогично построению функции $\chi(x)$ в начале доказательства теоремы 6.3.

Пусть теперь $Q(t,\,x,\,y)$ — обобщенное ядро оператора $Q(t)$, построенного (при малых $|t|$) в § 20. В силу теоремы 20.1 мы имеем

$$U(t,\,x,\,y)-Q(t,\,x,\,y)\in C^\infty((-\varepsilon,\,\varepsilon)\times M\times M). \tag{21.5}$$

Таким образом, функции $U(t,\,x,\,y)$ и $Q(t,\,x,\,y)$ имеют вблизи точки $t=0$ одинаковые особенности.

Из (21.4) вытекает теперь

Лемма 21.1. *Функция*

$$\int\rho(\lambda-\mu)\,d_\mu e(x,\,y,\,\mu)-F^{-1}_{t\to\lambda}(\hat\rho(t)\,Q(t,\,x,\,y)) \tag{21.6}$$

является гладкой функцией по всем переменным, убывающей быстрее любой степени λ при $\lambda\to+\infty$ равномерно относительно $x,\,y\in M$.

Вычислим теперь 2-й член в (21.6). Это можно легко сделать благодаря линейности по t фазовой функции $\varphi(t,\,x,\,y,\,\xi)$, входящей в определение оператора $Q(t)$.

Вначале произведем вычисление формально, не заботясь о сходимости получающихся интегралов. В обозначениях § 20 имеем

$$Q(t,\,x,\,y)=\int q(t,\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i(\psi(x,y,\xi)-a_1(y,\xi)t)}\,d\!\!{}^-\xi, \tag{21.7}$$

$$F^{-1}_{t\to\lambda}(\hat\rho(t)\,Q(t,\,x,\,y))\,(\lambda)=$$
$$=(2\pi)^{-1}\int\hat\rho(t)\,q(t,\,x,\,y,\,\xi)\,e^{it\lambda-ita_1(y,\xi)+i\psi(x,y,\xi)}\,dt\,d\!\!{}^-\xi. \tag{21.8}$$

Обозначим

$$R(\lambda,\,x,\,y,\,\xi)=(2\pi)^{-1}\int\hat\rho(t)\,q(t,\,x,\,y,\,\xi)\,e^{it\lambda}\,dt. \tag{21.9}$$

Тогда

$$F^{-1}_{t\to\lambda}(\hat\rho(t)\,Q(t,\,x,\,y))\,(\lambda)=\int R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}d\!\!{}^{-}\xi. \quad (21.10)$$

Заметим теперь, что $R(\lambda,\,x,\,y,\,\xi)$ — гладкая функция всех переменных и, более того, так как $q(t,\,x,\,y,\,\xi)$ — гладкая функция всех переменных (в том числе и t), то R — быстро убывающая функция от λ, для которой при любом $N>0$ выполнены оценки

$$|\partial_x^\alpha\,\partial_y^\beta\,\partial_\xi^\gamma\,\partial_\lambda^\delta\,R(\lambda,\,x,\,y,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta\gamma\delta N}\langle\xi\rangle^{-|\gamma|}\langle\lambda\rangle^{-N}. \quad (21.11)$$

При этом R допускает асимптотическое разложение по однородным функциям переменной ξ. Из оценок (21.11) ясно, что ввиду эллиптичности $a_1(y,\xi)$ функция $R(\lambda-a_1(y,\xi),\,x,\,y,\,\xi)$ быстро убывает при $|\,\xi\,|\to+\infty$, так что интеграл в (21.10) абсолютно сходится.

Для обоснования перехода от (21.8) к (21.10), который был сделан формально, остается заметить, что он законен для финитных по ξ символов $q(t,\,x,\,y,\,\xi)$, и сделать стандартный предельный переход, как в определении осциллирующего интеграла (см. § 1).

Принимая во внимание лемму 21.1, мы видим, что доказана

Л е м м а 21.2. *Если K определено формулой* (21.9), *то при любом* $N>0$

$$\left|\int\rho(\lambda-\mu)\,d_\mu e(x,\,y,\,\mu)-\int R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\,d\!\!{}^{-}\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_N(1+|\,\lambda\,|)^{-N}, \quad (21.12)$$

где C_N не зависит от x и y.

Теперь оценим 2-й член в (21.12).

Л е м м а 21.3. *Имеем*

$$\left|\int R(\lambda-a_1(y,\,\xi),\,x,\,y,\,\xi)e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}d\!\!{}^{-}\xi\right|\leqslant C(1+|\,\lambda\,|)^{n-1}, \quad (21.13)$$

где C не зависит от x и y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим, как в § 15:

$$V_y(\lambda)=\int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda}d\!\!{}^{-}\xi. \quad (21.14)$$

Так как функция a_1 однородна по ξ порядка 1, то

$$V_y(\lambda)=V_y(1)\,\lambda^n. \quad (21.15)$$

Теперь воспользуемся очевидным тождеством

$$\int R(\lambda-a_1(y,\xi),\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}d\xi=\int R(\lambda-\sigma,\,x,\,y,\,\xi)\,e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}dV_y(\sigma),$$

обе части которого определены благодаря оценкам (21.11). Принимая во внимание (21.15), мы видим теперь, что левая часть (21.13) оценивается через

$$C_N\int\limits_0^\infty(1+|\lambda-\sigma|)^{-N}dV_y(\sigma)=C_N'\int\limits_0^\infty(1+|\lambda-\sigma|)^{-N}\sigma^{n-1}d\sigma.$$

Но ввиду очевидного неравенства $1+|\sigma|\leqslant(1+|\lambda-\sigma|)(1+|\lambda|)$ мы имеем

$$(1+|\lambda-\sigma|)^{-N}\sigma^{n-1}\leqslant(1+|\lambda-\sigma|)^{-N+n-1}(1+|\lambda|)^{n-1}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty(1+|\lambda-\sigma|)^{-N}\sigma^{n-1}d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant(1+|\lambda|)^{n-1}\int\limits_{-\infty}^\infty(1+|\lambda-\sigma|)^{-N+n-1}d\sigma=C(1+|\lambda|)^{n-1},$$

откуда и следует (21.13). ■

Следствие 21.1. *Справедлива оценка*

$$\left|\int\rho(\lambda-\mu)\,d_\mu e(x,\,y,\,\mu)\right|\leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},\tag{21.16}$$

где C не зависит от x и y.

21.2. Переход к оценкам спектральной функции.

Лемма 21.4. *Имеет место оценка*

$$|e(x,\,x,\,\lambda+1)-e(x,\,x,\,\lambda)|\leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},\tag{21.17}$$

где C не зависит от x и λ.

Доказательство. Так как функция $\rho(\lambda)$ положительна и отделена от нуля на $[-2,\,2]$, то

$$\int\rho(\lambda-\mu)\,d_\mu e(x,\,x,\,\mu)\geqslant C\int\limits_{\lambda-1}^{\lambda+2}d_\mu e(x,\,x,\,\mu)\geqslant C[e(x,\,x,\,\lambda+1)-e(x,\,x,\,\lambda)],$$

где $C>0$, так что утверждение леммы вытекает теперь из следствия 21.1. ■

Лемма 21.5. *Справедлива оценка*

$$|e(x,\, y,\, \lambda+1)-e(x,\, y,\, \lambda)|\leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \tag{21.18}$$

где C не зависит от x, y и λ.

Доказательство. Из (21.1) следует, что

$$e(x,\, y,\, \lambda+1)-e(x,\, y,\, \lambda)=\sum_{\lambda<\lambda_j\leqslant\lambda+1}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)},$$

и из неравенства Коши—Буняковского мы получаем

$$|e(x,\, y,\, \lambda+1)-e(x,\, y,\, \lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant\left[\sum_{\lambda<\lambda_j\leqslant\lambda+1}|\varphi_j(x)|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{\lambda<\lambda_j\leqslant\lambda+1}|\varphi_j(y)|^2\right]^{1/2}=$$
$$=(e(x,\, x,\, \lambda+1)-e(x,\, x,\, \lambda))^{1/2}(e(y,\, y,\, \lambda+1)-e(y,\, y,\, \lambda))^{1/2}\leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}$$

по лемме 21.4 (притом даже с той же константой C). ■

Лемма 21.6. *Имеет место оценка*

$$|e(x,\, y,\, \lambda+\mu)-e(x,\, y,\, \lambda)|\leqslant C(1+|\lambda|+|\mu|)^{n-1}(1+|\mu|), \tag{21.19}$$

где C не зависит от x, y, λ, μ.

Доказательство получается разбиением $e(x,\, y,\, \lambda+\mu)-$ $-\,e(x,\, y,\, \lambda)$ в сумму не более чем $1+|\mu|$ слагаемых, оцениваемых, как в лемме 21.5. ■

Лемма 21.7. *Справедлива оценка*

$$\left|\int\rho(\lambda-\mu)\,e(x,\, y,\, \mu)\,d\mu-e(x,\, y,\, \lambda)\right|\leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \tag{21.20}$$

где C не зависит от x, y, λ.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\rho\in S(\mathbb{R}^1)$ и $\int\rho(\lambda)\,d\lambda=1$. С помощью очевидного неравенства

$$1+|\lambda|+|\mu|\leqslant(1+|\lambda|)\,(1+|\mu|)$$

получаем

$$\left|\int \rho(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu - e(x,\, y,\, \lambda)\right| =$$
$$= \left|\int \rho(\lambda-\mu)\, [e(x,\, y,\, \mu) - e(x,\, y,\, \lambda)]\, d\mu\right| =$$
$$= \left|\int \rho(\mu)\, [e(x,\, y,\, \lambda-\mu) - e(x,\, y,\, \lambda)]\, d\mu\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int (1+|\lambda|+|\mu|)^{n-1}(1+|\mu|)^{-N} d\mu \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},$$

что и требовалось. ■

Л е м м а 21.8. *Выполнена оценка*

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\lambda} d\lambda \int \rho(\lambda-\mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu) - e(x,\, y,\, \lambda)\right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}. \qquad (21.21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu) = \int \rho'(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \left(\int \rho(\lambda-\mu)\, d_\mu e(x,\, y,\, \mu)\right) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \left(\int \rho'(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu\right) d\lambda =$$
$$= \int \left(\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \rho'(\lambda-\mu)\, d\lambda\right) e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu = \int \rho(\lambda-\mu)\, e(x,\, y,\, \mu)\, d\mu,$$

так что (21.21) вытекает теперь из (21.20). ■

Учитывая лемму 21.2, мы видим, что справедливо

П р е д л о ж е н и е 21.1. *Имеет место оценка*

$$\left|e(x,\, y,\, \lambda) - \iint\limits_{\sigma<\lambda} R(\sigma - a_1(y,\, \xi),\, x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\, y,\, \xi)} d\sigma\, d\xi\right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \qquad (21.22)$$

где C не зависит от x, y, λ.

21.3. Теорема Хёрмандера для операторов 1-го порядка. Мы хотим теперь преобразовать к более простому виду оценку (21.22). Заметим, что в силу (21.9)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda,\, x,\, y,\, \xi)\, d\lambda = q(0,\, x,\, y,\, \xi) = I(x,\, y,\, \xi). \tag{21.23}$$

Поэтому, если положить

$$R_1(\tau,\, x,\, y,\, \xi) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\tau} R(\sigma,\, x,\, y,\, \xi)\, d\sigma, & \tau < 0, \\ -\int\limits_{\tau}^{\infty} R(\sigma,\, x,\, y,\, \xi)\, d\sigma = \\ \qquad = \int\limits_{-\infty}^{\tau} R(\sigma,\, x,\, y,\, \xi)\, d\sigma - I(x,\, y,\, \xi), & \tau > 0, \end{cases}$$

то из (21.11) вытекают следующие оценки для R_1:

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_\xi^\gamma R_1(\lambda,\, x,\, y,\, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma N} \langle\xi\rangle^{-|\gamma|} \langle\lambda\rangle^N. \tag{21.24}$$

Имеем очевидно,

$$\iint\limits_{\sigma<\lambda} R(\sigma - a_1(y,\, \xi),\, x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)} d\sigma\, đ\xi =$$
$$= \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} I(x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, đ\xi + \int R_1(\lambda - a_1(y,\, \xi),\, x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, đ\xi.$$

Аналогично лемме 21.3 доказывается, что

$$\left| \int R_1(\lambda - a_1(y,\, \xi),\, x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, đ\xi \right| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1},$$

Поэтому мы видим, что справедлива

Л е м м а 21.9. *Имеет место оценка*

$$\left| e(x,\, y,\, \lambda) - \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} I(x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, đ\xi \right| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{n-1}, \tag{21.25}$$

где C не зависит от x, y, λ.

Для дальнейшего упрощения нужна

Лемма 21.10. *При близких x и y справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} I(x,\, y,\, \xi)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, d\!\!\!{}^-\xi - \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, d\!\!\!{}^-\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},$$

где C не зависит от x, y, λ.

Доказательство. Из доказательства теоремы 19.1 легко извлечь, что при близких x и y

$$|I(x,\, y,\, \xi)-1| \leqslant C(1+|\xi|)^{-1}. \tag{21.26}$$

Поэтому

$$\left| \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} (I(x,\, y,\, \xi)-1)\, e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)}\, d\!\!\!{}^-\xi \right| \leqslant C \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} (1+|\xi|)^{-1}\, d\!\!\!{}^-\xi \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_{a_1<\lambda} (1+|a_1|)^{-1}\, d\!\!\!{}^-\xi = C \int\limits_{\mu<\lambda} (1+|\mu|)^{-1} dV_y(\mu) \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_0^\lambda (1+|\mu|)^{-1}\mu^{n-1} d\mu \leqslant C \int\limits_0^\lambda (1+|\mu|)^{n-2} d\mu \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1},$$

что и требовалось. ■

Заметим, что если пара x, y принадлежит некоторому компакту в $M\times M$, не пересекающемуся с диагональю, то мы можем считать, что $I(x,\, y,\, \xi)=0$, так что в этом случае из леммы 21.9 следует, что $|e(x,\, y,\, \xi)| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}$.

Суммируем эти результаты в виде теоремы.

Теорема 21.1. 1) *Пусть функция $\psi(x,\, y,\, \xi)$ определена при близких x и y и такова, что*

$$a_1(x,\, \psi_x(x,\, y,\, \xi)) = a_1(y,\, \xi), \quad \psi|_{(x-y)\cdot\xi=0}=0, \quad \psi_x|_{x=y}=\xi. \tag{21.27}$$

Тогда при близких x и y

$$\left| e(x,\, y,\, \lambda) - \int\limits_{a_1(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,\,y,\,\xi)} d\!\!\!{}^-\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}, \tag{21.28}$$

где C не зависит от x, y и λ.

В частности,

$$|e(x,\, x,\, \lambda) - V_x(\lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}. \tag{21.29}$$

2) *Если пара x, y принадлежит некоторому компакту в $M \times M$, не пересекающемуся с диагональю, то*

$$|e(x, y, \lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}. \tag{21.30}$$

Следствие 21.2. *Справедлива асимптотическая формула для числа $N(\lambda)$ собственных значении оператора A, меньших чем λ:*

$$\left| N(\lambda) - \int\limits_{a_1(x,\xi)<\lambda} đ\xi\, dx \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{n-1}.$$

21.4. Случай операторов высокого порядка. Пусть A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка m на замкнутом многообразии M с главным символом $a_m(x, \xi) \geqslant 0$. Построим при близких x и y такую функцию $\psi(x, y, \xi)$, что

$$a_m(x, \psi_x(x, y, \xi)) = a_m(y, \xi), \tag{21.31}$$

$$\psi|_{(x-y)\cdot\xi=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=y} = \xi, \tag{21.32}$$

откуда следует, что ψ однородна по ξ порядка 1 и такова, что

$$\psi(x, y, \xi) = (x-y)\cdot\xi + O(|x-y|^2|\xi|) \tag{21.33}$$

при $x \to y$.

Теорема 21.2. *Для описанного выше оператора A порядка m имеем:*

1) *При близких x и y*

$$\left| e(x, y, \lambda) - \int\limits_{a_m(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,y,\xi)} đ\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}}, \tag{21.34}$$

где C не зависит от x и y.

В частности,

$$\left| e(x, x, \lambda) - \int\limits_{a_m(x,\xi)<\lambda} đ\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}} \tag{21.35}$$

и, следовательно,

$$\left| N(\lambda) - \int\limits_{a_m(x,\xi)<\lambda} dx\, đ\xi \right| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}}. \tag{21.36}$$

2) *Если пара x, y принадлежит некоторому компакту в $M \times M$, не пересекающемуся с диагональю, то*

$$|e(x, y, \lambda| \leqslant C(1+|\lambda|)^{\frac{n-1}{m}}. \tag{21.37}$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что без ущерба для общности можно считать $A>0$ (если это неверно для самого оператора A, то в силу следствия 9.3 верно для оператора $A+cI$ при достаточно большом $c>0$). Введем оператор $A_1=A^{1/m}$. Это эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка 1 с главным символом $a_1(x,\xi)=$ $=a_m(x,\xi)^{1/m}$. Ясно, что уравнения (21.31), (21.32) для $\psi(x,y,\xi)$ просто совпадают с уравнениями (21.27). Кроме того, очевидно, что

$$e(x,\,y,\,\lambda)=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}=\sum_{\lambda_j^{1/m}\leqslant\lambda^{1/m}}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}=e_1(x,\,y,\,\lambda^{1/m}),$$

где $e_1(x,y,\lambda)$ — спектральная функция оператора A_1. Все утверждения теоремы 21.2 вытекают теперь из соответствующих утверждений теоремы 21.1. ■

Задача 21.1. Рассмотреть случай однородного оператора $a_m(D)$ с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Записать $e(x,y,\lambda)$ в виде интеграла и проверить непосредственно оценки (21.34), (21.35) и (21.37).

§ 22. Оператор Лапласа на сфере

22.1. Оператор Лапласа на римановом многообразии. 1) Пусть M — многообразие, на котором введена риманова метрика, т. е. в любом касательном пространстве T_xM задана билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с положительно определенной квадратичной формой. Если $x^1,\ldots,x^n$ — локальные координаты в области $U\subset M$, то $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ — базис касательного пространства во всех точках U. Обозначив

$$g_{ij}(x)=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x,\,\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x\right\rangle,\tag{22.1}$$

мы получим симметрическую положительно определенную матрицу $g_{ij}(x)$. Если теперь $v=\sum\limits_{j=1}^{n}v^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}\in T_xM$, то

$$\langle v,\,v\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\,v^iv^j.\tag{22.2}$$

Кокасательное пространство T_x^*M — это, по определению, дуальное пространство к T_xM. Его базис (при $x\in U$) состоит из 1-форм dx^i, определенных соотношениями

$$\left\langle dx^i,\,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta_j^i=\begin{cases}1 & \text{при}\quad i=j,\\ 0 & \text{при}\quad i\neq j.\end{cases}$$

Метрика на векторном пространстве E индуцирует изоморфизм E и E^*. С помощью этого изоморфизма можно перенести метрику с E на E^*. Фиксируя точку $x \in U$, вычислим $\langle dx^i, dx^j \rangle$ в точке x. Какой касательный вектор соответствует dx^i? Обозначим его координаты через a^{ik}, $k=1, \ldots, n$; тогда должно выполняться условие

$$\delta^i_j = \left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \{a^{ik}\}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_{k=1}^n g_{kj} a^{ik},$$

откуда $a^{ik} = g^{ik}$ — элементы матрицы, обратной к $\|g_{ik}\|$.

Теперь имеем

$$\langle dx^i, dx^j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}, dx^j \right\rangle = g^{ij}, \tag{22.3}$$

т. е. для любого кокасательного вектора $a = \sum\limits_{i=1}^n a_i \, dx^i \in T^*_x M$

$$\langle a, a \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} a_i a_j. \tag{22.4}$$

2) Введем на римановом многообразии гладкую плотность (объем) так, чтобы в касательном пространстве объем параллелепипеда из ортонормированной системы равнялся 1. Для любого параллелепипеда из векторов $e_1, \ldots, e_n$ объем будет равен

$$\mathrm{vol}\{e_1, \ldots, e_n\} = |\det\{e_1^{cm}, \ldots, e_n^{cm}\}|, \tag{22.5}$$

где e_i^{cm} — столбец координат e_i в ортонормированном базисе. Формула (22.5) вытекает из того, что объем должен быть аддитивным неотрицательным инвариантом параллелепипеда.

Что, если базис, в котором берутся координаты, не ортонормирован? Рассмотрим тогда преобразование A, переводящее ортобазис $e'_1, \ldots, e'_n$ в базис $e_1, \ldots, e_n$. В столбцах его матрицы (в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$) будут стоять координаты векторов e_i в ортобазисе $\{e'_i\}$, так что $\mathrm{vol}\{e_1, \ldots, e_n\} = |\det A| = \sqrt{\det(A^*A)}$.

Но матричные элементы A^*A в базисе $\{e'_i\}$ имеют вид

$$\langle A^*Ae'_i, e'_j \rangle = \langle Ae'_i, Ae'_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle. \tag{22.6}$$

Поэтому параллелепипед $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ имеет объем $\sqrt{g}$, где $g = \det \|g_{ij}(x)\|$, а объем любого множества F в локальных координатах U определяется как

$$\mathrm{vol}\,(F) = \int\limits_F \sqrt{g(x)}\,dx^1\ldots dx^n. \tag{22.7}$$

Непосредственно из формулы замены переменных в интеграле можно проверить, что интеграл в (22.7) не зависит от выбора локальных координат. Поэтому можно сразу принять его за определение $\mathrm{vol}(F)$, определяя гладкую положительную плотность dv на M по формуле

$$dv = \sqrt{g(x)}\,dx^1\ldots dx^n. \tag{22.8}$$

3) Для любого дифференциального оператора

$$A\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

существует единственный оператор A^* такой, что

$$(Af,\,g) = (f,\,A^*g), \quad f,\,g \in C_0^\infty(M), \tag{22.9}$$

где

$$(f,\,g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dv. \tag{22.10}$$

Аналогичное утверждение верно для операторов в сечениях векторных расслоений на M, если в слоях расслоений имеется эрмитова метрика (положительно определенная эрмитова форма), заменяющая $f(x)\,\overline{g(x)}$ в (22.10).

Определим в 1-формах $\Lambda^1(M)$ скалярное произведение, беря в $T_x^*M \otimes \mathbb{C}$ эрмитово скалярное произведение, индуцированное введенной выше метрикой на T_x^*M. Рассмотрим оператор

$$d\colon C^\infty(M) \to \Lambda^1(M), \tag{22.11}$$

переводящий функцию $f \in C^\infty(M)$ в ее дифференциал $df \in \Lambda^1(M)$, определяемый тем, что если $v \in T_xM$, то $\langle df,\,v\rangle = (vf)\,(x)$, где $(vf)\,(x)$ означает производную f по направлению v. В координатах:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i.$$

Оператор $\delta\colon \Lambda^1(M) \to C^\infty(M)$ определяется как сопряженный к d, т. е. $\delta = d^*$.

Определение 22.1. *Оператор Лапласа* (или *Лапласа—Бельтрами*) на функциях

$$\Delta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

на римановом многообразии M определяется формулой

$$\Delta = -\delta \cdot d. \tag{22.12}$$

Аналогичным образом на p-формах $\Lambda^p(M)$ определен оператор Лапласа

$$\Delta = -(d\delta + \delta d)\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M),$$

но мы не будем его рассматривать.

Сразу ясно, что оператор Лапласа Δ обладает следующими свойствами:

а) $\Delta^* = \Delta$;

б) если $T\colon M \to M$ сохраняет метрику в касательных пространствах и $\hat{T}\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ определено формулой $\hat{T}f = f \circ T$, то

$$\Delta \hat{T} = \hat{T} \Delta,$$

т. е. Δ перестановочен с изометриями;

в) если M замкнуто, то $(\Delta f,\, f) \leqslant 0$, причем из $\Delta f = 0$ вытекает, что $f = \mathrm{const}$.

4) Вычислим δ и Δ в локальных координатах. Имеем

$$\left(\delta\left(\sum_{i=1}^n a_i\, dx^i\right),\, f\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\, dx^i,\, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j\right) =$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^n \int g^{ij} a_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^j} \sqrt{g}\, dx = \sum_{i,\,j=1}^n \int \bar{f}\left[-\frac{\partial}{\partial x^j}\,(\sqrt{g}\, g^{ij} a_i)\right] dx =$$

$$= \int \bar{f} \cdot \sum_{i,\,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\, g^{ij} a_i)\right] \sqrt{g}\, dx,$$

откуда

$$\delta\left(\sum_{i=1}^n a_i\, dx^i\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{g}\, g^{ij} a_i) \tag{22.13}$$

и

$$\Delta f = \delta\, df = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{22.14}$$

П р и м е р 22.1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой получаем

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i^2}}.$$

Заметим, что все инварианты Δ — это инварианты риманова многообразия. В частности, таковы вычеты и значения ζ-функции.

Упражнение 22.1. Вычислить в локальных координатах главный символ оператора Лапласа на римановом многообразии.

22.2. Оператор Лапласа на сфере S^n. Сфера S^n — следующее подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \left\{ (x^0, \ldots, x^n) \colon \sum_{i=0}^{n} (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

На S^n имеется метрика, индуцированная стандартной метрикой $\mathbb{R}^{n+1}$, и соответствующий оператор Лапласа, который мы будем обозначать Δ_S. Есть следующий способ вычислять Δ_S, используя оператор Δ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Предложение 22.1. *Пусть $f(\omega)$ — функция на S^n, продолжим ее на $\mathbb{R}^{n+1}$, полагая $\hat{f}(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$, т. е. по однородности 0-го порядка. Тогда*

$$\Delta_S f = \Delta \hat{f}|_{S^n}, \tag{22.15}$$

или

$$(\Delta \hat{f})(x) = r^{-2} \widehat{\Delta_S f}, \tag{22.16}$$

где $r = |x|$.

Доказательство. Равносильность (22.15) и (22.16) очевидна, так как $\Delta \hat{f}$ имеет порядок однородности -2.

Докажем формулу (22.15). Обозначим временно через Δ'_S оператор на S^n, определяемый правой частью (22.15).

На S^n действует группа изометрий $\mathrm{SO}(n+1)$, получаемая ограничением на S^n вращений пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. С помощью этой группы любой единичный касательный вектор можно перевести в любой другой. Поэтому главный символ оператора, перестановочного со всеми изометриями, постоянен на всех единичных кокасательных векторах (и, следовательно, однозначно определен с точностью до скалярного множителя). Ясно, что операторы Δ_S и Δ'_S перестановочны с действием $\mathrm{SO}(n+1)$ на функциях. Поэтому существует такая постоянная λ, что оператор $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ имеет порядок 1. Но оператор $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ также перестановочен с $\mathrm{SO}(n+1)$, а поскольку нет линейных функций, инвариантных относительно поворотов, а свободный член $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ из тех же соображений постоянен, то оператор $\Delta'_S - \lambda\Delta_S$ кратен единичному и, следовательно, нулевой, так как $\Delta'_S 1 = \Delta_S 1 = 0$. Итак, $\Delta'_S = \lambda\Delta_S$. Из дальнейшего будет ясно, что $\lambda = 1$, что, впрочем, можно проверить, вычислив Δ_S и Δ'_S на любой негармонической на сфере функции. ■

22.3. Собственные значения оператора Δ_S. Вычислим оператор Δ в полярных координатах. Пусть $r=|x|$, $\omega=x/|x|$. Тогда

$$\Delta(f(r)\,g(\omega))=(\Delta f)\,g+f(\Delta g)+2(\nabla f)\cdot(\nabla g)=(\Delta f)\,g+f(\Delta g), \quad (22.17)$$

так как $(\nabla f)\cdot(\nabla g)=0$ (градиент ∇f направлен по радиусу, а градиент ∇g — по касательной).

Вычислим $\Delta f(r)$. Имеем

$$r'_{x^i}=\frac{x^i}{r}, \qquad r''_{x^ix^i}=\frac{1}{r}-\frac{(x^i)^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$\Delta f(r)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{x^i}{r}f'(r)\Big)=\sum_{i=0}^{n}f''(r)\frac{(x^i)^2}{r^2}+ \\ +\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{1}{r}-\frac{(x^i)^2}{r^3}\Big)f'(r)=f''(r)+\frac{n}{r}f'(r).$$

Поэтому

$$\Delta\equiv\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\Delta_S, \quad (22.18)$$

где Δ_S применяется на единичной сфере с последующим продолжением по нулевой однородности. Формула (22.18) верна уже на любых функциях (линейные комбинации функций вида $f(r)g(\omega)$ плотны в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$).

В частности, при $f(r)=r^\mu$ получаем

$$\Delta(r^\mu g(\omega))=r^{-2+\mu}[\Delta_S g+[\mu(\mu-1)+n\mu]\,g]= \\ =r^{-2+\mu}[\Delta_S g+\mu(\mu+n-1)g]. \quad (22.19)$$

Из (22.19) вытекает, что справедливо

Предложение 22.2. *Равенство $\Delta(r^\mu g(\omega))=0$ (при $r\neq 0$) равносильно тому, что $g(\omega)$ — собственная функция оператора $-\Delta_S$ с собственным значением $\lambda=\mu(\mu+n-1)$.*

Поскольку все собственные значения оператора $-\Delta_S$ неотрицательны, мы можем считать, что $\mu\geqslant 0$ или $\mu\leqslant 1-n$. Заметим, что квадратный трехчлен $\lambda(\mu)=\mu(\mu+n-1)$ принимает все значения $\lambda\geqslant 0$ при $\mu\geqslant 0$, причем ровно по одному разу. Поэтому ясно, что собственные значения $\lambda\geqslant 0$ находятся во взаимно однозначном соответствии с такими $\mu\geqslant 0$, что существует такая нетривиальная функция $g(\omega)$, что $r^\mu g(\omega)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$. Но тогда по теореме об устранимой особенности $r^\mu g(\omega)$ гармонична всюду в $\mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно, является по теореме Лиувилля гармоническим полиномом. В частности, μ — целое. Очевидно, верно и обратное, т. е. ограничения однородных гармонических полиномов на S^n являются собственными функциями оператора $-\Delta_S$ с собственными значениями $\lambda = k(k+n-1)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем по принципу максимума гармонический полином однозначно определяется своим ограничением на S^n. Итак, доказана

Теорема 22.1. *Собственные значения оператора $-\Delta_S$ равны $\lambda = k(k+n-1)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем кратность собственного значения $k(k+n-1)$ равна размерности пространства однородных гармонических полиномов степени k.*

22.4. Подсчет кратности. Пусть M_k — пространство однородных многочленов степени k. Вычислим $N_k = \dim M_k$. Базис в M_k образуют одночлены $x_0^{k_0} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k$. Количество упорядоченных разбиений числа k в сумму $n+1$ неотрицательных чисел равно количеству упорядоченных разбиений числа $k+n+1$ в сумму $n+1$ положительных чисел, что в свою очередь равно количеству способов расставить n перегородок на $n+k$ мест, т. е. равно

$$N_k = \binom{n+k}{n} = \frac{(n+k)!}{k!\,n!} = \frac{1}{n!}\,(k+n)\,(k+n-1)\ldots(k+1). \tag{22.20}$$

Заметим, что оператор Δ задает отображение

$$\Delta\colon M_k \to M_{k-2} \tag{22.21}$$

и есть точная последовательность

$$0 \to H_k \to M_k \to M_{k-2}, \tag{22.22}$$

где $H_k = \operatorname{Ker} \Delta|_{M_k}$ — пространство однородных гармонических полиномов степени k, размерность которого мы хотим сосчитать.

Теорема 22.2. 1) *Оператор $\Delta\colon M_k \to M_{k-2}$ сюръективен.*

2) *Имеет место прямое разложение*

$$M_k = \bigoplus_{k-2l \geqslant 0} r^{2l} H_{k-2l}, \tag{22.23}$$

где $r^2 = x_0^2 + \ldots + x_n^2$.

Следствие 22.1.

а) $\dim H_k = N_k - N_{k-2}$. (22.24)

б) *Если f, φ — два многочлена, то существует и единствен такой многочлен u, что*

$$\Delta u = f, \qquad u|_{|x|=1} = \varphi|_{|x|=1} \tag{22.25}$$

(т. е. задача Дирихле для уравнения Пуассона в шаре разрешима в многочленах).

в) *Гармонический многочлен не может делиться на r^2.*

Вывод следствия 22.1 из теоремы 22.2. а) Соотношение (22.24) следует из того, что последовательность (22.22) можно переписать в виде

$$0 \to H_k \to M_k \to M_{k-2} \to 0. \tag{22.26}$$

б) В силу п. 1) теоремы утверждение о разрешимости задачи (22.25) сводится к случаю $f=0$, где оно очевидно в силу (22.23).

в) Также очевидно из (22.23). ■

Доказательство теоремы 22.2. Оба утверждения доказываются одновременно индукцией по k.

При $k=0, 1$ утверждения теоремы верны. Пусть они верны при всех $l<k$.

1°. Покажем, что $H_k \cap r^2 M_{k-2} = 0$. Поскольку по индуктивному предположению $M_{k-2} = \bigoplus\limits_{k-2l-2\geqslant 0} r^{2l} H_{k-2l-2}$, то $r^2 M_{k-2} = \bigoplus\limits_{\substack{k-2l\geqslant 0\\ l>0}} r^{2l} H_{k-2l}$, и если $h_k \in H_k \cap r^2 M_{k-2}$, то

$$h_k = \sum_{\substack{l>0\\ k-2l\geqslant 0}} c_l r^{2l} h_{k-2l}. \tag{22.27}$$

Рассмотрим теперь гармонический многочлен $h = h_k - \sum\limits_{l>0} c_l h_{k-2l}$. Имеем $\deg h \leqslant k$, причем h_k — однородная компонента h степени k. Поскольку $h|_{|x|=1}=0$, то $h\equiv 0$, откуда $h_k\equiv 0$, что и требовалось.

2°. Из условия $M_k \supset H_k \dotplus r^2 M_{k-2}$ получаем

$$\dim H_k \leqslant N_k - N_{k-2}, \tag{22.28}$$

причем равенство равносильно разложению

$$M_k = H_k \dotplus r^2 M_{k-2}. \tag{22.29}$$

3°. Из точной последовательности (22.22) следует, что

$$\dim H_k = N_k - \dim \Delta(M_k) \geqslant N_k - N_{k-2}, \tag{22.30}$$

причем равенство равносильно сюръективности оператора

$$\Delta\colon M_k \to M_{k-2}.$$

4°. Из неравенств (22.28) и (22.30) следует, что $\dim H_k = N_k - N_{k-2}$, откуда вытекают сюръективность и разложение (22.29), из которого по предположению индукции уже следует и разложение (22.23). ■

Следствие 22.2. *Кратность собственного значения* $\lambda = k(k+n-1)$ *оператора* $-\Delta_S$ *равна* $N_k - N_{k-2}$, *где* N_k *задается формулой* (22.20).

22.5. Функция $N(t)$ для оператора $-\Delta_S$. Ясно, что

$$N(k(k+n-1)+0) = \sum_{l \leqslant k} \dim H_l = \sum_{l \leqslant k} (N_l - N_{l-2}) = N_k + N_{k-1}. \quad (22.31)$$

Но из (22.20) ясно, что N_k — многочлен степени n от k со старшим коэффициентом $\frac{1}{n!}$. Поэтому из (22.31) следует, что

$$N(k(k+n-1)+0) \sim \frac{2}{n!} k^n \sim \frac{2}{n!} [k(k+n-1)]^{n/2}. \quad (22.32)$$

Из (22.31) вытекает также, что

$$N(k(k+n-1)+0) - N(k(k+n-1)-0) = N_k - N_{k-2} = P_{n-1}(k).$$

где $P_{n-1}(k)$ — полином от k степенн $n-1$. Поэтому

$$N(k(k+n-1)+0) - N(k(k+n-1)-0) \geqslant ck^{n-1} \geqslant c[k(k+n-1)]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (22.33)$$

где $c > 0$. Из (22.32) и (22.33) ясно, что

$$N(\lambda) = \frac{2}{n!} \lambda^{n/2} (1 + O(\lambda^{-1/2})), \quad (22.34)$$

причем добавка $O(\lambda^{-1/2})$ бывает больше, чем $c\lambda^{-1/2}$, т. е. оценка остатка неулучшаема (по крайней мере с точки зрения показателя степени).

Проверим, что (22.34) — это как раз асимптотика из теоремы 21.2 (это, в частности, даст нам и тот факт, что множитель λ из доказательства предложения 22.1 равен 1). Нужно проверить, что

$$\frac{2}{n!} = (2\pi)^{-n} V_n V_n', \quad (22.35)$$

где V_n — объем n-мерного единичного шара, V_n' — площадь S^n (риманов объем).

Ясно, что $V_n = \frac{V_{n-1}'}{n}$, откуда все сводится к тождеству

$$V_{n-1}' V_n' = \frac{2(2\pi)^n}{(n-1)!}. \quad (22.36)$$

Вычислим V'_{n-1} и докажем это соотношение. Обозначим $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; тогда

$$I^n = \int\limits_{x_j \geqslant 0} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,dx_1\ldots dx_n$$

и, в частности,

$$I^2 = \int\limits_{x_i \geqslant 0} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^\infty re^{-r^2}\,dr = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^\infty e^{-z}\,dz = \frac{\pi}{4},$$

откуда $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I^n = \dfrac{\pi^{n/2}}{2^n}$.

Теперь заметим, что

$$I^n = \frac{V'_{n-1}}{2^n} \int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}\,dr = \frac{V'_{n-1}}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty z^{n/2-1}e^{-z}\,dz = \frac{V'_{n-1}}{2^{n+1}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

откуда $V'_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

Как известно, интегрирование по частям дает $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$, откуда при $n = 2k$ получаем

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma(k) = (k-1)! = \left(\frac{n}{2}-1\right)!.$$

Если же $n = 2k+1$, то

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

но $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{V'_0} = \sqrt{\pi}$, откуда

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 2^{-\frac{n-1}{2}}(n-2)!!\,\sqrt{\pi}.$$

Пусть теперь n — четное. Тогда

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)!\,2^{-n/2}(n-1)!!\,\sqrt{\pi} =$$
$$= 2^{-(n/2-1)}(n-2)!!\,2^{-n/2}(n-1)!!\,\sqrt{\pi} = 2\cdot 2^{-n}(n-1)!\,\sqrt{\pi},$$

откуда

$$V'_{n-1}V'_n = \frac{2\pi^{n/2}2\cdot\pi^{(n+1)/2}}{2\cdot 2^{-n}(n-1)!\,\sqrt{\pi}} = \frac{2(2\pi)^n}{(n-1)!},$$

что и требовалось. Случай нечетного n рассматривается аналогично.

З а д а ч а 22.1. Написать выражение для оператора Лапласа на плоскости Лобачевского.

З а д а ч а 22.2. Вычислить собственные значения для оператора Лапласа на n-мерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ с естественной метрикой (индуцированной метрикой сферы S^n при двулистном накрытии $S^n \to \mathbb{R}P^n$).

З а д а ч а 22.3. Вычислить собственные значения оператора Лапласа на n-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ с естественной кэлеровой метрикой (см. Чжэнь Шэн-шэнь [1]).