ГЛАВА IV

# ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $\mathbb{R}^n$

## § 23. Алгебра псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$

Целью изучения ПДО в $\mathbb{R}^n$ является описание различных эффектов, связанных с поведением функций при $|x|\to+\infty$. При этом основную роль играют уже нелокальные эффекты, так что приходится отбросить требование собственности, которое почти без ущерба для общности можно было использовать в локальной теории (гл. I).

**23.1. Классы символов и амплитуд.**

Определение 23.1. Класс символов $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)$, где $m\in\mathbb{R}$, $0<\rho\leqslant 1$, состоит из таких функций $a(z)\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, что выполнены оценки

$$|\partial_z^\alpha a(z)|\leqslant C_\alpha\langle z\rangle^{m-\rho|\alpha|},\quad z\in\mathbb{R}^N. \tag{23.1}$$

Пример 23.1. Любой многочлен $a(z)$ степени $m$ принадлежит $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^N)$.

Отметим сразу же, что если $a\in\Gamma_\rho^{m_1}(\mathbb{R}^N)$ и $b\in\Gamma_\rho^{m_2}(\mathbb{R}^N)$ , то $ab\in\in\Gamma_\rho^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^N)$ и $\partial_z^\alpha a\in\Gamma_\rho^{m_1-\rho|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$. Далее, если задан линейный мономорфизм $j\colon\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^N$, $a\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)$ и $j^*a=a\circ j$, то $j^*a\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^l)$.

Заметим еще, что

$$\bigcap_m \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^N)=S(\mathbb{R}^N). \tag{23.2}$$

Определение 23.2. Пусть $a_j\in\Gamma_\rho^{m_j}(\mathbb{R}^N)$, $j=1, 2, \ldots, m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$, и пусть задана функция $a\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Будем писать, что

$$a\sim\sum_{j=1}^\infty a_j, \tag{23.3}$$

если для любого целого $r\geqslant 2$

$$a-\sum_{j=1}^{r-1} a_j\in\Gamma_\rho^{\bar m_r}(\mathbb{R}^N), \tag{23.4}$$

где $\bar m_r=\max\limits_{j\geqslant r} m_j$.

Следующие предложения являются аналогами предложений 3.5 и 3.6.

Предложение 23.1. *Пусть $a_j\in\Gamma_\rho^{m_j}(\mathbb{R}^N)$, $j=1, 2, \ldots$, причем $m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$. Тогда существует такая функция $a$, что $a\sim\sum\limits_{j=1}^\infty a_j$. Далее, если другая функция $a'$ обладает тем же свойством, то $a-a'\in S(\mathbb{R}^N)$.*

Предложение 23.2. *Пусть* $a_j \in \Gamma_\rho^{m_j}(\mathbb{R}^N)$, $j = 1, 2, \ldots$, *причем* $m_j \to -\infty$ *при* $j \to +\infty$. *Пусть* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *и для любого мультииндекса* $\alpha$ *существуют такие постоянные* $\mu_\alpha$ *и* $C_\alpha$, *что*

$$|\partial_z^\alpha a(z)| \leqslant C_\alpha \langle z \rangle^{\mu_\alpha}. \tag{23.5}$$

*Пусть, наконец, существуют такие числовые последовательности* $l_j$ *и* $C_j$, $j = 1, 2, \ldots$, *что* $l_j \to -\infty$ *при* $j \to +\infty$ *и выполнены оценки*

$$\left| a(z) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j(z) \right| \leqslant C_r \langle z \rangle^{l_r}. \tag{23.6}$$

*Тогда* $a \sim \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$.

Упражнение 23.1. Доказать предложения 23.1 и 23.2.

Мы хотим теперь рассмотреть операторы вида

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi, \tag{23.7}$$

где $a(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Однако, как видно из рассмотрений гл. I, полезно сразу же рассмотреть более общую формулу действия оператора

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi, \tag{23.8}$$

где функция $a(x, y, \xi)$ называется *амплитудой*.

Опишем класс амплитуд, который будет нам полезен для дальнейшего.

Определение 23.3. Через $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ будем обозначать множество функций $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, для которых при некотором $m'$ выполнены оценки

$$|\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, \partial_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma} \langle z \rangle^{m-\rho|\alpha+\beta+\gamma|} \langle x - y \rangle^{m'+\rho|\alpha+\beta+\gamma|}, \tag{23.9}$$

где $z = (x, y, \xi) \in \mathbb{R}^{3n}$.

Ясно, что если $a \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$, то $\partial_z^\alpha a(z) \in \Pi^{m-\rho|\alpha|}(\mathbb{R}^{3n})$, а если есть еще $b \in \Pi_\rho^{m_1}(\mathbb{R}^{3n})$, то $ab \in \Pi_\rho^{m+m_1}(\mathbb{R}^{3n})$. Имеется включение $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{3n}) \subset \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$. Поскольку $\langle z \rangle / \langle x - y \rangle \geqslant 1$, то между самими классами $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ имеются включения

$$\Pi_{\rho'}^{m'}(\mathbb{R}^{3n}) \subset \Pi_{\rho''}^{m''}(\mathbb{R}^{3n}) \quad \text{при} \quad m' \leqslant m'',\ \rho' \geqslant \rho''.$$

Далее, если $a(x, y, \xi) \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$, то $a(x, x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$.

Важный пример амплитуд класса $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ доставляет следующее

Предложение 23.3. *Пусть $p$ — такое линейное отображение $p\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, что линейное отображение $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, переводящее $(x, y)$ в $(p(x, y), x-y)$, является изоморфизмом. Пусть $b(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Определим амплитуду $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ формулой*

$$a(x, y, \xi) = b(p(x, y), \xi). \tag{23.10}$$

*Тогда $a \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$.*

Доказательство. Функции $|x|+|y|$ и $|p(x, y)|+|x-y|$ задают эквивалентные нормы в $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому для доказательства предложения остается воспользоваться легко проверяемым неравенством

$$\frac{(1+|p(x, y)|+|\xi|)^s}{(1+|p(x, y)|+|x-y|+|\xi|)^s} \leqslant C(1+|x-y|)^{|s|}, \quad s \in \mathbb{R},$$

из которого оценки (23.9) следуют для $a(x, y, \xi)$ с $m' = |m|$. ■

Следствие 23.1. *Если $b \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$, то амплитуды $a(x, y, \xi) = b(x, \xi)$ и $a(x, y, \xi) = b(y, \xi)$ принадлежат пространству $\Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$.*

**23.2. Классы функций и действие оператора.** Введем теперь пространство $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из таких функций $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что

$$|\partial^\alpha u(x)| \leqslant C_\alpha \tag{23.11}$$

для любого мультииндекса $\alpha$. Наилучшие постоянные $C_\alpha$ в (23.11) образуют набор полунорм данной функции, определяющий в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ структуру пространства Фреше.

Оператор $A$ вида (23.8) удобно рассматривать в пространстве $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Чтобы дать корректное определение осциллирующего интеграла, входящего в (23.8), нужно поступить так же, как в § 1. А именно, пусть вначале $a(x, y, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Тогда интеграл (23.8) фактически берется по компакту и мы можем выполнить интегрирование по частям, пользуясь тождествами

$$\langle x-y\rangle^{-M} \langle D_\xi\rangle^M e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}, \tag{23.12}$$

$$\langle \xi\rangle^{-N} \langle D_y\rangle^N e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}, \tag{23.13}$$

где $M$, $N$ — четные неотрицательные целые числа. Из (23.8) получается

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \langle x-y\rangle^{-M} \langle D_\xi\rangle^M \langle D_y\rangle^N \times \\ \times [\langle\xi\rangle^{-N} a(x, y, \xi)\, u(y)]\, dy\, d\xi. \tag{23.14}$$

Если амплитуда $a \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ удовлетворяет оценкам (23.9) и $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, то ясно, что при $m-N<-n$, $m'+m-M<-n$ интеграл в (23.14) становится абсолютно сходящимся, причем он определяет непрерывную функцию от $x \in \mathbb{R}^n$. Увеличивая $M$ и $N$, мы получим интегралы, сохраняющие сходимость и после дифференцирования по $x$. Поэтому определяемый формулой (23.14) оператор задает непрерывное отображение

$$A\colon C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{23.15}$$

При $m \leqslant 0$ мы получаем отображение

$$A\colon C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Это же отображение может быть определено с помощью срезающей функции $\chi(x,\, y,\, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, $\chi(0,\, 0,\, 0) = 1$, по формуле

$$Au(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \chi(\varepsilon x,\, \varepsilon y,\, \varepsilon\xi)\, a(x,\, y,\, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi. \tag{23.16}$$

Идентичность определений (23.14) и (23.16) проверяется, как в § 1, и мы предоставляем эту проверку читателю в качестве упражнения.

В частности, оператор $A$ определен на функциях $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что он определяет непрерывное отображение

$$A\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n). \tag{23.17}$$

В самом деле, пользуясь неравенством

$$(1 + |\,x\,|)^k \leqslant (1 + |\,y\,|)^k (1 + |\,x - y\,|)^k, \qquad k > 0,$$

мы получим из (23.14), что

$$(1 + |\,x\,|)^k |\, Au(x)\,| \leqslant C_k$$

при любом $k$, и аналогичная оценка верна с заменой $Au(x)$ на $\partial_x^\alpha(Au(x))$. Отсюда и следует тот факт, что $Au(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ при $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ с оценкой полунорм, обеспечивающей непрерывность отображения (23.17) (которая, впрочем, может быть выведена также из теоремы о замкнутом графике).

Наконец, заметим, что, поскольку транспонированный оператор

$${}^t\!Av(y) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\, y,\, \xi)\, v(x)\, dx\, d\xi \tag{23.18}$$

по аналогичным причинам отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $S(\mathbb{R}^n)$, оператор $A$ по двойственности продолжается до непрерывного отображения

$$A\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n).$$

Определение 23.4. Класс операторов $A$ вида (23.8) с амплитудами $a \in \Pi_\rho^m(\mathbb{R}^{3n})$ обозначается через $G_\rho^m(\mathbb{R}^n)$ или просто через $G_\rho^m$ (если ясно или безразлично, какова размерность $n$).

Полезно описать операторы, принадлежащие пересечению $G^{-\infty} = \bigcap\limits_m G_\rho^m$. Мы покажем сейчас, что это пересечение не зависит от $\rho$ и состоит из операторов с ядрами $K_A(x, y) \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $\rho < 1$. Заметим, что операторы с амплитудами $a(x, y, \xi)$ и $\langle x-y\rangle^{-N}\langle D_\xi\rangle^N a(x, y, \xi)$ совпадают, откуда следует, что если $A \in G^{-\infty}$, то оператор $A$ можно задать с помощью амплитуды $a(x, y, \xi)$, удовлетворяющей условиям (23.9) со сколь угодно малыми (сколь угодно близкими к $-\infty$) числами $m$ и $m'$. Но тогда оператор $A$ имеет ядро

$$K_A(x, y) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi)\, đ\xi, \tag{23.19}$$

принадлежащее $S(\mathbb{R}^{2n})$. Отсюда следует, в частности, что $A$ определяет непрерывное отображение

$$A\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n), \tag{23.20}$$

которое задается формулой

$$Au(x) = \langle K_A(x, \cdot), u(\cdot)\rangle. \tag{23.21}$$

В общем случае ядро $K_A(x, y)$ определено формулой

$$\langle K_A, \varphi\rangle = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy\, đ\xi, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^{2n}), \tag{23.22}$$

и представляет собой обобщенную функцию $K_A \in S'(\mathbb{R}^{2n})$.

Упражнение 23.2. Обозначим через $C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$ пространство таких функций $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что для любого мультииндекса $\alpha$ найдутся такие постоянные $C_\alpha$ и $\mu_\alpha$, что

$$|\partial^\alpha u(x)| \leqslant C_\alpha \langle x\rangle^{\mu_\alpha}. \tag{23.23}$$

Доказать, что оператор $A \in G^m$ определяет отображение

$$A\colon C_t^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_t^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{23.24}$$

Упражнение 23.3. Пусть $A \in G_\rho^m(\mathbb{R}^n)$, $K_A$ — ядро оператора $A$. Доказать, что $K_A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\setminus\Delta)$, где $\Delta$ — диагональ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

### 23.3. Левый, правый и вейлевский символы.

Теорема 23.1. *Оператор $A \in G_\rho^m$ вида (23.8) может быть записан в любой из следующих трех форм:*

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_{A,l}(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{23.25}$$

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_{A,r}(y, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{23.26}$$

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_{A,w}\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, đ\xi. \tag{23.27}$$

*Здесь $\sigma_{A,l}$, $\sigma_{A,r}$ и $\sigma_{A,w}$ принадлежат $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$, однозначно определены и разлагаются в следующие асимптотические ряды*:

$$\sigma_{A,l}(x,\,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x}, \tag{23.28}$$

$$\sigma_{A,r}(y,\,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha (-D_x)^\alpha a(x,\,y,\,\xi)|_{x=y}, \tag{23.29}$$

$$\sigma_{A,w}(x,\,\xi) \sim \sum_{\beta,\,\gamma} \frac{1}{\beta!\,\gamma!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\beta+\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma}(-D_x)^\beta D_y^\gamma a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x}. \tag{23.30}$$

Эта теорема позволяет ввести

Определение 23.5. Функции $\sigma_{A,l}$, $\sigma_{A,r}$ и $\sigma_{A,w}$ из формул (23.25)—(23.27) называются соответственно *левым, правым* и *вейлевским* символами оператора $A$.

Хотя мы и не будем использовать никаких других символов, докажем следующее обобщение теоремы 23.1, содержащее параметр $\tau \in \mathbb{R}$ и позволяющее обойтись без повторений в доказательстве теоремы 23.1.

Теорема 23.2. *Пусть дан оператор $A \in G_\rho^m$ вида (23.8). Тогда для любого $\tau \in \mathbb{R}$ оператор $A$ может быть единственным образом записан в виде*

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y,\,\xi)\,u(y)\,dy\,đ\xi, \tag{23.31}$$

*где $b_\tau \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. При этом $b_\tau$ разлагается в следующий асимптотический ряд*:

$$b_\tau(x,\,\xi) \sim \sum_{\beta,\,\gamma} \frac{1}{\beta!\,\gamma!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma}(-D_x)^\beta D_y^\gamma a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x}. \tag{23.32}$$

Определение 23.6. Функцию $b_\tau(x,\,\xi)$ мы будем называть *$\tau$-символом* оператора $A$.

Доказательство теоремы 23.2. Полагая

$$\begin{cases} v = (1-\tau)\,x + \tau y, \\ w = x - y, \end{cases} \tag{23.33}$$

получим

$$\begin{cases} x = v + \tau w, \\ y = v - (1-\tau)\,w, \end{cases} \tag{23.34}$$

откуда

$$a(x,\,y,\,\xi) = a(v + \tau w,\,v - (1-\tau)\,w,\,\xi). \tag{23.35}$$

Разложим теперь правую часть (23.35) по формуле Тейлора при $w=0$:

$$a(x,\,y,\,\xi)=\sum_{|\beta+\gamma|\leqslant N-1}\frac{(-1)^{|\gamma|}}{\beta!\,\gamma!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}(x-y)^{\beta+\gamma}\,(\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi)+r_N, \tag{23.36}$$

где

$$r_N(x,\,y,\,\xi)=\sum_{|\beta+\gamma|=N}c_{\beta\gamma}(x-y)^{\beta+\gamma}\int\limits_0^1(1-t)^{N-1}\times \\ \times(\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v+t\tau w,\,v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)\,dt, \tag{23.37}$$

$c_{\beta\gamma}$ — некоторые постоянные.

В формуле (23.36) выражение $(\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi)$ означает, что надо в функции $\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a(x,\,y,\,\xi)$ вместо аргументов $x,\,y$ подставить $v=(1-\tau)\,x+\tau y$. Аналогичный смысл имеет выражение $(\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a)\times\times(v+t\tau w,\,v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)$ в формуле (23.37).

Заметим теперь, что оператор с амплитудой $(x-y)^{\beta+\gamma}(\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\times\times(v,\,v,\,\xi)$ совпадает с оператором, заданным с помощью амплитуды

$$(-D_\xi)^{\beta+\gamma}(\partial_x^\beta\partial_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi)=(-1)^{|\beta|+|\gamma|}(\partial_\xi^{\beta+\gamma}D_x^\beta D_y^\gamma a)\,(v,\,v,\,\xi).$$

Поэтому из (23.36) следует, что оператор $A$ представим в виде суммы $A=A_N+R_N$, где $A_N$ — оператор с $\tau$-символом

$$b_N(x,\,\xi)=\sum_{|\beta+\gamma|\leqslant N-1}\frac{1}{\beta!\,\gamma!}\tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma}(-D_x)^\beta D_y^\gamma a(x,\,y,\,\xi)|_{y=x},$$

а $R_N$ — оператор с амплитудой $r_N(x,\,y,\,\xi)$. Отметим теперь, что $R_N$ имеет вид линейной комбинации конечного числа слагаемых с амплитудами вида

$$\int\limits_0^1(\partial_\xi^{\beta+\gamma}\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v+t\tau w,\,v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)\,(1-t)^{N-1}\,dt,\qquad|\beta+\gamma\,|=N.$$

Докажем, что эта амплитуда принадлежит классу $\Pi_\rho^{m-2N\rho}(\mathbb{R}^{3n})$. Для этого достаточно показать, что это верно для подынтегрального выражения, причем все оценки равномерны по $t$ (заметим, что это очевидно при каждом фиксированном $t\neq0$ и верно при $t=0$ в силу предложения 23.3). Ввиду соотношений

$$v=(1-\tau)\,(v+t\tau w)+\tau(v-t(1-\tau)\,w),$$
$$tw=(v+t\tau w)-(v-t(1-\tau)\,w)$$

ясно, что

$$C^{-1} \leqslant \frac{|v+t\tau w|+|v-t(1-\tau)w|}{|v|+|tw|} \leqslant C,$$

где $C>0$ и $C$ не зависит от $t\in[0,1]$. Поэтому

$$|(\partial_\xi^{\beta+\gamma}\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v+t\tau w,\;v-t(1-\tau)\,w),\,\xi| \leqslant \\ \leqslant C(1+|v|+|tw|+|\xi|)^{m-2\rho N}(1+|tw|)^{m'+2\rho N}.$$

Поскольку при $m'+2\rho N\geqslant 0$ мы имеем

$$(1+|tw|)^{m'+2\rho N} \leqslant \leqslant (1+|v|+|tw|+|\xi|)^{m'+2\rho N}(1+|v|+|\xi|)^{-(m'+2\rho N)},$$

то ясно, что если еще $m'+m\geqslant 0$ и $m-2\rho N\leqslant 0$, то

$$\left|(\partial_\xi^{\beta+\gamma}\partial_x^\beta\,\partial_y^\gamma a)\,(v+t\tau w,\;v-t(1-\tau)\,w,\,\xi)\right| \leqslant \\ \leqslant C(1+|v|+|\xi|)^{-m'-2\rho N}(1+|v|+|tw|+|\xi|)^{m'+m} \leqslant \\ \leqslant C(1+|v|+|\xi|)^{m-2\rho N}(1+|w|)^{m'+m} \leqslant \\ \leqslant C(1+|v|+|w|+|\xi|)^{m-2\rho N}(1+|w|)^{m'+2m+2\rho N},$$

где $C$ не зависит от $t$. Аналогично получаются оценки для производных.

Пусть теперь символ $b'(x,\xi)\in\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ таков, что

$$b'(x,\xi)\sim\sum_{N=0}^{\infty}(b_N(x,\xi)-b_{N-1}(x,\xi)).$$

Тогда, если оператор $A'$ имеет $\tau$-символ $b'(x,\xi)$, то ясно, что $A-A'\in$ $\in G^{-\infty}$, т. е. оператор $A-A'$ имеет ядро, принадлежащее пространству $S(\mathbb{R}^{2n})$.

Проверим теперь, что если оператор $A$ имеет ядро $K_A\in S(\mathbb{R}^{2n})$, то он имеет $\tau$-символ $b_\tau(x,\xi)\in S(\mathbb{R}^{2n})$, причем соответствие между ядрами и $\tau$-символами взаимно однозначно. Но из формулы (23.31) ясно, что это соответствие имеет вид

$$K_A(x,y)=F^{-1}_{\xi\to x-y}\,b_\tau((1-\tau)\,x+\tau y,\,\xi), \tag{23.38}$$

$$b_\tau(v,\xi)=F_{w\to\xi}K_A(v+\tau w,\;v-(1-\tau)\,w) \tag{23.39}$$

(формула (23.39) получается из (23.38) с помощью замены переменных и формулы обращения Фурье). В частности, для любого $K_A\in S(\mathbb{R}^{2n})$ по формуле (23.39) можно найти $b_\tau(v,\xi)\in S(\mathbb{R}^{2n})$.

Докажем теперь единственность $\tau$-символа в общей ситуации. Для этого заметим, что формула (23.38) верна всегда, когда оператор $A$ задан с помощью $\tau$-символа $b_\tau(v,\xi)$, если частичное преобразование

Фурье, входящее в эту формулу, понимать аналогично преобразованию Фурье обобщенных функций (см. § 1). При этом верна и формула обращения, приводящая после линейной замены аргументов (23.34) к (23.39). Из формулы же (23.39) единственность $\tau$-символа очевидна в силу единственности ядра $K_A$. ■

Следствие 23.2. *Класс операторов $G_\rho^m$ совпадает с классом операторов вида* (23.25) *с левым символом $\sigma_{A,l}(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. То же самое верно с заменой* (23.25) *на* (23.26) *или* (23.27) *и $\sigma_{A,l}$ на $\sigma_{A,r}$ или $\sigma_{A,w}$.*

**23.4. Связи между различными символами. Символы транспонированного и сопряженного операторов.** Выражение $\tau$-символа через $\tau_1$-символ в виде асимптотического ряда может быть легко получено из теоремы 23.2. В самом деле, если оператор $A$ имеет $\tau_1$-символ $b_{\tau_1}(x, \xi)$, то это значит, что он может быть задан с помощью амплитуды

$$a(x, y, \xi) = b_{\tau_1}((1-\tau_1)\,x + \tau_1 y, \xi).$$

Но тогда по теореме 23.2 его $\tau$-символ имеет асимптотическое разложение

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\beta, \gamma} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\gamma!} \tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}(1-\tau_1)^{|\beta|}\tau_1^{|\gamma|}\partial_\xi^{\beta+\gamma} D_x^{\beta+\gamma} b_{\tau_1}(x, \xi),$$

или

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_\alpha c_\alpha \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha b_{\tau_1}(x, \xi), \tag{23.40}$$

где

$$c_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\gamma!}[\tau(1-\tau_1)]^{|\beta|}[(1-\tau)\,\tau_1]^{|\gamma|} \tag{23.41}$$

и, в частности, $c_0 = 1$. Преобразуем теперь (23.41), пользуясь формулой бинома Ньютона (лемма 3.4).

Обозначая $e = (1, 1, \ldots, 1)$, получим

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}[(1-\tau)\,\tau_1 e - \tau(1-\tau_1)e]^\alpha = \frac{1}{\alpha!}(\tau_1 - \tau)^{|\alpha|}.$$

Итак, доказана

Теорема 23.3. *Символы $b_\tau(x, \xi)$ и $b_{\tau_1}(x, \xi)$ одного и того же оператора $A \in G_\rho^m$ связаны соотношением*

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,(\tau_1 - \tau)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha b_{\tau_1}(x, \xi). \tag{23.42}$$

*В частности, $b_\tau(x, \xi) - b_{\tau_1}(x, \xi) \in \Gamma_\rho^{m-2\rho}(\mathbb{R}^{2n})$.*

Рассмотрим теперь транспонированный оператор ${}^tA$, определяемый формулой

$$\langle Au,\, v\rangle = \langle u,\, {}^tAv\rangle, \qquad u,\, v \in S(\mathbb{R}^n), \tag{23.43}$$

где

$$\langle u,\, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Из формулы

$$\langle Au,\, v\rangle = \iiint e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y,\, \xi)\, u(y)\, v(x)\, dy\, dx\, đ\xi =$$
$$= \iint e^{i(y-x)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y,\, -\xi)\, u(y)\, v(x)\, dy\, dx\, đ\xi$$

следует, что если оператор $A$ имеет $\tau$-символ $b_\tau(x,\,\xi)$, то оператор ${}^tA$ имеет $(1-\tau)$-символ ${}^tb_{1-\tau}(x,\,\xi)$, задаваемый формулой

$${}^tb_{1-\tau}(x,\,\xi) = b_\tau(x,\,-\xi). \tag{23.44}$$

Из теоремы 23.3 следует теперь

Теорема 23.4. *Если $A \in G^m_\rho$, то ${}^tA \in G^m_\rho$ и $\tau$-символ ${}^tb_\tau(x,\,\xi)$ оператора ${}^tA$ выражается через $\tau$-символ $b_\tau(x,\,\xi)$ оператора $A$ формулой*

$${}^tb_\tau(x,\,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,(1-2\tau)^{|\alpha|} \partial^\alpha_\xi\, D^\alpha_x b_\tau(x,\,-\xi). \tag{23.45}$$

Пусть теперь $A^*$ — сопряженный к $A$ оператор, определенный соотношением

$$(Au,\, v) = (u,\, A^*v), \qquad u,\, v \in S(\mathbb{R}^n), \tag{23.46}$$

где

$$(u,\, v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx. \tag{23.47}$$

Аналогично теореме 23.4 доказывается

Теорема 23.5. *Если $A \in G^m_\rho$, то $A^* \in G^m_\rho$, причем $\tau$-символ $b^*_\tau(x,\,\xi)$ оператора $A^*$ связан с $(1-\tau)$-символом $b_{1-\tau}(x,\,\xi)$ оператора $A$ соотношением*

$$b^*_\tau(x,\,\xi) = \overline{b_{1-\tau}(x,\,\xi)}, \tag{23.48}$$

*а через $\tau$-символ $b_\tau(x,\,\xi)$ оператора $A$ выражается асимптотическим рядом*

$$b^*_\tau(x,\,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,(1-2\tau)^{|\alpha|} \partial^\alpha_\xi\, D^\alpha_x \overline{b_\tau(x,\,\xi)}. \tag{23.49}$$

С л е д с т в и е 23.3. *Если* $A\in G^m_\rho$, *то*

$$\sigma_{A^*,w}(x,\,\xi)=\overline{\sigma_{A,\,w}(x,\,\xi)}. \tag{23.50}$$

*В частности, условие* $A^*=A$ *равносильно вещественности вейлевского символа* $\sigma_{A,\,w}(x,\,\xi)$.

**23.5. Формула композиции.**

Т е о р е м а 23.6. *Пусть* $A'\in G^{m_1}_\rho$, $A''\in G^{m_2}_\rho$. *Тогда* $A'\cdot A''\in G^{m_1+m_2}_\rho$, *причем если* $b'_{\tau_1}(x,\,\xi)$ — $\tau_1$*-символ оператора* $A'$, $b''_{\tau_2}(x,\,\xi)$ — $\tau_2$*-символ оператора* $A''$, *то* $\tau$*-символ* $b_\tau(x,\,\xi)$ *оператора* $A'\cdot A''$ *имеет асимптотическое разложение вида*

$$b_\tau(x,\,\xi)\sim\sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta}c_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial^\alpha_\xi\,D^\beta_x b'_{\tau_1}(x,\,\xi))\,(\partial^\gamma_\xi\,D^\delta_x b''_{\tau_2}(x,\,\xi)), \tag{23.51}$$

*где* $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — *постоянные (зависящие от* $\tau$, $\tau_1$ *и* $\tau_2$*), причем* $c_{0000}=1$ *и сумма берется по таким наборам мультииндексов* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ *что* $\alpha+\gamma=\beta+\delta$.

*В частности,* $b_\tau(x,\,\xi)-b'_{\tau_1}(x,\,\xi)\,b''_{\tau_2}(x,\,\xi)\in\Gamma^{m_1+m_2-2\rho}_\rho(\mathbb{R}^{2n})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая теорему 23.3, мы видим, что достаточно рассмотреть какой-нибудь один набор чисел $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$. Возьмем для простоты случай $\tau_1=0$, $\tau_2=1$. Оператор $A''$ записывается через символ $b''_1(x,\,\xi)$ по формуле

$$A''u(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}b''_1(y,\,\xi)\,u(y)\,dy\,d\!\!\!{}^-\xi.$$

или

$$\widehat{A''u}(\xi)=\int e^{-iy\cdot\xi}b''_1(y,\,\xi)\,u(y)\,dy. \tag{23.52}$$

Оператор $A'$ имеет вид

$$A'v(x)=\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}b'_0(x,\,\xi)\,u(y)\,dy\,d\!\!\!{}^-\xi=\int e^{ix\cdot\xi}b'_0(x,\,\xi)\,\hat u(\xi)\,d\!\!\!{}^-\xi. \tag{23.53}$$

Из (23.52) и (23.53) находим

$$A'\circ A''u(x)=\iint e^{(x-y)\cdot\xi}b'_0(x,\,\xi)\,b''_1(y,\,\xi)\,u(y)\,dy\,d\!\!\!{}^-\xi, \tag{23.54}$$

т. е. оператор $A'\circ A''$ задается с помощью амплитуды

$$a(x,\,y,\,\xi)=b'_0(x,\,\xi)\,b''_1(y,\,\xi)\in\Pi^{m_1+m_2}_\rho(\mathbb{R}^{3n}).$$

Отсюда $A' \circ A'' \in G_\rho^{m_1+m_2}$. Применяя теорему 23.2, мы получаем для $b_\tau(x, \xi)$

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\beta, \gamma} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\,\gamma!} \tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|} \partial_\xi^{\beta+\gamma} [(D_x^\beta b_0'(x, \xi))\,(D_x^\gamma b_1''(y, \xi))]$$

и по формуле Лейбница (лемма 3.3)

$$b_\tau(x, \xi) \sim \sum_{\substack{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \\ \delta+\varepsilon=\beta+\gamma}} \frac{(-1)^{|\beta|}(\beta+\gamma)!}{\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!} \tau^{|\beta|}(1-\tau)^{|\gamma|}(\partial_\xi^\delta D_x^\beta b_0')\,(\partial_\xi^\varepsilon D_x^\gamma b_1''), \tag{23.55}$$

что и требовалось. ■

Подставляя в (23.55) выражения $b_0'$, $b_1''$ через $b_{\tau_1}'$, $b_{\tau_2}''$ мы получим для коэффициентов $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ из формулы (23.51) некоторые формулы, которые иногда удается упростить. Например, аналогично теореме 3.4 доказывается

Т е о р е м а 23.7. *В предположениях теоремы* 23.6

$$b_0(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha b_0'(x, \xi))(D_x^\alpha b_0''(x, \xi)). \tag{23.56}$$

З а д а ч а 23.1. Доказать, что левый символ $\sigma_{A,l}(x, \xi)$ оператора $A \in G_\rho^m$ выражается через оператор $A$ формулой

$$\sigma_{A,l}(x, \xi) = e^{-ix\cdot\xi} A(e^{ix\cdot\xi}), \tag{23.57}$$

где оператор $A$ применяется по переменной $x$.

З а д а ч а 23.2. Доказать, что если $A' \in G_\rho^{m_1}$, $A'' \in G_\rho^{m_2}$, то

$$\sigma_{A'\circ A'', w}(x, \xi) \sim$$
$$\sim \sum_{\alpha, \beta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!} 2^{-|\alpha+\beta|}(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{A', w}(x, \xi))\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha \sigma_{A'', w}(x, \xi)). \tag{23.58}$$

З а д а ч а 23.3. Рассмотрим многочлен

$$(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n + \tau_1 D_{x_1} + \ldots + \tau_n D_{x_n})^N$$

от переменных $t, \tau \in \mathbb{R}^n$ с операторными коэффициентами ($x_j$ рассматривается как оператор умножения на $x_j$) и запишем его в виде

$$\sum_{|\alpha+\beta|=N} \frac{N!}{\alpha!\,\beta!} t^\alpha \tau^\beta A_{\alpha\beta}.$$

Доказать, что $A_{\alpha\beta}$ — оператор с вейлевским символом $x^\alpha \xi^\beta$.

## § 24. Антивиковский символ. Теоремы об ограниченности и компактности

**24.1. Определение и простейшие свойства антивиковского символа.** Положим

$$\Phi_0(x) = \pi^{-n/4} \exp\,[-x^2/2], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{24.1}$$

Тогда $\Phi_0(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\|\Phi_0\| = 1$, где мы обозначили через $\|\cdot\|$ обычную норму в $L^2(\mathbb{R}^n)$, порожденную скалярным произведением (23.47). Обозначим через $P_0$ оператор ортогонального проектирования в $L^2(\mathbb{R}^n)$ на вектор $\Phi_0$. Ясно, что ядро его имеет вид

$$K(x,\,y) = \pi^{-n/2} \exp\,[-(x^2+y^2)/2]. \tag{24.2}$$

Вычислим вейлевский символ $\sigma_0$ оператора $P_0$, используя формулу (23.39) с $\tau = 1/2$, т. е.

$$\sigma_0(x,\,\xi) = F_{v\to\xi} K\Big(x + \frac{1}{2}v,\; x - \frac{1}{2}v\Big). \tag{24.3}$$

Учитывая, что

$$F_{v\to\xi}\pi^{-n/2} \exp\,(-\alpha v^2) = \Big(\frac{\pi}{\alpha}\Big)^{n/2} \exp\Big(-\frac{\xi^2}{4\alpha}\Big), \quad \alpha > 0, \tag{24.4}$$

мы получаем из (24.3), что

$$\sigma_0(x,\,\xi) = F_{v\to\xi}\pi^{-n/2} \exp\Big(-x^2 - \frac{v^2}{4}\Big) = 2^n \exp\,[-(x^2+\xi^2)]. \tag{24.5}$$

Пусть теперь $z = (x,\,\xi)$, $z_0 = (x_0,\,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим оператор $P_{z_0}$ с вейлевским символом $\sigma_{z_0}(z)$ вида

$$\sigma_{z_0}(z) = \sigma_0(z - z_0). \tag{24.6}$$

Легко проверить, что

$$P_{z_0} = M_{\xi_0} T_{x_0} P_0 T_{x_0}^{-1} M_{\xi_0}^{-1}, \tag{24.7}$$

где $M_{\xi_0}$ — оператор умножения на $e^{ix\cdot\xi_0}$, $T_{x_0}$ — оператор сдвига на $x_0$, в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т. е. $T_{x_0}u(x) = u(x - x_0)$.

Полагая $U_{z_0} = M_{\xi_0} T_{x_0}$, мы видим, что оператор $P_{z_0}$ записывается в виде

$$P_{z_0} = U_{z_0} P_0 U_{z_0}^{-1}, \tag{24.8}$$

откуда ввиду унитарности $U_{z_0}$ ясно, что $P_{z_0}$ является оператором ортогонального проектирования на вектор $\Phi_{z_0} = U_{z_0}\Phi_0$.

Мы хотим рассмотреть оператор, являющийся следующей линейной комбинацией операторов $P_z$, $z \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$A = \int a(x, \xi)\, P_{x,\xi}\, dx\, đ\xi, \tag{24.9}$$

где $a(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Для придания смысла этой формуле заметим, что непосредственно проверяется следующий факт: если $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, то $(P_{x,\xi}u)(x_0) \in S(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$. Благодаря этому (24.9) имеет смысл после применения к функции $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, и легко убедиться, что оператор $A$ отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $S(\mathbb{R}^n)$.

Определение 24.1. Оператор $A$ вида (24.9) называется *оператором с антивиковским символом $a(x, \xi)$.*

Удобство антивиковского символа показывает

Предложение 24.1. *Если $a(z) \geqslant 0$, то $A \geqslant 0$, т. е. $(Au, u) \geqslant 0$ при $u \in S(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Это вытекает из того, что $P_{z_0} \geqslant 0$ при любом $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. ■

Следствие 24.1. *Если функция $a(z)$ вещественнозначна, то*

$$\|A\| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a(z)|, \tag{24.10}$$

*где*

$$\|A\| = \sup_{u \in S(\mathbb{R}^n), u \neq 0} \|Au\|/\|u\|.$$

Доказательство. Утверждение $\|A\| \leqslant M$ равносильно для самосопряженного $A$ неотрицательности операторов $M - A$ и $A + M$, очевидной при $M = \sup\limits_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a(z)|$ из предложения 24.1. ■

Следствие 24.2. *Для комплекснозначной функции $a(z)$ имеет место оценка*

$$\|A\| \leqslant 2 \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a(z)|. \tag{24.11}$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться следствием 24.1 для $\operatorname{Re} a$ и $\operatorname{Im} a$. ■

Замечание 24.1. На самом деле оценка (24.10) верна и для комплекснозначных функций $a(z)$ (см. задачу 24.4), хотя мы не будем этого использовать.

**24.2. Связь антивиковского символа с другими символами.**

Теорема 24.1. *Пусть $A$ — оператор с антивиковским символом $a(z) = a(x, \xi) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда $A \in G_\rho^m$ и вейлевский символ $b(z)$ оператора $A$ выражается формулой*

$$b(z) = \pi^{-n} \int e^{-|z - z'|^2} a(z')\, dz'. \tag{24.12}$$

*Далее, любой $\tau$-символ $b_\tau(z)$ оператора $A$ имеет асимптотическое разложение*

$$b_\tau(z) \sim \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha a(z), \tag{24.13}$$

*где $c_\alpha$ — некоторые постоянные (зависящие от $\tau$), причем $c_0 = 1$ и $c_\alpha = 0$ при нечетном $|\alpha|$. В частности,*

$$b_\tau(z) - a(z) \in \Gamma_\rho^{m-2\rho}(\mathbb{R}^{2n}). \tag{24.14}$$

Доказательство. Соотношение (24.12) очевидно из формул (24.9), (24.5) и (24.6).

Соотношение (24.13) достаточно в силу теоремы 23.3 доказывать при $\tau = 1/2$, т. е. для вейлевского символа. Разложим $a(z')$ по формуле Тейлора в точке $z$:

$$a(z') = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha a(z)) (z'-z)^\alpha + r_N(z', z), \tag{24.15}$$

где

$$r_N(z', z) = \sum_{|\alpha|=N} c'_\alpha (z'-z)^\alpha \int_0^1 \partial^\alpha a(z + t(z'-z)) (1-t)^{N-1}\, dt, \tag{24.16}$$

$c'_\alpha$ — некоторые постоянные.

Подставляя (24.15) в (24.12), мы получаем

$$b(z) = \sum_{|\alpha|<N} c_\alpha \partial^\alpha a(z) + R_N, \tag{24.17}$$

где

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!\, \pi^n} \int z^\alpha e^{-|z|^2} dz \tag{24.18}$$

(откуда, в частности, $c_0 = 1$ и $c_\alpha = 0$ при нечетном $|\alpha|$),

$$R_N(z) = \pi^{-n} \int e^{-|z-z'|^2} r_N(z', z)\, dz'$$

Докажем, что $R_N(z) \in \Gamma_\rho^{m-\rho N}(\mathbb{R}^{2n})$ (отсюда очевидным образом следует требуемое разложение (24.13)). Удобно записать $R_N(z)$ в виде

$$R_N(z) = \sum_{|\alpha|=N} c''_\alpha \int_0^1 dt \int dw \cdot w^\alpha e^{-|w|^2} (\partial^\alpha a)(z + tw)(1-t)^{N-1},$$

откуда $\partial_z^\gamma R_N(z)$ имеет вид суммы слагаемых вида

$$\int_0^1 dt \int dw \cdot w^\alpha e^{-|w|^2} (\partial^\beta a)(z+tw)(1-t)^{N-1}.$$

где $|\beta| = N + |\gamma|$. Ясно, что достаточно равномерно по $t \in [0, 1]$ оценить выражение

$$I_{\alpha\beta}(z) = \int dw \cdot w^\alpha e^{-|w|^2} (\partial^\beta a)(z+tw). \tag{24.19}$$

Для оценки $I_{\alpha\beta}(z)$ разобьем интеграл в (24.19) в сумму двух интегралов:

$I'_{\alpha\beta}(z)$ — по области $|w| < |z|/2$,

$I''_{\alpha\beta}(z)$ — по области $|w| > |z|/2$.

Для $I'_{\alpha\beta}(z)$ имеется оценка

$$|I'_{\alpha\beta}(z)| \leqslant C_\beta \langle z\rangle^{m-\rho(N+|\gamma|)} \int \langle w\rangle^N e^{-|w|^2} dw = C'_\beta \langle z\rangle^{m-\rho(N+|\gamma|)}, \tag{24.20}$$

а $I''_{\alpha\beta}(z)$ оценивается следующим образом:

$$|I''_{\alpha\beta}(z)| \leqslant C_{\alpha\beta} \int\limits_{|w|>|z|/2} e^{-|w|^2} \langle w\rangle^{N+m} \langle z\rangle^m dw \leqslant C_k \langle z\rangle^{-k} \tag{24.21}$$

при любом $k$. Из (24.20) и (24.21) немедленно следует требуемая оценка для $I_{\alpha\beta}(z)$. ■

Т е о р е м а 24.2. *Пусть $A' \in G_\rho^m$. Тогда существует такой оператор $A \in G_\rho^m$, что $A$ задается антивиковским символом*

$$a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{и} \quad A - A' \in G^{-\infty}, \tag{24.22}$$

*т. е. оператор $A - A'$ имеет ядро $K_{A-A'}(x, y) \in S(\mathbb{R}^{2n})$.*

З а м е ч а н и е 24.2. Не любой оператор $A \in G_\rho^m$ имеет антивиковский символ $a \in \Gamma_\rho^m$ (это видно, например, из того, что вейлевский символ $b(z)$, определяемый формулой (24.12), должен быть аналитической функцией от $z \in \mathbb{R}^{2n}$). Фактически нахождение антивиковского символа по вейлевскому требует решение обратного уравнения теплопроводности. Теорема 24.2 показывает, что если пренебречь символами из $S(\mathbb{R}^n)$, то эта процедура становится осуществимой.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 24.2. Пусть оператор $A'$ имеет вейлевский символ $b'(x, \xi)$. Рассмотрим оператор $A_0$ с антивиковским символом $a_0(x, \xi) = b'(x, \xi)$ и положим $A'_1 = A' - A_0$. Тогда $A'_1 \in G_\rho^{m-2\rho}$ по теореме 24.1. Обозначим через $A_1$ оператор с антивиковским символом $a_1(x, \xi)$, равным вейлевскому символу оператора $A_1'$. Тогда имеем

$$A' = A_0 + A_1 + A_2', \quad A_2' \in G_\rho^{m-4\rho}.$$

Продолжая, мы по индукции можем построить такую последовательность операторов $A_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, с антивиковскими символами $a_j(z) \in \Gamma_\rho^{m-2j\rho}(\mathbb{R}^{2n})$, что

$$A' - \sum_{j=0}^{N-1} A_j \in G_\rho^{m-2\rho N}. \tag{24.23}$$

Пусть символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ таков, что

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Тогда, если $A$ — оператор с антивиковским символом $a(z)$, то из (24.23) вытекает (24.22), что и требовалось. ■

**24.3. Теоремы об ограниченности и компактности.**

Теорема 24.3. *Оператор $A \in G_\rho^0$ продолжается до ограниченого оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Утверждение в силу теоремы 24.2 и следствия 24.2 сводится к случаю, когда $A \in G^{-\infty}$, где оно получается из очевидной оценки

$$\|A\|^2 \leqslant \iint |K_A(x, y)|^2 dx\, dy, \tag{24.24}$$

вытекающей из неравенства Коши—Буняковского (см. также добавление 3). ■

Теорема 24.4. *Оператор $A \in G_\rho^m$, где $m < 0$, продолжается до компактного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что компактны операторы $A \in G^{-\infty}$, являющиеся операторами Гильберта—Шмидта (см. добавление 3).

Пусть теперь $A \in G_\rho^m$, $m < 0$. Пользуясь теоремой 24.2, мы можем считать, что оператор $A$ имеет антивиковский символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$. Пусть $\chi(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi(z) = 1$ при $|z| \leqslant 1$. Положим $a_L(z) = \chi\left(\dfrac{z}{L}\right) a(z)$, и пусть $A_L$ — оператор с антивиковским символом $a_L(z)$. Тогда $\sup\limits_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |a(z) - a_L(z)| \to 0$ при $L \to +\infty$, и в силу следствия 24.2 отсюда вытекает, что $\|A - A_L\| \to 0$ при $L \to +\infty$. Но оператор $A_L$ компактен при любом $L$, поскольку $A_L \in G^{-\infty}$. Отсюда следует и компактность оператора $A$. ■

**24.4. Задачи.**

Задача 24.1. Доказать теорему об ограниченности 24.3 тем же способом, что и теорему 6.1.

Задача 24.2. Доказать теорему о компактности 24.4, не используя теорию антивиковского символа.

Указание. С помощью полярного разложения оператора $A$ проверить, что компактность $A$ равносильна компактности $A^*A$; показать, что компактность $A^*A$ равносильна компактности оператора $B_N = (A^*A)^N$, и получить последнюю при большом $N$ из того, что $K_{B_N}(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

Задача 24.3. Рассмотрим систему векторов $\{\Phi_z\}_{z\in\mathbb{R}^{2n}}$, определенных в п. 24.1. Доказать, что отображение $I\colon f \mapsto (f, \Phi_z)$ определяет изометричное вложение $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, т. е.

$$||f||^2 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \Phi_z)|^2 dz \tag{24.25}$$

(в такой ситуации говорят, что векторы $\Phi_z$ образуют *переполненную* систему относительно меры $(2\pi)^{-n}dz$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$).

Задача 24.4. Показать, что оператор $A$ с антивиковским символом $a(z)$ может быть записан в виде

$$A = I^* M_a I, \tag{24.26}$$

где $M_a$ — оператор умножения на $a(z)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а оператор $I\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ введен в задаче 24.3. Вывести отсюда справедливость оценки (24.10) для комплекснозначной функции $a(z)$.

Задача 24.5. Введем *виковский символ* $c(z)$ оператора $A \in G^m_\rho$ с вейлевским символом $b(z)$ по формуле

$$c(z) = \pi^{-n} \int e^{-|z-z'|^2} b(z')\, dz'. \tag{24.27}$$

Доказать, что $c(z)$ выражается через $b(z)$ асимптотическим рядом

$$c(z) \sim \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha b(z), \tag{24.28}$$

где $c_0 = 1$ и $c_\alpha = 0$ при нечетном $|\alpha|$.

Проверить, что виковский символ $c(z)$ оператора $A$ выражается формулой

$$c(z) = (A\Phi_z, \Phi_z). \tag{24.29}$$

Вывести из нее, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^{2n}} |c(z)| \leqslant \|A\|.$$

З а д а ч а 24.6. Пусть $a(z)\to 0$ при $|z|\to +\infty$. Доказать, что оператор $A$, определяемый формулой (24.26), компактен.

З а д а ч а 24.7. Пусть $A$ — компактный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $c(z)$ определено формулой (24.29). Доказать, что $c(z)\to 0$ при $|z|\to +\infty$.

З а д а ч а 24.8. Пусть $A\in G^m_\rho$ при некотором $m\in\mathbb{R}$, $b(z)$ — вейлевский символ оператора $A$. Доказать, что ограниченность оператора $A$ равносильна тому, что $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^{2n}} |b(z)| < +\infty$.

У к а з а н и е. Использовать следствие 24.2, задачу 24.5 и конструкцию из доказательства теоремы 24.2.

З а д а ч а 24.9. Пусть $A$, $b(z)$ такие же, как и в предыдущей задаче. Доказать, что компактность $A$ равносильна условию $b(z)\to 0$ при $|z|\to +\infty$.

У к а з а н и е. Использовать задачи 24.6, 24.7 и конструкцию из доказательства теоремы 24.2.

З а д а ч а 24.10. Доказать, что дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ имеет антивиковский символ, являющийся многочленом по $z=(x,\,\xi)$.

У к а з а н и е. В многочленах можно решать обратное уравнение теплопроводности, поскольку лапласиан $\Delta_z$ нильпотентен на многочленах данной степени; если $b(z)$ — вейлевский символ оператора $A$, являющийся многочленом, то его антивиковский символ имеет вид

$$a(z) = e^{-\frac{\Delta}{4}} b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\Delta}{4}\right)^k b(z). \tag{24.30}$$

З а д а ч а 24.11. Вычислить коэффициенты $c_\alpha$ в формуле (24.13) при $\tau = 1/2$, т. е. при выражении вейлевского символа через антивиковский. Показать, что этот ряд может быть записан в виде

$$b(z) \sim e^{\frac{\Delta}{4}} a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^k a(z). \tag{24.31}$$

У к а з а н и е. При вычислении коэффициентов $c_\alpha$ можно считать, что $a(z)$ — многочлен.

З а д а ч а 24.12. Пусть $A$ — дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что оператор $A$ единственным образом может быть записан в каждом из двух видов:

$$A = \sum_{\alpha,\,\beta} c_{\alpha\beta} a^{\alpha} (a^{+})^{\beta}, \tag{24.32}$$

$$A = \sum_{\alpha,\,\beta} c'_{\alpha\beta} (a^{+})^{\beta} a^{\alpha}, \tag{24.33}$$

где $a^{+} = \left(x_1 - \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_n - \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $a = \left(x_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_n + \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $\alpha$, $\beta$ — $n$-мерные мультинндексы, суммы (24.32) и (24.33) конечны и $c_{\alpha\beta}$, $c'_{\alpha\beta}$ — комплексные постоянные. Доказать, что в этом случае антивиковский символ $a(x, \xi)$ и виковский символ $c(x, \xi)$ оператора $A$ задаются формулами

$$a(x, \xi) = \sum_{\alpha,\,\beta} c_{\alpha\beta} (x + i\xi)^{\alpha} (x - i\xi)^{\beta}, \tag{24.34}$$

$$c(x, \xi) = \sum_{\alpha,\,\beta} c'_{\alpha\beta} (x - i\xi)^{\beta} (x + i\xi)^{\alpha}. \tag{24.35}$$

## § 25. Гипоэллиптичность и параметрикс. Пространства Соболева. Фредгольмовость

**25.1. Класс гипоэллиптических символов и операторов.**

Определение 25.1. Будем писать, что $a(z) \in H\Gamma_{\rho}^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^N)$, если $a(z) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ и существует такое $R$, что при $|z| \geqslant R$ выполнены оценки

$$C|z|^{m_0} \leqslant |a(z)| \leqslant C_1 |z|^{m}, \tag{25.1}$$

$$|\partial^{\alpha} a(z)| \leqslant C_{\alpha} |a(z)|\, |z|^{-\rho|\alpha|}, \tag{25.2}$$

где $C$, $C_1$, $C_{\alpha}$ — положительные постоянные.

В частности, отсюда следует, что $a(z) \in \Gamma_{\rho}^{m}(\mathbb{R}^N)$.

Описанный класс символов обладает свойствами, близкими к свойствам гипоэллиптических символов из § 5.

Определение 25.2. Через $HG_{\rho}^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^n)$ или $HG_{\rho}^{m,\,m_0}$ мы будем обозначать класс операторов $A$, задаваемых $\tau$-символом

$$b_{\tau} \in H\Gamma_{\rho}^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Ясно, что $HG_{\rho}^{m,\,m_0} \subset G_{\rho}^{m}$.

Для оправдания определения 25.2 необходимо

Предложение 25.1. *Если при каком-то одном $\tau$ верно, что $b_{\tau} \in H\Gamma_{\rho}^{m,\,m_0}$, то это верно и при всех остальных $\tau \in \mathbb{R}$.*

Доказательство опирается на теорему 23.3 и следующую лемму, доказываемую аналогично леммам 5.1—5.3 и предложениям 5.2—5.4.

Лемма 25.1. 1) *Классы* $H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^N)$ *обладают следующими свойствами*:

а) *если* $a(z)\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, *то* $a^{-1}\in H\Gamma_\rho^{-m_0,\,-m}$ $(|z|\geqslant R)$ *и* $(\partial^\alpha a)/a\in\Gamma_\rho^{-\rho|\alpha|}$ $(|z|\geqslant R)$;

б) *если* $a\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, $a'\in H\Gamma_\rho^{m',m_0'}$, *то* $aa'\in H\Gamma_\rho^{m+m',\,m_0+m_0'}$;

в) *если* $a(z)\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $r\in\Gamma_\rho^{m_1}$, *где* $m_1<m_0$, *то* $a+r\in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$.

2) *Классы* $HG_\rho^{m,\,m_0}$ *обладают следующими свойствами*:

г) *если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, $A'\in HG_\rho^{m',m_0'}$, *то* $A\circ A'\in HG_\rho^{m+m',\,m_0+m_0'}$;

д) *если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, *то* ${}^tA\in HG_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $A^*\in HG_\rho^{m,\,m_0}$;

е) *если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$ *и* $R\in G_\rho^{m_1}$, *где* $m_1<m_0$, *то* $A+R\in HG_\rho^{m,\,m_0}$.

Упражнение 25.1. Доказать лемму 25.1.

Упражнение 25.2. Доказать предложение 25.1.

**25.2. Параметрикс и регулярность.** Аналогично теореме 5.1 доказывается

Теорема 25.1. *Если* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$, *то существует такой оператор* $B\in HG_\rho^{-m_0,\,-m}$, *что*

$$BA=I+R_1,\quad AB=I+R_2, \tag{25.3}$$

*где* $R_j\in G^{-\infty}$, $j=1,\,2$.

*Далее, если* $B'\in G_\rho^{m'}$ — *другой оператор, для которого либо* $B'A-I\in G^{-\infty}$, *либо* $AB'-I\in G^{-\infty}$, *то* $B'-B\in G^{-\infty}$.

Упражнение 25.3. Доказать теорему 25.1.

Следствие 25.1. *Пусть* $A\in HG_\rho^{m,\,m_0}$. *Тогда верны следующие утверждения*:

а) *Если* $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $Au\in S(\mathbb{R}^n)$, *то* $u\in S(\mathbb{R}^n)$.

б) *Если* $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $Au\in C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$, *то* $u\in C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Доказательство очевидным образом получается из теоремы 25.1 и результатов п. 23.2. ■

**25.3. Пространства Соболева.** Рассмотрим при любом $s\in\mathbb{R}$ оператор $L_s$, отличающийся от оператора с левым символом $b(x,\,\xi)=(1+|\xi|^2+|x|^2)^{s/2}$ на оператор из $G_1^{s'}$ с $s'<s$.

Легко видеть, что $L_s\in HG_1^{s,\,s}$.

Определение 25.3. Пространство $Q^s=Q^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких обобщенных функций $u\in S'(\mathbb{R}^n)$, что $L_su\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично теоремам 7.1 и 7.2 доказывается

Теорема 25.2. 1) *Если* $A \in G_\rho^m$, *то оператор* $A$ *осуществляет отображение*

$$A\colon Q^s \to Q^{s-m}. \tag{25.4}$$

2) *Если* $A \in HG_\rho^{m, m_0}$, $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $Au \in Q^s$, *то* $u \in Q^{s+m_0}$.

Упражнение 25.4. Доказать теорему 25.2.

Поскольку класс $\bigcup\limits_m G_1^m$ содержит все дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами, то ясно, что из теоремы 25.2 вытекает

Следствие 25.2. $\bigcap\limits_s Q^s = S(\mathbb{R}^n)$, $\bigcup\limits_s Q^s = S'(\mathbb{R}^n)$.

Введем на $Q^s$ структуру гильбертова пространства. Заметим, что мы можем считать, что $L_{-s}$ — параметрикс оператора $L_s$ в смысле теоремы 25.1. Тогда

$$L_{-s}L_s = I + R_s, \qquad R_s \in G^{-\infty}.$$

Пусть $p > s$, $p$ — натуральное четное число. Положим

$$(u,\, v)_s = (L_s u,\, L_s v) + \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant p} (x^\alpha D^\beta R_s u,\, x^\alpha D^\beta R_s v). \tag{25.5}$$

Из представления

$$u = L_{-s}L_s u - R_s u \tag{25.6}$$

ясно, что формула (25.5) определяет на $Q^s$ предгильбертову структуру. Аналогично предложению 7.5 проверяется

Предложение 25.2. *Скалярное произведение* (25.5) *определяет на* $Q^s$ *структуру гильбертова пространства.*

Упражнение 25.5. Доказать предложение 25.2.

Наконец, аналогично рассуждениям § 7 доказываются следующие утверждения.

Предложение 25.3. *Скалярное произведение* $(u,\, v)$ *в* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *индуцирует двойственность между* $Q^s$ *и* $Q^{-s}$ (точная формулировка дается, как в теореме 7.7).

Предложение 25.4. *Оператор* $A \in G_\rho^m$ *продолжается до непрерывного оператора* $A\colon Q^s \to Q^{s-m}$ *и компактного оператора* $A\colon Q^s \to Q^{s-m-\varepsilon}$ *при* $\varepsilon > 0$.

*Оператор вложения* $Q^s \hookrightarrow Q^{s-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, *компактен при любом* $s \in \mathbb{R}$.

Упражнение 25.6. Доказать предложения 25.3 и 25.4.

**25.4. Фредгольмовость.** Аналогично теореме 8.1 доказывается

П р е д л о ж е н и е 25.5. *Если* $A \in HG_\rho^{m,m}$, *то* $A \in \operatorname{Fred}(Q^s, Q^{s-m})$ *при любом* $s \in \mathbb{R}$. *При этом* $\operatorname{Im}(A|_{Q^s})$ *в* $Q^{s-m}$ *является ортогональным дополнением к* $\operatorname{Ker} A^*$ *относительно скалярного произведения* $(\cdot, \cdot)$ *в* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что

$$\operatorname{Ker}(A|_{Q^s}) = \operatorname{Ker}(A|_{S'(\mathbb{R}^n)}) = \operatorname{Ker}(A|_{S(\mathbb{R}^n)}) \tag{25.7}$$

для любого $A \in HG_\rho^{m,m_0}$.

Чтобы распространить предложение 25.5 на операторы $A \in HG_\rho^{m,m_0}$, (с $m_0 < m$) необходимо рассматривать $A$ уже не как оператор из $Q^s$ в $Q^{s-m}$, а как оператор в топологических векторных пространствах $S(\mathbb{R}^n)$, $S'(\mathbb{R}^n)$ и т. п. или как неограниченный оператор

$$A_{s,s'}: Q^s \to Q^{s'}, \tag{25.8}$$

где $s' \geqslant s - m_0$, с областью определения $D_{A_{s,s'}}$, состоящей из тех $u \in Q^s$, для которых $Au \in Q^{s'}$.

О п р е д е л е н и е 25.4. Пусть $E_1$, $E_2$ — два топологических векторных пространства, $A$ — неограниченный оператор из $E_1$ в $E_2$ с областью определения $D_A$. Будем называть оператор $A$ *фредгольмовым*, если выполнены следующие условия:

а) $\dim \operatorname{Ker} A < +\infty$;

б) $\operatorname{Im} A$ — замкнутое подпространство в $E_2$;

в) $\dim \operatorname{Coker} A < +\infty$.

Т е о р е м а 25.3. 1) *Оператор* $A \in HG_\rho^{m,m_0}$ *определяет фредгольмовы операторы из* $S(\mathbb{R}^n)$ *в* $S(\mathbb{R}^n)$ *и из* $S'(\mathbb{R}^n)$ *в* $S'(\mathbb{R}^n)$.

2) *Операторы* $A_{s,s'}$ *вида* (25.8), *определяемые оператором* $A$, *при* $s' \geqslant s - m_0$ *также являются фредгольмовыми.*

З а м е ч а н и е 25.1. В пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$ мы будем рассматривать слабую топологию. Поскольку в определении 25.4 топология участвует лишь в п. б), ясно, что фредгольмовость будет и для всех более сильных топологий.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 25.3. Пусть двойственность между $S(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$ задана как продолжение скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что из теоремы 25.1 следует конечномерность $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$, так как благодаря включению

$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} BA \subset \operatorname{Ker}(I + R_1)$$

дело сводится к случаю $A = I + R_1$, в котором все очевидно. Теперь напишем включение

$$A(S'(\mathbb{R}^n)) \supset AB(S'(\mathbb{R}^n)) = (I + R_2)(S'(\mathbb{R}^n)).$$

Для оператора $I+R_2$ фредгольмовость на $S'(\mathbb{R}^n)$ вытекает из предложения 25.5. Поэтому подпространство $A(S'(\mathbb{R}^n))$ замкнуто в $S'(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{codim} A(S'(\mathbb{R}^n)) < +\infty$, что доказывает фредгольмовость $A$ в $(S'(\mathbb{R}^n))$.

Докажем фредгольмовость $A$ в $S(\mathbb{R}^n)$. Необходимо лишь проверить условия б) и в) определения 25.4. Мы покажем, что

$$A(S(\mathbb{R}^n)) = \{u\colon u \in S(\mathbb{R}^n),\ u \perp \operatorname{Ker} A^*\}, \tag{25.9}$$

где ортогональность понимается в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Заметим вначале, что

$$A(S'(\mathbb{R}^n)) = \{u\colon u \in S'(\mathbb{R}^n),\ u \perp \operatorname{Ker} A^*\}, \tag{25.10}$$

поскольку $A(S'(\mathbb{R}^n))$ замкнуто в $S'(\mathbb{R}^n)$, а $S(\mathbb{R}^n)$ — дуальное пространство к $S'(\mathbb{R}^n)$. Но теперь (25.9) вытекает из (25.10), потому что

$$A(S(\mathbb{R}^n)) = A(S'(\mathbb{R}^n)) \cap S(\mathbb{R}^n)$$

в силу следствия 25.1. Соотношение (25.9) доказывает фредгольмовость $A$ в $S(\mathbb{R}^n)$.

Проверим, наконец, фредгольмовость оператора $A_{s,\,s'}$ при $s \geqslant s - m_0$. Опять-таки остается проверить лишь, что

$$\operatorname{Im} A_{s,\,s'} = \{u\colon u \in Q^{s'},\ u \perp \operatorname{Ker} A^*\}. \tag{25.11}$$

Пусть $u \in Q^{s'}$, $u \in (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$. Тогда $u = Av$, где $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ в силу уже доказанного соотношения (25.10). Но из следствия 25.1 мы получаем тогда, что $v \in Q^{s'+m_0}$, значит, $v \in Q^s$, поскольку $s \leqslant s' + m_0$. Это доказывает (25.11). ■

Аналогично теореме 8.2 доказывается

Т е о р е м а 25.4. *Пусть* $A \in HG_\rho^{m,m_0}$ *и* $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^* = \{0\}$. *Тогда существует оператор* $A^{-1} = HG_\rho^{-m_0,-m}$, *обратный к оператору* $A$.

У п р а ж н е н и е 25.7. Доказать теорему 25.4.

З а д а ч а 25.1. Доказать фредгольмовость оператора $A \in HG_\rho^{m,m_0}$ в пространствах $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $C_t^\infty(\mathbb{R}^n)$.

З а д а ч а 25.2. Доказать, что если дифференциальный оператор $A$ с полиномиальными коэффициентами имеет $\tau$-символ $a(z)$, эллиптический по $z = (x, \xi)$, то символ его параметрикса $B$ допускает асимтотическое разложение по функциям, однородным по $z$ при $|z| \geqslant 1$.

## § 26. Существенная самосопряженность. Дискретность спектра

**26.1. Симметрические и самосопряженные операторы.** Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства, и пусть дан, вообще говоря, неограниченный линейный оператор

$$A\colon H_1 \to H_2. \tag{26.1}$$

Как обычно, через $D_A$ обозначается область определения оператора $A$ (подразумевается, что она задана вместе с оператором $A$, представляющим собой линейное отображение линейного многообразия $D_A$ в $H_2$; отметим, что запись (26.1) не означает, что оператор $A$ определен всюду на $H_1$). *Сопряженный оператор*

$$A^*\colon H_2 \to H_1. \tag{26.2}$$

мы считаем определенным, если $D_A$ плотно в $H_1$, и в этом случае $D_{A^*}$ состоит из тех $v \in H_2$, для которых существует такой вектор $g \in H_1$, что

$$(Au,\, v) = (u,\, g), \qquad u \in D_A \tag{26.3}$$

(в левой части (26.3) стоит скалярное произведение в $H_2$, а в правой — в $H_1$). При этом ясно, что вектор $g$ однозначно определен и по определению $A^*v = g$. В частности, имеет место тождество

$$(Au,\, v) = (u,\, A^*v), \qquad u \in D_A,\ v \in D_{A^*}. \tag{26.4}$$

Определение 26.1. Пусть $H$ — гильбертово пространство. Оператор $A\colon H \to H$ называется *симметрическим*, если

$$(Au,\, v) = (u,\, Av), \qquad u,\, v \in D_A. \tag{26.5}$$

Определение 26.2. Оператор $A\colon H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$.

Ясно, что самосопряженный оператор является симметрическим. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 26.3. Оператор $A\colon H_1 \to H_2$ называется *замкнутым*, если график $G_A$, состоящий из пар $\{u,\, Au\}$, где $u \in D_A$, представляет собой замкнутое подпространство в $H_1 \oplus H_2$.

Упражнение 26.1. Доказать, что если оператор $A^*$ определен, то он замкнут.

Упражнение 26.2. Пусть оператор $A$ ограничен, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Au\| \leqslant C\|u\|$, $u \in D_A$. Доказать, что $A$ замкнут тогда и только тогда, когда $D_A$ — замкнутое подпространство в $H_1$.

Известная теорема о замкнутом графике (см. Рудин [1]) утверждает, что если $D_A = H_1$ и оператор $A$ замкнут, то $A$ ограничен. Разумеется, то же самое верно, если $D_A$ — замкнутое подпространство в $H_1$.

Пусть дан оператор $A\colon H_1 \to H_2$. Будем говорить, что $A$ допускает *замыкание* $\bar{A}$, если замыкание $\bar{G}_A$ графика $G_A$ оператора $A$ снова является графиком некоторого (уже замкнутого) оператора, который и обозначается $\bar{A}$. В частности, замыкание допускают любые симметрические операторы $A\colon H \to H$ с плотной областью определения $D_A$. В самом деле, достаточно проверить, что если $u_n$ — такая последовательность векторов из $D_A$, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = f$, то $f = 0$. Но при $v \in D_A$ мы получаем

$$(f,\, v) = \lim_{n\to\infty} (Au_n,\, v) = \lim_{n\to\infty} (u_n,\, Av) = 0,$$

откуда $f = 0$. Отметим, что если $A$ — симметрический оператор, то оператор $\bar{A}$ также является симметрическим.

Определение 26.4. Оператор $A\colon H \to H$ называется *существенно самосопряженным*, если он имеет плотную в $H$ область определения и $\bar{A} = A^*$.

В частности, оператор $A^*$ является расширением $A$, и, значит, $A$ — симметрический оператор.

Критерий существенной самосопряженности дает

Теорема 26.1. *Симметрический оператор $A\colon H \to H$ с плотной областью определения является существенно самосопряженным тогда и только тогда, когда справедливы включения*

$$\operatorname{Ker}(A^* - iI) \subset D_{\bar{A}}, \tag{26.6}$$

$$\operatorname{Ker}(A^* + iI) \subset D_{\bar{A}}. \tag{26.6$'$}$$

Доказательство. 1. Необходимость условий (26.6) и (26.6$'$) очевидна. Для проверки их достаточности заметим прежде всего, что поскольку оператор $A^*$ является расширением $A$, то из условия (26.6) следует, что $\operatorname{Ker}(A^* - iI) = \operatorname{Ker}(\bar{A} - iI)$. Но $\operatorname{Ker}(\bar{A} - iI) = 0$ ввиду симметричности $\bar{A}$. Поэтому из условия (26.6) вытекает, что

$$\operatorname{Ker}(A^* - iI) = 0. \tag{26.7}$$

Аналогично из (26.6$'$) находим, что

$$\operatorname{Ker}(A^* + iI) = 0. \tag{26.7$'$}$$

2. Проверим, что оператор $(\bar{A} - iI)^{-1}$ (определенный на $(A - iI)(H)$) ограничен. Имеем

$$\|(\bar{A} - iI)f\|^2 = ((\bar{A} - iI)f,\ (\bar{A} - iI)\,f) = \|\bar{A}f\|^2 + \|f\|^2, \tag{26.8}$$

поскольку $(\bar{A}f,\, f)$ — вещественное число ввиду симметричности оператора $\bar{A}$. Из (26.8) следует, что $\|f\|^2 \leqslant \|\bar{A} - iI)f\|^2$, т. е.

$$\|(\bar{A} - iI)^{-1}g \leqslant \|g\|, \quad g \in (\bar{A} - iI)\,(H).$$

3. Ясно, что оператор $\bar{A} - iI$ замкнут. Поэтому замкнут и оператор $(\bar{A} - iI)^{-1}$, а поскольку оператор $(\bar{A} - iI)^{-1}$ ограничен, то его область

определения $(\bar{A}-iI)(H)$ замкнута в $H$. Но ортогональное дополнение к $(\bar{A}-iI)(H)$ равно, очевидно, $\operatorname{Ker}(\bar{A}-iI)^* = \operatorname{Ker}(A^*+iI)=0$. Поэтому оператор $(\bar{A}-iI)^{-1}$ всюду определен. По аналогичной причине всюду определен и оператор $(\bar{A}+iI)^{-1}$.

4. Проверим, что операторы $(\bar{A}-iI)^{-1}$ и $(\bar{A}+iI)^{-1}$ сопряжены друг к другу. Имеем, очевидно,

$$((\bar{A}-iI)\,u,\,v)=(u,\,(\bar{A}+iI)\,v),\qquad u,\,v\in D_{\bar{A}}.$$

Обозначая $(\bar{A}-iI)\,u=f$ и $(\bar{A}+iI)\,v=g$, мы получим требуемое соотношение

$$(f,\,(\bar{A}+iI)^{-1}g)=((\bar{A}-iI)^{-1}f,\,g),\qquad f,\,g\in H.$$

5. Проверим, наконец, что $\bar{A}=A^*$. Будем использовать следующий легко проверяемый факт: если $B$ — такой оператор в $H$, что определены $(B^{-1})^*$ и $(B^*)^{-1}$, то $(B^{-1})^*=(B^*)^{-1}$. Имеем:

$$A^*=\bar{A}^*=(\bar{A}+iI)^*+iI=\{[(\bar{A}+iI)^{-1}]^{-1}\}+iI=$$
$$=\{[(\bar{A}+iI)^{-1}]^*\}^{-1}+iI=[(\bar{A}-iI)^{-1}]^{-1}+iI=\bar{A}-iI+iI=\bar{A},$$

что и требовалось. ■

**26.2. Существенная самосопряженность симметрических гипоэллиптических операторов.** В этом пункте через $A^+$ мы будем обозначать оператор, формально сопряженный к оператору $A\in G^m_\rho$, т. е. такой оператор $A^+\in G^m_\rho$, что

$$(Au,\,v)=(u,\,A^+v),\qquad u,\,v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

В предыдущих параграфах вместо $A^+$ мы писали $A^*$, но здесь обозначение $A^*$ зарезервировано для сопряженного оператора в смысле п. 26.1.

Теорема 26.2. *Пусть $A\in HG^{m,m_0}_\rho$, где $m_0>0$, и $A^+=A$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R}^n)$ неограниченный оператор $A_0$, определяемый как оператор $A$ на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $A_0$ существенно самосопряжен и его замыкание совпадает с сужением оператора $A$ (определенного на $S'(\mathbb{R}^n)$) на множество*

$$D_{\bar{A}_0}=\{u\colon u\in L^2(\mathbb{R}^n),\ Au\in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{26.9}$$

Доказательство. 1. Обозначим временно через $D$ правую часть соотношения (26.9). Поскольку верно тождество

$$(Au,\,v)=(u,\,Av),\qquad u\in S(\mathbb{R}^n),\qquad v\in S'(\mathbb{R}^n), \tag{26.10}$$

то ясно, что $D \subset D_{A_0^*}$ и, кроме того,

$$A|_D = A_0^*|_D.$$

Проверим, что на самом деле $D = D_{A_0^*}$. Пусть $v \in D_{A_0^*}$, т. е. $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ верно тождество

$$(Au,\, v) = (u,\, f), \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{26.11}$$

Но из (26.10) следует, что то же тождество верно с заменой $f$ на $Av$. Поэтому $f = Av$, т. е. $v \in D$, что и требовалось. Итак, мы доказали, что правая часть (26.9) равна $D_{A_0^*}$.

2. Для того чтобы применить теперь теорему 26.1, проверим включение

$$\operatorname{Ker}(A_0^* - iI) \subset D_{\bar{A}_0}. \tag{26.12}$$

Из уже доказанного ясно, что

$$\operatorname{Ker}(A_0^* - iI) = \{u\colon u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ (A - iI)\,u = 0\}.$$

Но ввиду того, что $A - iI \in HG_\rho^{m,\,m_0}$, из следствия 25.1 вытекает, что $\operatorname{Ker}(A_0^* - iI) \subset S(\mathbb{R}^n)$, откуда и следует (26.12), поскольку оператор $A$ непрерывно отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $S(\mathbb{R}^n)$, а $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $S(\mathbb{R}^n)$. Аналогично доказываемое включение $\operatorname{Ker}(A_0^* + iI) \subset D_{\bar{A}_0}$ завершает доказательство теоремы 26.2. ■

**26.3. Дискретность спектра.**

Т е о р е м а 26.3. *Пусть $A \in HG_\rho^{m,\,m_0}$, где $m_0 > 0$, причем $A^+ = A$. Тогда оператор $A$ имеет дискретный спектр в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$, точнее, существует ортонормированный базис из собственных функций $\varphi_j(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$, с собственными значениями $\lambda_j \in \mathbb{R}$, причем $|\lambda_j| \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Спектр $\sigma(A)$ оператора $\bar{A}_0 = A_0^*$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ совпадает с множеством всех собственных значений $\{\lambda_j\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем действовать аналогично доказательству теоремы 8.3. В силу сепарабельности пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ существует число $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$. Но тогда из теоремы 25.4 следует, что $(A - \lambda_0 I)^{-1} \in HG_\rho^{-m_0,\,-m}$ и, в частности, $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ — компактный самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют доказательство теоремы 8.3. ■

З а д а ч а 26.1. Пусть оператор $A \in G_\rho^m$ таков, что существуют такие числа $\lambda_\pm \in \mathbb{C}$, что $\operatorname{Im} \lambda_+ > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_- < 0$,

$$(A - \lambda_+ I) \in HG_\rho^{m,\,m_0} \quad \text{и} \quad (A - \lambda_- I) \in HG_\rho^{m,\,m_0}$$

при некотором $m_0 \in \mathbb{R}$. Доказать, что если $A^+ = A$, то оператор существенно самосопряжен.

Задача 26.2. Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства, и пусть даны два таких оператора $A\colon H_1 \to H_2$ и $A^+\colon H_2 \to H_1$, что

$$(Au,\, v) = (u,\, A^+ v), \qquad u \in D_A, \;\; v \in D_{A^+}.$$

Доказать, что если оператор $A^+A$ существенно самосопряжен, то $\overline{A^+} = A^*$ и $\bar{A} = (A^+)^*$.

Указание. Рассмотрим в пространстве $H_1 \oplus H_2$ оператор, определяемый матрицей

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условия $\overline{A^+} = A^*$ и $\bar{A} = (A^+)^*$ равносильны его существенной самосопряженности. Вычислить $\operatorname{Ker}(\mathfrak{A} \pm iI)$.

Задача 26.3. Пусть $A \in HG_\rho^{m,\, m_0}$, $m_0 > 0$. Обозначим через $A_0^+$ оператор $A^+$, суженный на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что $\overline{A_0^+} = A_0^*$ и $\bar{A}_0 = (A_0^+)^*$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 26.2, предварительно продолжив операторы $A_0$ и $A_0^+$ на $S(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 26.1. Результат задачи 26.3 означает, что имеет место «совпадение сильного и слабого расширений» оператора $A \in HG_\rho^{m,\, m_0}$ при $m_0 > 0$: если $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то существует такая последовательность $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $u_j \to u$ и $Au_j \to Au$ при $j \to +\infty$ по норме пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Задача 26.4. Доказать для операторов $A \in HG_\rho^{m,\, m_0}$, $m_0 > 0$, аналог теоремы 8.4 об устройстве спектра, собственных и присоединенных функций.

Задача 26.5. Пусть оператор $A$ имеет антивиковский символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ и оператор $\bar{A}_0$ самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $a(z) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$. Доказать, что $A_0$ имеет дискретный спектр в смысле теоремы 26.3 и, более того, $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$.

Задача 26.6. Пусть оператор $A \in G_\rho^m$ таков, что оператор $A_0$ самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и имеет дискретный спектр, причем $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Пусть $c(z)$ — виковский символ оператора $A$. Доказать, что $c(z) \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$.

## § 27. След и ядерная норма

**27.1. Выражение следа и нормы Гильберта—Шмидта через символ.** Мы будем использовать здесь обозначения и факты, касающиеся операторов Гильберта—Шмидта и ядерных операторов и изложенные в добавлении 3.

Приведем вначале формальное выражение следа через $\tau$-символ. Пусть $A \in G_\rho^m$, $b_\tau(x,\xi)$ — $\tau$-символ оператора $A$, $K_A$ — его ядро. Формально имеем

$$K_A(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y, \xi)\, d\!\!{}^-\xi, \tag{27.1}$$

откуда

$$K_A(x, x) = \int b_\tau(x, \xi)\, d\!\!{}^-\xi$$

и

$$\operatorname{Sp} A = \int b_\tau(x, \xi)\, dx\, d\!\!{}^-\xi. \tag{27.2}$$

Отметим, что, в частности, формула (27.2) означает, что правая ее часть не зависит от $\tau$.

Проведем теперь формальное вычисление нормы Гильберта—Шмидта, основанное на предложении Д3.2 и формуле (27.1). Имеем

$$\|A\|_2^2 = \int |K_A(x, y)|^2 dx\, dy = \int |K_A(x, x+z)|^2 dx\, dz. \tag{27.3}$$

Но

$$K_A(x, x+z) = \int e^{-iz\cdot\xi} b_\tau(x+\tau z, \xi)\, d\!\!{}^-\xi. \tag{27.4}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int |K_A(x, x+z)|^2 dx\, dz &= \int K_A(x, x+z)\,\overline{K_A(x, x+z)}\, dx\, dz = \\ &= \int e^{iz\cdot(\eta-\xi)} b_\tau(x+\tau z, \xi)\,\overline{b_\tau(x+\tau z, \eta)}\, d\!\!{}^-\xi\, d\!\!{}^-\eta\, dx\, dz = \\ &= \int e^{iz\cdot(\eta-\xi)} b_\tau(x, \xi)\,\overline{b_\tau(x, \eta)}\, d\!\!{}^-\xi\, d\!\!{}^-\eta\, dx\, dz = \\ &= \int \left| \int e^{-iz\cdot\xi} b_\tau(x, \xi)\, d\!\!{}^-\xi \right|^2 dx\, dz = \int |b_\tau(x, \xi)|^2\, d\!\!{}^-\xi\, dx \end{aligned} \tag{27.5}$$

(мы использовали здесь инвариантность интеграла относительно сдвигов и равенство Парсеваля для преобразования Фурье). Окончательно получаем

$$\|A\|_2^2 = \int |b_\tau(x, \xi)|^2 dx\, d\!\!{}^-\xi, \tag{27.6}$$

где правая часть опять-таки не зависит от $\tau$. Теперь мы легко сможем доказать

Предложение 27.1. *Соответствие между операторами $A \in G^{-\infty}$ и $\tau$-символами $b_\tau \in S(\mathbb{R}^{2n})$ продолжается по непрерывности до* *изометрии $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ и $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, причем так, что выполнена формула (27.6). При этом, если $A \in G_\rho^m$, то условие $A \in S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ равносильно тому, что при некотором $\tau$ будет $b_\tau \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, и тогда это включение верно при всех $\tau$, причем справедлива формула (27.6).*

Доказательство. Выкладки (27.3)—(27.6) законны при $A \in G^{-\infty}$ или, что то же самое, при $K_A \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Поскольку $G^{-\infty}$ плотно в $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$, а $S(\mathbb{R}^{2n})$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, очевидны существование и единственность требуемой изометрии. Наконец, последнее утверждение очевидно из единственности $\tau$-символа. ■

Следствие 27.1. *Если $A \in G_\rho^m$ и $m < -n$, то $A \in S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Предложение 27.2. 1) *Если $A \in G_\rho^m$ и $m < -2n$, то $A \in S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ и для любых фиксированных $m < -2n$ и $\tau \in \mathbb{R}$ существуют такие постоянные $C$ и $N$, что верна оценка*

$$\|A\|_1 \leqslant C \sum_{|\gamma| \leqslant N} \sup_z \{ |\partial_z^\gamma b_\tau(z)| \langle z \rangle^{-m+\rho|\gamma|} \}. \tag{27.7}$$

2) *При $A \in G_\rho^m$, $m < -2n$, для следа* Sp $A$ *при любом $\tau \in \mathbb{R}$ верна формула (27.2).*

Доказательство. 1) Выберем какой-нибудь оператор $P \in HG_\rho^{m/2, m/2}$, для которого Ker $P =$ Ker $P^* = 0$, так что существует оператор $P^{-1} \in HG_\rho^{-m/2, -m/2}$ (существование оператора $P$ указанного вида следует, например, из теоремы 26.3). В силу следствия 27.1 мы имеем $P^2 \in S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$. Но из очевидного представления $A = P^2(P^{-2}A)$ ввиду включения $P^{-2}A \in G_\rho^0 \subset \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ вытекает, что $A \in S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$. Таким образом, доказано включение

$$G_\rho^m \subset S_1(L^2(\mathbb{R}^n)), \quad m < -2n. \tag{27.8}$$

Докажем теперь оценку (27.7). Она может быть получена двумя способами: непосредственным уточнением проведенных рассуждений (из аналогичных оценок в формуле композиции и в теореме об ограниченности) или из теоремы о замкнутом графике. Последний путь короче и является общим местом многих рассуждений такого типа, хотя и более груб. Проведем аккуратно соответствующие рассуждения.

Введем в пространстве $G_\rho^m$ топологию пространства Фреше, определяемую полунормами вида

$$\|A\|_{(N)} = \sum_{|\gamma| \leqslant N} \sup_z \{ |\partial_z^\gamma b_\tau(z)| \langle z \rangle^{-m+\rho|\gamma|} \}. \tag{27.9}$$

Нам нужно доказать, что если в $S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ рассматривать естественную банахову топологию, то вложение (27.8) непрерывно. Для этого в силу теоремы о замкнутом графике (см., например, Рудин [1]) достаточно показать, что это вложение имеет замкнутый график. Последнее удобнее всего доказывать, построив такое хаусдорфово пространство $M$, что

$$G_\rho^m \subset S_1(L^2(\mathbb{R}^n)) \subset M \tag{27.10}$$

и оба вложения $G_\rho^m \subset M$ и $S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ непрерывны. Но в качестве $M$ можно взять, например, $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$, поскольку непрерывность вложений $G_\rho^m$ и $S_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ в $S_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ следует из предложений 27.1 (формула (27.6) и Д3.7 (оценка (Д3.29)).

2) Докажем теперь формулу (27.2) при $A \in G_\rho^m$, $m < -2n$. Заметим, что обе ее части непрерывны на $G_\rho^m$. Но при любом $m' > m$ пространство $G^{-\infty}$ плотно в $G_\rho^m$ по топологии $G_\rho^{m'}$. Поэтому формулу (27.2) достаточно доказать при $A \in G^{-\infty}$.

Мы хотим провести аккуратно рассуждения из п. Д3.5. Это банально делается, если представить оператор $A$ в виде $A = L_1 L_2$ где операторы $L_1$ и $L_2$ имеют ядра, имеющих достаточно большое число непрерывных и быстро убывающих производных. Но последнее представление строится аналогично рассуждениям из п. 1) этого доказательства. ■

**27.2. Более точная оценка ядерной нормы через $\tau$-символ.** Оценка (27.7) неудобна тем, что содержит растущий по $z$ вес. В то же время $\|A\|_1$ не меняется при сдвиге $\tau$-символа на некоторый вектор $z_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. В самом деле, если $b_\tau(x, \xi)$ — $\tau$-символ оператора $A$, а через $A_{z_0}$ обозначен оператор с $\tau$-символом $b_\tau(x - x_0, \xi - \xi_0)$, то мы имеем

$$A_{z_0} u(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,x + \tau y - x_0,\, \xi - \xi_0)\, u(y)\, dy\, đ\xi =$$
$$= \int e^{i[(x-x_0)-(y-x_0)]\cdot\xi} b_\tau((1-\tau)\,(x - x_0) +$$
$$+ \tau(y - x_0),\, \xi - \xi_0)\, u((y - x_0) + x_0)\, dy\, đ\xi =$$
$$= \int e^{i\xi_0\cdot(x'-y')} e^{i(x'-y')\cdot\xi'} b_\tau((1-\tau)\,x' + \tau y',\, \xi')\, u(y' + x_0)\, dy'\, đ\xi',$$

где $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $\xi' = \xi - \xi_0$. Обозначая через $U$ унитарный оператор, переводящий $u(x)$ в $(Uu)\,(x) = e^{-i\xi_0\cdot x} u(x + x_0)$, мы видим, что $A_{z_0} = U^{-1} A U$, откуда

$$\|A_{z_0}\|_1 = \|A\|_1. \tag{27.11}$$

Оценку ядерной нормы, инвариантную относительно сдвига $\tau$-символа, дает следующее

Предложение 27.3. *Существуют такие постоянные $C$ и $N$, что при $A \in G_\rho^m$, $m < -2n$, выполнена оценка*

$$\|A\|_1 \leqslant C \sum_{|\gamma| \leqslant N} \int |\partial_z^\gamma b_\tau(z)|\, dz. \tag{27.12}$$

Доказательство. Достаточно доказать оценку (27.12) в случае, когда $b_\tau(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Пусть вначале

$$\operatorname{supp} b_\tau \subset \{z\colon |z| \leqslant R_0\}, \tag{27.13}$$

где $R_0$ — некоторая фиксированная постоянная. Тогда из предложения 27.2 следует, что существуют такие постоянные $C_1$ и $M$ (зависящие от $R_0$), что

$$\|A\|_1 \leqslant C_1 \sum_{|\gamma| \leqslant N} \sup_z |\partial_z^\gamma b_\tau(z)|. \tag{27.14}$$

Но поскольку при $b(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$b(z) = \int\limits_{\substack{t_j \leqslant z_j \\ j=1,\ldots,2n}} \frac{\partial^{2n} b}{\partial z_1 \ldots \partial z_{2n}}(t_1, \ldots, t_{2n})\, dt_1 \ldots dt_{2n}$$

и, следовательно,

$$\sup_z |b(z)| \leqslant \int \left| \frac{\partial^{2n} b(z)}{\partial z_1 \ldots \partial z_{2n}} \right| dz,$$

то из оценки (27.14) следует оценка (27.12) (с $N = M + 2n$) при условии, что выполнено (27.13).

Теперь, пользуясь инвариантностью ядерной нормы (формула (27.11)) и инвариантностью правой части (27.12) относительно сдвигов $b_\tau(z)$ по $z$, мы видим, что оценка (27.12) верна всегда и с одними и теми же $C$ и $N$, если только выполнено условие

$$\operatorname{diam} \operatorname{supp} b_\tau \leqslant R_0. \tag{27.15}$$

Избавимся, наконец, от условия (27.15). Сделаем такое разбиение единицы $1 \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)$, что $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \varphi_j \leqslant R_0$, существует такое число $l$, что любой шар радиуса 1 пересекается не более чем с $l$ множествами $\operatorname{supp} \varphi_j$, и, кроме того, $|\partial^\gamma \varphi_j(z)| \leqslant C_\gamma$, $j = 1, 2, \ldots$, где постоянные $C_\gamma$

не зависят от $j$. Вводя оператор $A_j$ с $\tau$-символом $\varphi_j(z)b_\tau(z)$, мы получим

$$\|A\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_1 \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|\leqslant N} \int |\, \partial_z^\gamma(\varphi_j b_\tau)(z)\,|\, dz \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{|\gamma|\leqslant N} \int |\, \partial_z^\gamma b_\tau(z)\,|\, dz,$$

что и требовалось. ■

Задача 27.1. Пусть оператор $A$ задан антивиковским символом $a(z) \in \Gamma_\rho^m$. Доказать, что

$$\|A\|_1 \leqslant \int |\, a(x,\xi)\,|\, dx\, d\xi.$$

Задача 27.2. Пусть $c(z)$ — виковский символ оператора $A \in G_\rho^m$. Доказать, что

$$\int |\, c(x,\xi)\,|\, dx\, d\xi \leqslant \|A\|_1.$$

Указание. Использовать полярное разложение $A$ и результат задачи 24.5.

Задача 27.3. Пусть оператор $A$ имеет антивиковский символ $a(z) \in \Gamma_\rho^m$, $m < -2n$. Доказать, что

$$\operatorname{Sp} A = \int a(x,\xi)\, dx\, d\xi.$$

Задача 27.4. Пусть $A \in G_\rho^m$, $m < -2n$, $c(z)$ — виковский символ оператора $A$. Доказать, что

$$\operatorname{Sp} A = \int c(x,\xi)\, dx\, d\xi.$$

Задача 27.5. Пусть $M$ — замкнутое $n$-мерное многообразие, $A \in L_{\rho,\delta}^m(M)$, $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. Доказать, что если $m < -n/2$, то $A \in S_2(L^2(M))$, а если $m < -n$, то $A \in S_1(L^2(M))$.

## § 28. Приближенный спектральный проектор

**28.1. Лемма Глазмана.** В этом параграфе мы опишем абстрактную схему еще одного метода получения асимптотики собственных значений, основанную на построении приближенного спектрального проектора. В основе этого метода лежит следующая известная вариационная лемма Глазмана.

Лемма 28.1. *Пусть $A$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве $H$ с дискретным спектром, т. е. $A$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов $e_1, e_2, \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.*

*Пусть $N(\lambda)$ — количество собственных значений оператора $A$, не превосходящих $\lambda$ (с учетом кратности).*

*Тогда*

$$N(\lambda) = \sup_{\substack{L \subset D_A \\ (Au,u) \leqslant \lambda(u,u),\, u \in L}} \dim L \tag{28.1}$$

*($L$ — линейное подмногообразие в $D_A$).*

Доказательство. Пусть $E_\lambda$ — спектральный проектор оператора $A$. Поскольку

$$\dim(E_\lambda H) = \mathrm{Sp}\ E_\lambda = N(\lambda), \tag{28.2}$$

то, полагая $L = E_\lambda H$, мы видим, что правая часть в (28.1) не меньше, чем левая.

Докажем теперь, что правая часть в (28.1) не больше, чем левая. Пусть линейное многообразие $L \subset D_A$ таково, что

$$(Au,\, u) \leqslant \lambda(u,\, u), \quad u \in L. \tag{28.3}$$

Поскольку

$$(Au,\, u) > \lambda(u,\, u), \quad u \in (I - E_\lambda)\, H \backslash 0, \tag{28.4}$$

то из (28.3) следует, что

$$L \cap (I - E_\lambda)\, H = 0.$$

Но тогда оператор $E_\lambda$ мономорфно отображает $L$ в $E_\lambda H$, откуда

$$\dim L \leqslant N(\lambda),$$

что и требовалось. ■

**28.2. Свойства спектральных проекторов.** Спектральные проекторы $E_\lambda$ обладают следующими свойствами:

1) $E_\lambda^* = E_\lambda$;
2) $E_\lambda^2 = E_\lambda$;
3) $E_\lambda(A - \lambda I)\, E_\lambda \leqslant 0$;
4) $(I - E_\lambda)\,(A - \lambda I)\,(I - E_\lambda) > 0$

(это означает, что соответствующая квадратичная форма строго больше 0 на ненулевых векторах, принадлежащих $D_A$);

5) $\mathrm{Sp}\ E_\lambda = N(\lambda)$.

Идейной основой последующего будет служить

Предложение 28.1. *Пусть $E'_\lambda$ — некоторое семейство операторов, для которого $E'_\lambda H \subset D_A$ и выполнены условия* 1)—4). *Тогда для него выполнено и условие* 5), *т. е.*

$$\mathrm{Sp}\ E'_\lambda = N(\lambda) = \mathrm{Sp}\ E_\lambda. \tag{28.5}$$

Доказательство. Из 1), 2) следует, что $E'_\lambda$ — ортогональный проектор. Положим $L_\lambda = E'_\lambda H$, $M_\lambda = (I - E'_\lambda)\,H$. Имеем в силу 3) $(Au, u) \leqslant \lambda(u, u)$, $u \in L_\lambda$, откуда по лемме 28.1 $\mathrm{Sp}\ E'_\lambda = \dim\ L_\lambda \leqslant N(\lambda)$. Далее, из 4) вытекает, что $(E_\lambda H) \cap M_\lambda = 0$, откуда $\dim\,(E_\lambda H) = N(\lambda) \leqslant \leqslant \dim\ L_\lambda = \mathrm{Sp}\ E'_\lambda$, что и доказывает (28.5). ■

Замечание 28.1. Отметим, что в условиях предложения 28.1 вовсе не обязательно $E'_\lambda = E_\lambda$ (см. задачу 28.1).

**28.3. Приближенный спектральный проектор.**

Теорема 28.1. *Пусть $A$ — такой оператор, как в лемме* 28.1, *и пусть существует такое семейство операторов $\{\mathscr{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, что $\mathscr{E}_\lambda H \subset D_A$ и при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ выполнены условия*:

1°. $\mathscr{E}^*_\lambda = \mathscr{E}_\lambda$;

2°. *$\mathscr{E}_\lambda$ — ядерный оператор и при $\lambda \to +\infty$*

$$\|\mathscr{E}^2_\lambda - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(V(\lambda) \cdot \lambda^{-\delta}), \tag{28.6}$$

*где $V(\lambda)$ — некоторая положительная неубывающая функция, определенная при $\lambda \geqslant \lambda_0$*;

3°. $\mathscr{E}_\lambda(A - \lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda \leqslant C\lambda^{1-\varepsilon}$;

4°. $(I - \mathscr{E}_\lambda)\,(A - \lambda I)\,(I - \mathscr{E}_\lambda) \geqslant -C\lambda^{1-\varepsilon}$;

5°. $\mathrm{Sp}\ \mathscr{E}_\lambda = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta}))$ *при $\lambda \to +\infty$.*

*Предположим еще, что функция $V(\lambda)$, участвующая в формулировке* пп. 2° *и* 5°, *такова, что при $\lambda \to +\infty$*

$$[V(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}) - V(\lambda)]/V(\lambda) = O(\lambda^{-\delta}) \tag{28.7}$$

*для любого $C > 0$.*

*Тогда при $\lambda \to \infty$*

$$N(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.8}$$

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы использовать лемму 28.1 в применении к линейному многообразию $L$, натянутому на собственные векторы оператора $\mathscr{E}_\lambda$ с собственными значениями, близкими к 1 (все они близки к 0 или к 1, как будет видно из дальнейшего).

Пусть $\alpha_j$ — собственные значения оператора $\mathscr{E}_\lambda$. Они вещественны в силу 1° и благодаря 2° и 5° удовлетворяют условиям

$$\sum_j |\alpha_j^2 - \alpha_j| = O(\lambda^{-\delta} V(\lambda)),$$
$$\sum_j \alpha_j = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.9}$$

Л е м м а 28.2.

$$\sum_{|\alpha_j - 1| \leqslant 1/2} \alpha_j = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $|\alpha_j - 1| > 1/2$ имеем $|\alpha_j^2 - \alpha_j| = |\alpha_j|\,|\alpha_j - 1| \geqslant |\alpha_j|/2$. Поэтому

$$\sum_{|\alpha_j - 1| > 1/2} |\alpha_j| \leqslant 2 \sum_{|\alpha_j - 1| > 1/2} |\alpha_j^2 - \alpha_j| \leqslant 2 \sum_j |\alpha_j^2 - \alpha_j| = O(\lambda^{-\delta} V(\lambda)).$$

Отсюда и из (28.9) следует (28.10). ■

Л е м м а 28.3. *Пусть* $\tilde{N}(\lambda)$ — *число собственных значений* $\mathscr{E}_\lambda$, *лежащих на* $[1/2,\, 3/2]$. *Тогда*

$$\tilde{N}(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})). \tag{28.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varepsilon_j = 1 - \alpha_j$. Тогда условие 2° можно записать в виде

$$\sum_j |\varepsilon_j^2 - \varepsilon_j| = O(\lambda^{-\delta} V(\lambda)), \tag{28.12}$$

а утверждение леммы 28.2 дает

$$\sum_{|\varepsilon_j| \leqslant 1/2} (1 - \varepsilon_j) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})),$$

или

$$\tilde{N}(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})) + \sum_{|\varepsilon_j| \leqslant 1/2} \varepsilon_j.$$

Но, как и в лемме 28.2, из (28.12) следует, что

$$\sum_{|\varepsilon_j| \leqslant 1/2} |\varepsilon_j| \leqslant 2 \sum_{|\varepsilon_j| \leqslant 1/2} |\varepsilon_j^2 - \varepsilon_j| = O(\lambda^{-\delta} V(\lambda)),$$

что и дает (28.11). ■

Продолжим доказательство теоремы 28.1.

а) Пусть $L_\lambda$ — линейное многообразие, натянутое на собственные векторы $\mathscr{E}_\lambda$ с такими собственными значениями $\alpha_j$, что $|\alpha_j - 1| \leqslant 1/2$, так что

$$\tilde{N}(\lambda) = \dim L_\lambda = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})) \tag{28.13}$$

по лемме 28.3. Условие 3° означает, что

$$(\mathscr{E}_\lambda (A - \lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda u,\, u) \leqslant C\lambda^{1-\varepsilon}(u,\, u), \quad u \in H. \tag{28.14}$$

Но, поскольку

$$(u,\, u) \leqslant 4(\mathscr{E}_\lambda u,\, \mathscr{E}_\lambda u), \quad u \in L_\lambda. \tag{28.15}$$

из (28.14) следует, что

$$([A - (\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon})\, I]\,\mathscr{E}_\lambda u,\, \mathscr{E}_\lambda u) \leqslant 0, \quad u \in L_\lambda.$$

Так как оператор $\mathscr{E}_\lambda$ осуществляет изоморфизм $L_\lambda$ на себя, отсюда следует, что

$$([A - (\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon})\, I]\, v,\, v) \leqslant 0, \quad v \in L_\lambda.$$

Но отсюда по лемме 28.1 получаем

$$\tilde{N}(\lambda) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{-\delta})) \leqslant N(\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon}).$$

Полагая $\lambda + 4C\lambda^{1-\varepsilon}t$, мы получим $t = \lambda(1 + O(\lambda^{-\varepsilon}))$, откуда $\lambda = t(1 + O(t^{-\varepsilon}))$ и, значит,

$$V(t(1 + O(t^{-\varepsilon})))\,(1 + O(t^{-\delta})) \leqslant N(t).$$

Пользуясь условием (28.7), мы видим, что

$$V(t(1 + O(t^{-\varepsilon}))) = V(t)\,(1 + O(t^{-\delta})),$$

откуда

$$V(t)\,(1 + O(t^{-\delta})) \leqslant N(t). \tag{28.16}$$

б) Пусть $M_\lambda = (L_\lambda)^\perp$. Имеем, очевидно,

$$(u,\, u) \leqslant 4((I - \mathscr{E}_\lambda)\, u,\, (I - \mathscr{E}_\lambda)\, u), \quad u \in M_\lambda. \tag{28.17}$$

Поэтому из условия 4° вытекает, что

$$([A - (\lambda - 4C\lambda^{1-\varepsilon})\, I]\, v,\, v) \geqslant 0, \quad v \in D_A \cap M_\lambda. \tag{28.18}$$

Из условия (28.18) вытекает, что для любого $\varepsilon' > 0$

$$(E_{\lambda - 4C\lambda^{1-\varepsilon} - \varepsilon'} H) \cap M_\lambda = 0,$$

откуда, аналогичяо рассуждению из доказательства леммы 28.1, мы находим, что

$$\tilde{N}(\lambda) \geqslant N(\lambda - 4C\lambda^{1-\varepsilon} - \varepsilon').$$

Теперь, рассуждая, как и в п. а), мы получаем, что

$$N(t) \leqslant V(t)\,(1 + O(t^{-\delta})). \tag{28.19}$$

Оценки (28.16) и (28.19) дают вместе требуемую асимптотику (28.8). ■

**28.4. Достаточное условие на $V(\lambda)$.** Условие (28.7) выглядит трудно проверяемым. Поэтому мы дадим более простое достаточное условие.

Предложение 28.2. *Пусть $V(\lambda)$ — положительная неубывающая функция, определенная и дифференцируемая при $\lambda \geqslant \lambda_0$. Предположим, что*

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varepsilon - \delta - 1}). \tag{28.20}$$

*Тогда $V(\lambda)$ удовлетворяет условию* (28.7).

Пример 28.1. Функция $V(\lambda) = \lambda^{\alpha}$, где $\alpha > 0$, удовлетворяет условию (28.20) при $\varepsilon \geqslant \delta$.

Доказательство предложения 28.2. Положим

$$\varphi(\lambda) = V'(\lambda)/V(\lambda).$$

Тогда

$$V(\lambda) = V(\lambda_0)\,\exp\left(\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \varphi(\tau)\,d\tau\right).$$

Отсюда

$$V(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}) - V(\lambda) =$$
$$= V(\lambda_0)\left\{\exp\left(\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - \exp\left(\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \varphi(\tau)\,d\tau\right)\right\} =$$
$$= V(\lambda)\left\{\exp\left(\int\limits_{\lambda}^{\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - 1\right\}. \tag{28.21}$$

Так как $|\varphi(\lambda)| \leqslant C\lambda^{\varepsilon-\delta-1}$, то при $\varepsilon \neq \delta$ мы получаем

$$\int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant C_1 \int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \tau^{\varepsilon-\delta-1} d\tau = C_2[(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon})^{\varepsilon-\delta} - \lambda^{\varepsilon-\delta}] =$$
$$= C_2\lambda^{\varepsilon-\delta}[(1 + C\lambda^{-\varepsilon})^{\varepsilon-\delta} - 1] \leqslant C_3\lambda^{\varepsilon-\delta} \cdot \lambda^{-\varepsilon} = C_3\lambda^{-\delta}.$$

При $\varepsilon = \delta$ получается та же самая оценка:

$$\int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant C_1 \int\limits_{\lambda}^{\lambda+C\lambda^{1-\varepsilon}} \tau^{-1} d\tau = C_1 \ln(1 + C\lambda^{-\varepsilon}) \leqslant C_2\lambda^{-\varepsilon} = C_2\lambda^{-\delta}.$$

Из (28.21) теперь следует, что

$$V(\lambda + C\lambda^{1-\varepsilon}) - V(\lambda) \leqslant CV(\lambda) \cdot \lambda^{-\delta}$$

(мы воспользовались тем, что $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$), но это и есть требуемое неравенство (28.7). ■

**28.5. Идея применения теоремы 28.1 (эвристический набросок).** Пусть оператор $A$ имеет вейлевский символ $b(z)$, $z \in \mathbb{R}^{2n}$. Положим

$$V(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{b(z)<\lambda} dz. \qquad (28.22)$$

Спектральный проектор $E_\lambda$ оператора $A$ — это оператор $\chi_\lambda(A)$, где $\chi_\lambda(\cdot)$ — характеристическая функция луча $(-\infty, \lambda]$. Рассмотрим оператор $\mathscr{E}_\lambda$ с вейлевским символом $\chi_\lambda(b(\cdot))$. Естественно ожидать, что оператор $\mathscr{E}_\lambda$ должен при больших $\lambda$ имитировать спектральный проектор $E_\lambda$. Остается заметить, что

$$\operatorname{Sp} \mathscr{E}_\lambda = (2\pi)^{-n} \int \chi_\lambda(b(z))\,dz = V(\lambda).$$

Техническая реализация этой идеи состоит в применении теоремы 28.1, однако ввиду необходимости рассматривать композиции операторов мы должны сгладить характеристическую функцию $\chi_\lambda$. Вообще мы приходим здесь к необходимости рассматривать псевдодифференциальные операторы с параметром, дающие возможность проверить свойства 1°—5°.

**28.6. Точная конструкция.** Введем такую функцию $\chi(t, \lambda, \varkappa)$, $t$, $\lambda$, $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 1$, $\varkappa > 0$, что

$$\chi(t, \lambda, \varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant \lambda + 2\varkappa \end{cases} \qquad (28.23)$$

и выполнены оценки производных

$$|(\partial/\partial t)^k \chi(t,\,\lambda,\,\varkappa)| \leqslant C_k \varkappa^{-k}. \tag{28.24}$$

Существование функции $\chi(t,\,\lambda,\,\varkappa)$ легко проверяется, например, следующим образом. Пусть $\psi(t,\,\lambda,\,\varkappa)$ — характеристическая функция множества $\{(t,\,\lambda,\,\varkappa)\colon t \leqslant \lambda+\varkappa\}$. Тогда можно положить

$$\chi(t,\,\lambda,\,\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}\int \psi(\tau,\,\lambda,\,\varkappa)\,\chi_0((t-\tau)/\varkappa)\,d\tau,$$

где $\chi_0(\nu) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\chi_0(\nu)=0$ при $|\nu| \geqslant 1$ и $\int \chi_0(\nu)\,d\nu = 1$.

Пусть теперь оператор $A$ имеет вещественный вейлевский символ

$$b(z) \in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}(\mathbb{R}^{2n}), \qquad m_0 > 0, \tag{28.25}$$

причем при некоторых $C>0$ и $R_0>0$

$$b(z) \geqslant C|z|^{m_0}, \qquad |z| \geqslant R_0 \tag{28.26}$$

(из (28.25) следует, что (28.26) верно либо для $b(z)$, либо для $-b(z)$; мы фиксируем знак так, чтобы оператор $A$ оказался полуограгиченным снизу, — этот факт будет ясен из дальнейшего).

Положим

$$e(z,\,\lambda,\,\varkappa) = \chi(b(z),\,\lambda,\,\varkappa) \tag{28.27}$$

и теперь, выбирая $\varkappa = \lambda^{1-\nu}$, где $\nu>0$, мы определим оператор $\mathscr{E}_\lambda$ как оператор с вейлевским символом

$$e(z,\,\lambda) = \chi(b(z),\,\lambda,\,\lambda^{1-\nu}), \tag{28.28}$$

где число $\nu>0$ будет выбрано позже. Заметим сразу же, что

$$e(z,\,\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad b(z) \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad b(z) \geqslant \lambda + 2\lambda^{1-\nu}. \end{cases} \tag{28.29}$$

Попытаемся написать оценки производных по $z$ для $e(z,\,\lambda)$.

Заметим, что оценки класса $H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$ при $m_0>0$ могут быть записаны в виде

$$|\partial^\gamma b(z)| \leqslant C_\gamma b(z)^{1-\rho'|\gamma|}, \qquad \rho'>0, \qquad |z| \geqslant R_0, \tag{28.30}$$

где в качестве $\rho'$ можно взять, например, $\rho' = \rho/m$, но, быть может, возможно и большее значение.

Дифференцируем теперь (28.28):

$$\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda) = \sum_{\substack{\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\gamma \\ |\gamma_j|>0}} c_{\gamma_1\ldots\gamma_k}(\partial^{\gamma_1} b(z)\ldots(\partial^{\gamma_k} b(z))\Big(\frac{\partial^k\chi}{\partial t^k}(t,\,\lambda,\,\lambda^{1-\nu})\Big|_{t=b(z)}\Big), \tag{28.31}$$

где суммирование ведется по всевозможным разбиениям $\gamma$ в сумму $\gamma_1+\ldots+\gamma_k$ с произвольным числом слагаемых $k\leqslant|\gamma|$.

Из (28.31), (28.30) и (28.24) вытекает, что

$$|\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)|\leqslant C_\gamma b(z)^{k-\rho'|\gamma|}\cdot\lambda^{-k(1-\nu)}. \tag{28.32}$$

Благодаря же (28.29) мы можем заменить $\lambda$ на $b(z)$ и переписать (28.32) в виде

$$|\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)|\leqslant C_\gamma b(z)^{(\mu-\rho')|\gamma|}\cdot\lambda^{k\nu-\mu|\gamma|}. \tag{28.33}$$

где $\mu$ — любое вещественное число.

Поскольку $k\leqslant|\gamma|$, то отсюда следует, что

$$|\partial_z^\gamma e(z,\,\lambda)|\leqslant C_\gamma b(z)^{(\mu-\rho')|\gamma|}\cdot\lambda^{(\nu-\mu)|\gamma|}. \tag{28.34}$$

Эти оценки верны при $\lambda\geqslant1$ и при $|z|\geqslant R_0$. Кроме того, мы имеем очевидные соотношения

$$|e(z,\,\lambda)|\leqslant C,\quad |z|\leqslant R_0, \tag{28.35}$$

$$\partial^\gamma e(z,\,\lambda)=0,\quad |z|\leqslant R_0,\quad \lambda\geqslant\lambda_0, \tag{28.36}$$

если $\lambda_0$ достаточно велико.

Из (28.34) ясно, что выгодно взять $\mu$ таким, что $\nu<\mu<\rho'$, откуда вытекает необходимость выбирать такое $\nu$, что $\nu<\rho'$, что и будет предполагаться в дальнейшем. При некоторых дополнительных условиях это обеспечит и применимость теоремы 28.1.

**28.7. Поверхности уровня символа и свойства $V(\lambda)$.** В этом пункте мы считаем, что множество уровня $\{z\colon b(z)=\lambda\}$ при больших $\lambda$ является гладкой гиперповерхностью и, более того, что

$$\nabla b(z)\neq0\quad\text{при}\quad|z|\geqslant R_0, \tag{28.37}$$

где $\nabla b(z)=\Big(\dfrac{\partial b}{\partial z_1},\,\ldots,\,\dfrac{\partial b}{\partial z_{2n}}\Big)$ — градиент функции $b(z)$.

Пусть функция $V(\lambda)$ определена формулой (28.22). Преобразуем интеграл в (28.22) в интеграл по поверхности $b(z)=\lambda$. Поскольку $2n$-форма

$$dz=dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{2n}$$

является дифференциалом от $(2n-1)$-формы

$$\omega = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} z_j \, dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \ldots \wedge dz_{2n}$$

(«птичка» над $dz_j$ означает, что $dz_j$ пропускается), то

$$\int\limits_{b(z)<\lambda} dz = \int\limits_{b(z)=\lambda} \omega. \tag{28.38}$$

Пусть $n_z$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $b(z)=\lambda$ в точке $z$, т. е.

$$n_z = \frac{\nabla b(z)}{|\nabla b(z)|}.$$

Обозначая через $dS_z$ элемент площади поверхности $b(z)=\lambda$, мы получаем из (28.38), что

$$V(\lambda) = \frac{(2\pi)^{-n}}{2n} \int\limits_{b(z)=\lambda} (z \cdot n_z) \, dS_z = \frac{(2\pi)^{-n}}{2n} \int\limits_{b(z)=\lambda} \frac{dS_z}{|\nabla b(z)|} (z \cdot \nabla b(z)). \tag{28.39}$$

Вычислим теперь $V'(\lambda)$. Заметим, что расстояние в точке $z$ от поверхности $b(z)=\lambda$ до близкой поверхности уровня $b(z)=\lambda+\Delta\lambda$ равно $\dfrac{\Delta\lambda(1+o(1))}{|\nabla b(z)|}$. Поэтому

$$V'(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{b(z)=\lambda} \frac{dS_z}{|\nabla b(z)|}. \tag{28.40}$$

Сравнивая (28.39) и (28.40), мы видим, что

$$\frac{V'(\lambda)}{V(\lambda)} \leqslant \left[ \min_{b(z)=\lambda} (z \cdot \nabla b(z)) \right]^{-1}. \tag{28.41}$$

Из (28.41) вытекает

Предложение 28.3. *Пусть*

$$|z \cdot \Delta b(z)| \geqslant C b(z)^{1-\varkappa}, \quad |z| \geqslant R_0, \quad C>0. \tag{28.42}$$

*Тогда*

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa-1}). \tag{28.43}$$

Замечание 28.2. Из условия (28.42) вытекает, что $\nabla b(z) \neq 0$ при $|z| \geqslant R_0$, так что это не нужно требовать заранее. Более того, геометрически условие (28.42) обеспечивает «звездность» поверхности $b(z)=$

$=\lambda$ по отношению к началу координат, т. е. любой луч, начинающийся в точке 0, пересекает эту поверхность ровно в одной точке и притом под ненулевым углом.

Упражнение 28.1. Доказать, что условие (28.42) выполнено, если $b(z)$ — эллиптический многочлен.

Указание. Использовать тождество Эйлера для однородных функций.

Задача 28.1. Построить при $\dim H = 2$ такой оператор $A$, что при некотором $\lambda$ существует оператор $E'_\lambda$, для которого выполнены условия 1)—4), но $E'_\lambda \neq E_\lambda$.

Задача 28.2. Рассмотрим на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ оператор $A = -\Delta + Q$, где $\Delta$ — оператор Лапласа, $Q$ — любой ограниченный самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{T}^n)$, причем $\|Q\| < M$.

Пусть $N(\lambda)$ — число собственных значений оператора $A$, меньших чем $\lambda$.

Используя приближенный спектральный проектор $\mathscr{E}_\lambda$, равный точному спектральному проектору оператора $-\Delta$, доказать, что

$$N_0(\lambda - M) \leqslant N(\lambda) \leqslant N_0(\lambda + M),$$

где $N_0(\lambda)$ — число точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, лежащих в шаре $|x| \leqslant \sqrt{\lambda}$. Вывести отсюда асимптотическую формулу

$$N(\lambda) = c_n \lambda^{n/2}(1 + O(\lambda^{-1/2})).$$

## § 29. Операторы с параметром

**29.1. Класс символов и операторов.** Полученные в § 28 оценки (28.34) для символа $e(z, \lambda)$ подсказывают следующее

Определение 29.1. Через $\Gamma^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$ обозначается класс функций $a(z, \lambda)$, определенных при $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda \geqslant \lambda_0$, бесконечно дифференцируемых по $z$ и удовлетворяющих оценкам

$$|\partial_z^\gamma a(z, \lambda)| \leqslant C_\gamma \langle z\rangle^{m-\rho|\gamma|}\lambda^{\mu-\sigma|\gamma|}. \tag{29.1}$$

Здесь $m, \mu, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $\sigma \geqslant 0$.

Ясно, что если $a_j \in \Gamma^{m_j,\mu_j}_{\rho_j,\sigma_j}$, $j = 1, 2$, то $a_1 a_2 \in \Gamma^{m_1+m_2,\mu_1+\mu_2}_{\rho,\sigma}$, где $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$. Далее, если $a \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\delta}$, то $\partial_z^\gamma a \in \Gamma^{m-\rho|\gamma|,\,\mu-\sigma|\gamma|}_{\rho,\sigma}$.

Заметим, что если $a \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$, то при каждом фиксированном $\lambda \geqslant \lambda_0$ справедливо включение $a(z, \lambda) \in \Gamma^m_\rho(\mathbb{R}^{2n})$, что позволяет определить класс зависящих от параметра операторов $A(\lambda)$ с вейлевскими символами $a(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\mu}_{\rho,\delta}$. Этот класс операторных функций $A(\lambda)$, действующих, например, в $S(\mathbb{R}^n)$, мы будем обозначать через $G^{m,\mu}_{\rho,\sigma}$.

**29.2. Формула композиции.**

Теорема 29.1. *Пусть* $a_j \in \Gamma^{m_j,\mu_j}_{\rho_j,\sigma_j}$, $j=1, 2$; $A_j(\lambda)$ — *соответствующие операторные функции. Тогда* $A_1(\lambda)\circ A_2(\lambda)\in G^{m_1+m_2,\mu_1+\mu_2}_{\rho,\sigma}$, *где* $\rho=\min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma=\min(\sigma_1, \sigma_2)$ *причем если* $b(z, \lambda)$ — *вейлевский символ композиции* $B(\lambda)=A_1(\lambda)\circ A_2(\lambda)$, *то*

$$b=\sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N-1}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!}\,2^{-|\alpha+\beta|}(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1)\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2)+r_N, \tag{29.2}$$

*где*

$$r_N\in\Gamma^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2),\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}_{\rho,\sigma}. \tag{29.3}$$

Доказательство. Можно было бы провести доказательство по той же схеме, что и доказательство теоремы 23.6, введя предварительно соответствующий класс амплитуд и повторив рассуждения из § 23. Но для краткости мы проведем доказательство непосредственно.

Вначале мы получим некоторую формулу композиции $B=A_1\circ A_2$ операторов $A_1$ и $A_2$ с вейлевскими символами $a_1(z)$, $a_2(z)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Ясно, что

$$Bu(x)=\int a_1\Big(\frac{x+x_1}{2}, \zeta\Big)a_2\Big(\frac{x_1+y}{2}, \eta\Big)\times \\ \times e^{i[(x-x_1)\cdot\zeta+(x_1-y)\cdot\eta]}\,u(y)\,dy\,dx_1\,đ\eta\,đ\zeta.$$

Если $K_B(x, y)$ — ядро оператора $B$, то отсюда находим

$$K_B(x, y)=\int a_1\Big(\frac{x+x_1}{2}, \zeta\Big)a_2\Big(\frac{x_1+y}{2}, \eta\Big)\times \\ \times e^{i[(x-x_1)\cdot\zeta+(x_1-y)\cdot\eta]}\,dx_1\,đ\eta\,đ\zeta. \tag{29.4}$$

Используем теперь формулу (23.39) (с $\tau=1/2$), дающую выражение символа через ядро:

$$b(x, \xi)=\int e^{-ix_2\cdot\xi}K_B\Big(x+\frac{x_2}{2}, x-\frac{x_2}{2}\Big)\,dx_2. \tag{29.5}$$

Полагая $x_2/2=x_3$, можно также написать

$$b(x, \xi)=2^n\int e^{-2ix_3\cdot\xi}K_B(x+x_3, x-x_3)\,dx_3. \tag{29.6}$$

Отсюда и из (29.4) находим

$$b(x, \xi)=2^n\int a_1\Big(\frac{x+x_1+x_3}{2}, \zeta\Big)\,a_2\Big(\frac{x+x_1-x_3}{2}, \eta\Big)\times \\ \times e^{i[(x+x_3-x_1)\cdot\zeta+(x_1+x_3-x)\cdot\eta-2x_3\xi]}\,dx_1\,dx_3\,đ\eta\,đ\zeta.$$

Введем вместо $x_1$ и $x_3$ новые переменные интегрирования

$$x_4 = \frac{x + x_1 + x_3}{2}, \quad x_5 = \frac{x + x_1 - x_3}{2},$$

так что $x_1 = x_4 + x_5 - x$, $x_3 = x_4 - x_5$. Принимая во внимание, что $\left|\frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(x_4, x_5)}\right| = 2^n$, мы получаем

$$b(x, \xi) = 2^{2n} \int a_1(x_4, \zeta)\, a_2(x_5, \eta) \times \\ \times e^{2i[(x - x_5)\cdot\zeta + (x_4 - x)\cdot\eta + (x_5 - x_4)\cdot\xi]}\, dx_4\, dx_5\, đ\zeta\, đ\eta,$$

или

$$b(x, \xi) = 2^{2n} \int a_1(y, \eta)\, a_2(z, \zeta) \times \\ \times e^{2i[(x - z)\cdot\eta + (y - x)\cdot\zeta + (z - y)\cdot\xi]}\, dy\, dz\, đ\eta\, đ\zeta. \quad (29.7)$$

Отметим, что показатель экспоненты в (29.7) можно также записать в виде

$$2i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 2i \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_j & y_j & z_j \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \end{vmatrix}$$

Из вида этого показателя вытекает возможность интегрирования по частям, приводящего к появлению убывающих множителей вида $\langle x - z\rangle^{-N}$, $\langle y - x\rangle^{-N}$, $\langle \eta - \xi\rangle^{-N}$, $\langle \zeta - \xi\rangle^{-N}$. Поэтому наиболее существенную роль в интеграле (29.7) играют те точки $y$, $\eta$, $z$, $\zeta$, для которых $y = z = x$, $\eta = \zeta = \xi$. Это наводит на мысль разложить $a_1(y, \eta)$ и $a_2(z, \zeta)$ по формуле Тейлора при $y = x$ и $z = x$.

Вначале сделаем замену $y' = y - x$, $z' = z - x$, $\eta' = \eta - \xi$, $\zeta' = \zeta - \xi$. Опуская штрихи, получим

$$b(x, \xi) = 2^{2n} \int a_1(x + y, \xi + \eta)\, a_2(x + z, \xi + \zeta)\, e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz. \quad (29.8)$$

Будем рассматривать этот интеграл как повторный при порядке дифференциалов $đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz$. Напишем разложения

$$a_1(x + y, \xi + \eta) = \sum_{|\alpha| \leqslant N-1} \frac{y^\alpha}{\alpha!}\, \partial_x^\alpha a_1(x, \xi + \eta) + r_N^{(1)}(x, y, \xi, \eta), \quad (29.9)$$

$$a_2(x + z, \xi + \zeta) = \sum_{|\beta| \leqslant N-1} \frac{z^\beta}{\beta!}\, \partial_x^\beta a_2(x, \xi + \zeta) + r_N^{(2)}(x, z, \xi, \zeta), \quad (29.10)$$

где

$$r_N^{(1)}(x,\,y,\,\xi,\,\eta)=\sum_{|\alpha|=N}c_\alpha\int_0^1(1-\tau)^{N-1}\,d\tau\cdot y^\alpha(\partial_x^\alpha a_1)\,(x+\tau y,\,\xi+\eta),\quad(29.11)$$

$$r_N^{(2)}(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)=\sum_{|\beta|=N}c_\beta\int_0^1(1-\tau)^{N-1}\,d\tau\cdot z^\beta(\partial_x^\beta a_2)\,(x+\tau z,\,\xi+\zeta).\quad(29.12)$$

Подставляя в (29.8) эти разложения, мы получаем

$$b(x,\,\xi)=2^{2n}\sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N-1}\int\frac{y^\alpha z^\beta}{\alpha!\,\beta!}\,[\partial_x^\alpha a_1(x,\,\xi+\eta)]\,[\partial_x^\beta a_2(x,\,\xi+\zeta)]\times$$
$$\times\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz+r_N^{(3)}(x,\,\xi),\quad(29.13)$$

где $r_N^{(3)}(x,\xi)$ имеет вид линейной комбинации слагаемых четырех типов:

$r_{\alpha,\beta}^{(4)}(x,\,\xi)$ — такой же интеграл, как под знаком суммы в (29.13), но с $|\,\alpha+\beta\,|\geqslant N$;

$$r_{\alpha,N}^{(5)}(x,\,\xi)=\int y^\alpha[\partial_x^\alpha a_1(x,\,\xi+\eta)]\,[r_N^{(2)}(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)]\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz;\quad(29.14)$$

$$r_{N,\beta}^{(6)}(x,\,\xi)=\int z^\beta[r_N^{(1)}(x,\,y,\,\xi,\,\eta)]\,[\partial_x^\beta a_2(x,\,\xi+\zeta)]\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz;\quad(29.15)$$

$$r_N^{(7)}(x,\,\xi)=\int r_N^{(1)}(x,\,y,\,\xi,\,\eta)\,r_N^{(2)}(x,\,z,\,\xi,\,\zeta)\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz.\quad(29.16)$$

Вычислим один из интегралов под знаком суммы в (29.13). Для этого прежде всего заметим, что

$$y^\alpha e^{2iy\cdot\zeta}=\left(\frac{1}{2}D_\zeta\right)^\alpha(e^{2iy\cdot\zeta}),\quad(29.17)$$

$$z^\beta e^{-2iz\cdot\eta}=\left(-\frac{1}{2}D_\eta\right)^\beta(e^{-2iz\cdot\eta}),\quad(29.18)$$

и выполним интегрирование по частям, пользуясь этими тождествами.

Получим

$$2^{2n}\int \frac{y^\alpha z^\beta}{\alpha!\,\beta!}\,[\partial_x^\alpha a_1(x,\,\xi+\eta)]\,[\partial_x^\beta a_2(x,\,\xi+\zeta)]\,e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz=$$
$$=\frac{2^{2n-|\alpha+\beta|}\cdot(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!}\int[\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1(x,\,\xi+\eta)]\,[\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2(x,\,\xi+\zeta)]\times$$
$$\times e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz=$$
$$=\frac{2^{-|\beta|}(-2)^{-|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!}\int\Big[\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1\Big(x,\,\xi+\frac{\eta}{2}\Big)\Big]\times\Big[\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2\Big(x,\,\xi+\frac{\zeta}{2}\Big)\Big]\times$$
$$\times e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz=$$
$$=\frac{2^{-|\beta|}(-2)^{-|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!}\times\int\Big[\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1\Big(x,\,\xi+\frac{\eta}{2}\Big)\Big]\,e^{-iz\cdot\eta}\,đ\eta\,dz\times$$
$$\int\Big[\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2\Big(x,\,\xi+\frac{\zeta}{2}\Big)\Big]\times e^{iy\cdot\zeta}\,đ\zeta\,dy=$$
$$=\frac{2^{-|\beta|}(-2)^{-|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!}\,[\partial_x^\alpha D_\xi^\beta a_1(x,\,\xi)]\,[\partial_x^\beta D_\xi^\alpha a_2(x,\,\zeta)],$$

что дает конечные члены в формуле (29.2).

Заметим теперь, что формула (29.8) и все последующие вычисления сохраняют силу для любых символов $a_j$ классов $\Gamma_\rho^m$. Этот факт можно установить непосредственно, заменяя осциллирующий интеграл (29.8) сходящимся, а можно проверить стандартным предельным переходом от финитных символов, как в § 1.

Предположим теперь, что символы $a_1$ и $a_2$ такие, как в формулировке теоремы. Нужно доказать включение (29.3) для каждого из остатков $r_{\alpha,\beta}^{(4)}$, $r_{\alpha,N}^{(5)}$, $r_{N,\beta}^{(6)}$, $r_N^{(7)}$. Что касается $r_{\alpha,\beta}^{(4)}$, то для него это включение очевидно, поскольку он имеет тот же вид, что и конечные члены.

Для оценки $r_{\alpha,N}^{(5)}$, $r_{N,\beta}^{(6)}$ и $r_N^{(7)}$ удобно произвести в (29.14)—(29.16) то же интегрирование по частям (с помощью (29.17) и (29.18)). В результате $y^\alpha$ заменяется на $D_\zeta^\alpha$, а $z^\beta$ — на $D_\eta^\beta$ и мы приходим к необходимости оценивать равномерно по $\tau_1,\ \tau_2\in[0,\,1]$ символы вида

$$\int[\partial_x^\alpha\,D_\xi^\beta a_1(x+\tau_1 y,\,\xi+\eta,\,\lambda)]\,[\partial_x^\beta\,D_\xi^\alpha a_2(x+\tau_2 z,\,\xi+\zeta,\,\lambda)]\times$$
$$\times e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\,đ\eta\,đ\zeta\,dy\,dz,\qquad|\alpha+\beta|\geqslant N.\qquad(29.19)$$

Дифференцируя (29.19) по $x$ и $\xi$, мы получаем еще, что производная $\partial_x^\gamma\partial_\xi^\delta$ от этого выражения является линейной комбинацией слагаемых вида

$$\int \left[\partial_x^{\alpha+\gamma'}\partial_\xi^{\beta+\delta'} a_1(x+\tau_1 y,\, \xi+\eta,\, \lambda)\right]\left[\partial_x^{\beta+\gamma''}\partial_\xi^{\alpha+\delta''} a_2(x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta,\, \lambda)\right]\times$$
$$\times\, e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz, \quad \gamma'+\gamma''=\gamma, \quad \delta'+\delta''=\delta. \quad (29.20)$$

Пользуясь тождествами

$$e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)} = (1+|y|^2+|\eta|^2)^{-M}\left(1-\frac{1}{4}\,\Delta_{z,\,\zeta}\right)^M e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)},$$
$$e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)} = (1+|z|^2+|\zeta|^2)^{-M}\left(1-\frac{1}{4}\Delta_{y,\,\eta}\right)^M e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}$$

и используя обозначения

$$\langle z,\, \zeta\rangle = (1+|z|^2+|\zeta|^2)^{1/2}, \quad \langle y,\, \eta\rangle = (1+|y|^2+|\eta|^2)^{1/2},$$

мы видим, что (29.20) приводится к линейной комбинации выражений вида

$$\int \left[\partial_{x,\,\xi}^{\varkappa'+\nu'} a_1(x+\tau_1 y,\, \xi+\eta,\, \lambda)\right]\left[\partial_{x,\,\xi}^{\varkappa''+\nu''} a_2(x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta,\, \lambda)\right]\times$$
$$\times\, \langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M} e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz, \quad (29.21)$$

где $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\nu'$, $\nu''$ — $2n$-мерные мультииндексы, причем

$$|\varkappa'| \geqslant N, \quad |\varkappa''| \geqslant N, \quad |\nu'|+|\nu''| \geqslant |\gamma|+|\delta|. \quad (29.22)$$

Интеграл (29.21) оценивается по модулю через

$$C\int \langle x+\tau_1 y,\, \xi+\eta\rangle^{m_1-\rho_1|\varkappa'+\nu'|}\lambda^{\mu_1-\sigma_1|\varkappa'+\nu'|}\langle x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta\rangle^{m_2-\rho_2|\varkappa''+\nu''|}\times$$
$$\times\, \lambda^{\mu_2-\sigma_2|\varkappa''+\nu''|}\times\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M}\, đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz,$$

что благодаря (29.22) не превосходит выражения

$$C\lambda^{\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)-|\gamma+\delta|\sigma}\cdot\int \langle x+\tau_1 y,\, \xi+\eta\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}\times$$
$$\times\, \langle x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta\rangle^{m_2-\rho_2 N-\rho_2|\nu''|}\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M}\times đ\eta\, đ\zeta\, dy\, dz. \quad (29.23)$$

Здесь степень $\lambda$ в точности соответствует утверждению теоремы, так что достаточно оценить интеграл в (29.23) через нужную степень $\langle x, \xi\rangle$.

Заметим, что интеграл в (29.23) распадается в произведение интегралов

$$\int \langle x+\tau_1 y,\, \xi+\eta\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}\langle y,\, \eta\rangle^{-2M}\, d\eta\, dy, \tag{29.24}$$

$$\int \langle x+\tau_2 z,\, \xi+\zeta\rangle^{m_2-\rho_2 N-\rho_2|\nu''|}\langle z,\, \zeta\rangle^{-2M}\, d\zeta\, dz. \tag{29.25}$$

Оценим интеграл (29.24). Разобьем область интегрирования в нем на две части:

$$\Omega_1=\left\{y,\, \eta\colon |\,y\,|+|\,\eta\,|\leqslant\frac{1}{2}(|\,x\,|+|\,\xi\,|)\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{y,\, \eta\colon |\,y\,|+|\,\eta\,|>\frac{1}{2}(|\,x\,|+|\,\xi\,|)\right\},$$

и обозначим интеграл по $\Omega_j$ через $I_j$, $j=1,\,2$. Так как лебегов объем $\Omega_1$ не превосходит $C_1\langle x,\, \xi\rangle^n$, а подынтегральное выражение оценивается на $\Omega_1$ через $C_2\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}$, то для $I_1$ справедлива оценка

$$|\,I_1\,|\leqslant C_3\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|+n}. \tag{29.26}$$

Займемся интегралом $I_2$. Можно считать, что $|\,x\,|+|\,\xi\,|\geqslant 1$ (при $|\,x\,|+|\,\xi\,|<1$ требуемые оценки очевидны). Тогда, используя очевидную оценку

$$(1+|\,x+\tau_1 y\,|+|\,\xi+\eta\,|)^p\leqslant(1+|\,x\,|+|\,\xi\,|)^p(1+|\,y\,|+|\,\eta\,|)^{|p|}$$

и выбирая $M$ достаточно большим, мы получаем

$$|\,I_2\,|\leqslant C_4\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|}. \tag{29.27}$$

Из (29.26) и (29.27) следует, что (29.24) оценивается через

$$C\langle x,\, \xi\rangle^{m_1-\rho_1 N-\rho_1|\nu'|+n}.$$

Учитывая, что для (29.25) справедлива аналогичная оценка, мы видим, что (29.23) не превосходит

$$C\langle x,\, \xi\rangle^{m_1+m_2-(\rho_1+\rho_2)N-\rho_1|\nu'|-\rho_2|\nu''|+2n}\cdot\lambda^{\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma|\gamma+\delta|}\leqslant$$
$$\leqslant C\langle x,\, \xi\rangle^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2)-\rho|\gamma+\delta|+2n}\cdot\lambda^{\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma|\gamma+\delta|},$$

что и обеспечивает включение

$$r_N\in\Gamma_{\rho,\,\sigma}^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2)+2n,\,\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}. \tag{29.28}$$

Но увеличивая здесь $N$ и рассматривая возникающие дополнительные члены в сумме (29.2), мы видим, что из (29.28) следует (29.3), что и доказывает теорему. ■

**29.3. Положительность операторов с параметром.**

Теорема 29.2. *Пусть* $a(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\,\mu}_{\rho,\,\sigma}$, $\sigma > 0$, $a(z, \lambda) \geqslant \varepsilon > 0$, *где* $\varepsilon$ — *постоянная, и выполнены оценки*

$$|\partial_z^\gamma a(z, \lambda)| \leqslant C_\gamma a(z, \lambda) \cdot \lambda^{-\sigma_0|\gamma|}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,\ z \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{29.29}$$

*где* $\sigma_0 > 0$, $\sigma_0$ *не зависит от* $\gamma$. *Тогда, если* $A(\lambda)$ — *оператор с вейлевским символом* $a(z, \lambda)$, *то при достаточно больших* $\lambda$ *будет* $A(\lambda) \geqslant 0$ (*т. е.* $(A(\lambda)\, u,\, u) \geqslant 0$, $u \in S(\mathbb{R}^n)$).

Для доказательства этой теоремы необходима следующая лемма, позволяющая использовать антививиковский символ.

Лемма 29.1. *Рассмотрим оператор* $B(\lambda)$ *с антививиковским символом* $a(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\,\mu}_{\rho,\,\sigma}$, *и пусть* $b(z, \lambda)$ — *его вейлевский символ. Тогда*

$$a - b = \sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma(\partial_z^\gamma a) + r_N, \tag{29.30}$$

*где* $c_\gamma = 0$ *при нечетных* $|\gamma|$ *и* $r_N \in \Gamma^{m-\rho N,\,\mu-\sigma N}_{\rho,\,\sigma}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 24.1.

Упражнение 29.1. Доказать лемму 29.1.

Доказательство теоремы 29.2. Пусть $B_0(\lambda)$ — оператор с антививиковским символом $a(z, \lambda)$, и пусть $b_0(z, \lambda)$ — вейлевский символ $B_0(\lambda)$. Рассмотрим теперь оператор $B_1(\lambda)$ с антививиковским символом $a(z, \lambda) - b_0(z, \lambda)$ и обозначим через $b_1(z, \lambda)$ его вейлевский символ. По индукции строим такую последовательность операторов $B_0, B_1, B_2, \ldots$, что $B_j$ — оператор с антививиковским символом $a - b_0 - b_1 - \ldots - b_{j-1}$, где $b_0, b_1, \ldots, b_{j-1}$ — вейлевские символы операторов $B_0, B_1, \ldots, B_{j-1}$.

Из леммы 29.1 вытекает, что если

$$A_k = A - B_0 - B_1 - \ldots - B_{k-1},$$

то $A_k \in \Gamma^{m-2\rho k,\,\mu-2\sigma k}_{\rho,\,\sigma}$. Положим еще

$$Q_k = B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1}.$$

Таким образом, $A = A_k + Q_k$.

Заметим теперь, что индукцией по $k$ доказывается, что $b_j(z, \lambda)$ при $j > 0$ имеет вид

$$b_j = \sum_{2j\leqslant|\gamma|<N} c_\gamma(\partial^\gamma a) + r_{N,\,j}, \tag{29.31}$$

где $c_{\gamma,\,j}$ — постоянные и $r_{N,\,j} \in \Gamma_{\rho,\,\sigma}^{m-\rho N,\mu-\sigma N}$. Поэтому оператор $Q_k$ имеет антивиковский символ вида

$$q_k(z,\,\lambda) = a(z,\,\lambda) + \sum_{2 \leqslant |\gamma| < N} c_\gamma [\partial_z^\gamma a(z,\,\lambda)] + r'_N(z,\,\lambda), \tag{29.32}$$

где $r'_N(z,\,\lambda) \in \Gamma_{\rho,\,\sigma}^{m-\rho N,\,\mu-\sigma N}$. Учитывая (29.29), мы получаем

$$q_k(z,\,\lambda) = a(z,\,\lambda)\,(1 + \lambda^{-2\sigma_0} s(z,\,\lambda)),$$

где $s(z,\,\lambda)$ таково, что

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} |\,s(z,\,\lambda)\,| \leqslant C, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$

где $C$ не зависит от $\lambda$. В частности, ясно, что $q_k(z,\,\lambda) \geqslant \varepsilon/2 > 0$ при достаточно больших $\lambda$, откуда мы получаем

$$Q_k \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,I \tag{29.33}$$

в силу предложения 24.1.

Заметим теперь, что при большом $k$

$$\|A_k(\lambda)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{29.34}$$

В самом деле, достаточно проверить это же для нормы Гильберта — Шмидта $\|A_k(\lambda)\|_2$. Но

$$\|A_k(\lambda)\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \int |\,b_k(z,\,\lambda)\,|^2 dz \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

если выбрать $k$ столь большим, что

$$m - 2\rho k < -n, \quad \mu - 2\sigma k < 0.$$

Из (29.33) и (29.34) сразу следует, что $A \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\,I$, что и доказывает теорему 29.2. ■

## § 30. Асимптотика собственных значений

Рассмотрим оператор $A$ с вещественным вейлевским символом $b(z) \in H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, где $m_0 > 0$. Оператор $A$ является существенно самосопряженным по теореме 26.2 и имеет дискретный спектр по теореме 26.3.

Поскольку $b(z)$ не имеет нулей при больших $|\,z\,|$, то, меняя в случае необходимости знак, можно считать, что выполнена оценка

$$C_1 |\,z\,|^{m_0} \leqslant b(z) \leqslant C_2 |\,z\,|^m, \quad |\,z\,| \geqslant R_0, \quad m_0 > 0, \tag{30.1}$$

где $C_1$, $C_2$ — положительные постоянные.

Легко показать, что в этом случае оператор $A$ полуограничен снизу. В самом деле, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 24.2 и используя теорему 24.1, мы видим, что существует такой оператор $A'$ с антивиковским символом вида

$$b(z)+\sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma \partial^\gamma b(z), \tag{30.2}$$

что оператор $A-A'$ ограничен. Но тогда достаточно проверить полуограниченность снизу оператора $A'$, которая вытекает из полуограниченности снизу любой функции вида (30.2), имеющей место ввиду того, что

$$b(z)+\sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma \partial^\gamma b(z) = b(z)\left(1+\sum_{0<|\gamma|<N} c_\gamma \frac{\partial^\gamma b(z)}{b(z)}\right),$$

а все слагаемые в скобках, кроме первого, стремятся к 0 при $|z|\to+\infty$.

Пусть $\rho'$ — такое положительное число, что выполнены оценки

$$|\partial^\gamma b(z)| \leqslant C_\gamma b(z)^{1-\rho'|\gamma|}, \quad |z|\geqslant R_0 \tag{30.3}$$

(как уже отмечалось в п. 28.6, можно взять, например, $\rho'=\rho/m$, но возможно, что это не наилучшее значение $\rho'$).

Наконец, предположим, что

$$|z\cdot\nabla b(z)| \geqslant c b(z)^{1-\varkappa}, \quad |z|\geqslant R_0, \tag{30.4}$$

где $0\leqslant\varkappa<1$, $c>0$. Положим

$$V(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{b(z)<\lambda} dz, \tag{30.5}$$

и пусть $N(\lambda)$ — число собственных значений оператора $A$, не превосходящих $\lambda$.

Теорема 30.1. *Пусть оператор $A$ имеет вейлевский символ $b(z)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, удовлетворяющий сформулированным условиям* (30.1), (30.3) *и* (30.4), *причем $\varkappa<\rho'$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ имеет место асимптотическая формула*

$$N(\lambda)=V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{\varkappa-\rho'+\varepsilon})). \tag{30.6}$$

Доказательство. 1. Мы воспользуемся теоремой 28.1 в применении к приближенному спектральному проектору $\mathscr{E}_\lambda$, построенному в п. 28.6. Напомним, что оператор $\mathscr{E}_\lambda$ имеет вещественнозначный вейлевский символ $e(z,\lambda)$, равный 1 при $b(z)\leqslant\lambda$ и 0 при $b(z)\geqslant\lambda+2\lambda^{1-\nu}$, и если $\nu < \rho'$, то оценки (28.34)—(28.36) обеспечивают включение

$$e(z,\, \lambda) \in \Gamma^{0,\,0}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}, \quad \tilde\rho > 0, \quad \tilde\sigma > 0. \tag{30.7}$$

Мы должны проверить выполнение всех условий теоремы 28.1. Условие $\mathscr{E}_\lambda^* = \mathscr{E}_\lambda$ очевидно благодаря вещественности $e(z,\, \lambda)$. Из предложения 27.2 вытекает ядерность $\mathscr{E}_\lambda$.

Будем вейлевский символ любого оператора $A$ обозначать через $\sigma(A)$. Имеем, очевидно,

$$\sigma(\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda) = \sum_{0<|\alpha+\beta|<N} c_{\alpha\beta}[\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha e(z,\, \lambda)]\,[\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta e(z,\, \lambda)] + (e^2 - e) + r_N, \tag{30.8}$$

где $r_N \in \Gamma^{-2N\tilde\rho,\,-2N\tilde\sigma}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}$. Заметим, что все члены суммы, кроме $r_N$, сосредоточены там, где $\lambda \leqslant a(z) \leqslant \lambda(1 + 2\lambda^{-\nu})$, и, применяя к каждому члену предложение 27.3, мы получим оценку

$$\|\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(V(\lambda + 2\lambda^{1-\nu}) - V(\lambda)).$$

Но из предложения 28.3 вытекает, что

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa-1}),$$

а это в силу предложения 28.2 дает оценку

$$V(\lambda + 2\lambda^{1-\nu}) - V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa-\nu} V(\lambda)).$$

Поэтому

$$\|\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(\lambda^{\varkappa-\nu} V(\lambda)). \tag{30.9}$$

Кроме того, из предложения 27.2 вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\ \mathscr{E}_\lambda = (2\pi)^{-n} \int e(z,\, \lambda)\, dz = \\ = V(\lambda) + O(V(\lambda + 2\lambda^{1-\nu}) - V(\lambda)) = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{\varkappa-\nu})).\end{aligned} \tag{30.10}$$

Заметим, что мы должны брать $\nu < \rho'$. Выбирая $\nu = \rho' - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, мы можем переписать (30.9) и (30.10) в виде

$$\|\mathscr{E}_\lambda^2 - \mathscr{E}_\lambda\|_1 = O(\lambda^{\varkappa-\rho'+\varepsilon} V(\lambda)), \tag{30.11}$$

$$\mathrm{Sp}\ \mathscr{E}_\lambda = V(\lambda)\,(1 + O(\lambda^{\varkappa-\rho'+\varepsilon})) \tag{30.12}$$

2. Проверим теперь требование 3° теоремы 28.1:

$$\mathscr{E}_\lambda(A - \lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda \leqslant C\lambda^{1-\nu}.$$

Запишем это неравенство в виде

$$\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)\,\mathscr{E}_\lambda + C\lambda^{1-\nu} \geqslant 0. \tag{30.13}$$

Вычислим вейлевский символ оператора $\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)\,\mathscr{E}_\lambda$. Имеем по теореме 29.1

$$\sigma(\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)) = \sum_{|\alpha+\beta|<N} c_{\alpha\beta}(\partial_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta e)\,(\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(\lambda - a(z))) + r_N,$$

где $r_N \in \Gamma^{m-N(\rho+\tilde\rho),\,1-N\tilde\sigma}_{\min(\rho,\,\tilde\rho),\,0}$.

Применяя еще раз формулу композиции, получим

$$\sigma(\mathscr{E}_\lambda(\lambda I - A)\,\mathscr{E}_\lambda) = \sum c_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\partial_z^{\gamma_1}e)\,(\partial_z^{\gamma_2}e)\,(\partial_z^{\gamma_3}(\lambda - a(z))) + \tilde r_N, \quad (30.14)$$

где $\tilde r_N \in \Gamma^{m-N(\rho+\tilde\rho),\,1-N\tilde\sigma}_{\min(\rho,\,\tilde\rho),\,0}$, сумма конечна и $c_{000}=1$.

Ясно, что остаток $\tilde r_N$ не может повлиять на выполнение (30.13), и мы займемся оценкой конечных членов.

Докажем, что при $|\gamma_1|+|\gamma_2|\neq 0$ и при некоторых $\tilde\rho>0$ и $\tilde\sigma>0$ справедливы оценки

$$|(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)\,(\partial^{\gamma_3}(\lambda-a))| \leqslant C\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|)}\lambda^{1-\nu-\tilde\sigma(|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|)}. \quad (30.15)$$

Пусть вначале $\gamma_3=0$. Тогда (30.15) верно ввиду того, что $|\lambda - a(z)|\leqslant 2\lambda^{1-\nu}$ на носителе $(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)$. Пусть $\gamma_3\neq 0$. Тогда

$$|(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)\,(\partial^{\gamma_3}a)| \leqslant C\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{-\tilde\sigma(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{1-\rho'|\gamma_3|} = C\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{1-\nu}\lambda^{-|\gamma_3|(\rho'-\nu/|\gamma_3|)}.$$

Заметим, что $\rho'-\nu/|\gamma_3|\geqslant\rho'-\nu>0$. Поэтому

$$|(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)\,(\partial^{\gamma_3}a)| \leqslant C\lambda^{1-\nu}\langle z\rangle^{-\tilde\rho(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{-\tilde\sigma(|\gamma_1|+|\gamma_2|)}\lambda^{-\sigma_1|\gamma_3|},$$

где $\sigma_1=\rho'-\nu$. Учитывая, что на носителе $(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)$ справедливы неравенства $\lambda\leqslant a\leqslant\lambda+2\lambda^{1-\nu}$и $\langle z\rangle^{m_0}\leqslant A\lambda$, мы получаем оценку (30.15) (но, быть может, с меньшими $\tilde\rho$ и $\tilde\sigma$, чем в (30.7)).

Таким образом, мы получаем

$$(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)\,(\partial^{\gamma_3}(\lambda-a)) \in \Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}, \quad |\gamma_1|+|\gamma_2|\neq 0. \quad (30.16)$$

Но, повторяя рассуждение, проведенное вначале этого параграфа для доказательства полуограниченности $A$, мы получаем отсюда, что норма в $L^2(\mathbb{R}^n)$ оператора с вейлевским символом $(\partial^{\gamma_1}e)\,(\partial^{\gamma_2}e)\,(\partial^{\gamma_3}(\lambda-a))$ не превосходит $C\lambda^{1-\nu}$, так что этот член также не может повлиять на выполнение (30.13).

Аналогичными рассуждениями проверяется, что

$$e^2\partial^{\gamma_3}(\lambda-a) \in \Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,0}, \quad \gamma_3\neq 0, \quad (30.17)$$

так что и этот член не влияет на выполнение (30.13).

Наконец, исследуем функцию $e^2(\lambda-a)=q$. Функция $q(z,\lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$q(z,\lambda)\geqslant -C\lambda^{1-\nu},\quad \partial^\nu q\in\Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,0},\quad |\gamma|>0.$$

Если $P$ — оператор с антивиковским символом $q(z,\lambda)$ и $p(z,\lambda)$ — его вейлевский символ, то из леммы 29.1 следует, что $q-p\in\Gamma^{0,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,0}$. Но ясно, что $P\geqslant -C\lambda^{1-\nu}$ и $\|Q-P\|\leqslant C\lambda^{1-\nu}$. Отсюда и следует соотношение (30.13). Полагая в нем $\nu=\rho'-\varepsilon$, мы получаем

$$\mathscr{E}_\lambda(A-\lambda I)\,\mathscr{E}_\lambda\leqslant C\lambda^{1-\rho'+\varepsilon}. \tag{30.18}$$

3. Проверим теперь, что

$$(I-\mathscr{E}_\lambda)\,(A-\lambda I)\,(I-\mathscr{E}_\lambda)+C\lambda^{1-\nu}\geqslant 0 \tag{30.19}$$

при достаточно большом $C>0$. Применяя теорему 29.1, мы видим, что символ левой части в (30.19) имеет вид

$$C\lambda^{1-\nu}+\sum c_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\partial^{\gamma_1}(1-e)\cdot\partial^{\gamma_2}(1-e)\cdot\partial^{\gamma_3}(a-\lambda)+r_N, \tag{30.20}$$

где $r_N\in\Gamma^{m-N(\rho+\tilde\rho),\,1-N\tilde\sigma}_{\min(\rho,\,\tilde\rho),\,0}$ и $c_{000}=1$.

Оператор $R_N$ с вейлевским символом $r_N$ допускает оценку нормы $\|R_N\|\leqslant C\lambda^{1-N\tilde\sigma}$ и не может повлиять на выполнение (30.19).

Оценим главную часть в (30.20) — символ

$$q(z,\lambda)=(1-e(z,\lambda))^2\,(a(z)-\lambda)+C\lambda^{1-\nu}. \tag{30.21}$$

Заметим прежде всего, что при достаточно большом $C$ будет

$$q(z,\lambda)\geqslant\lambda^{1-\nu}. \tag{30.22}$$

Докажем теперь, что

$$|\,\partial_z^\gamma q(z,\lambda)\,|\leqslant C_\gamma q(z,\lambda)\,\langle z\rangle^{-\tilde\rho|\gamma|}\lambda^{-\tilde\sigma|\gamma|} \tag{30.23}$$

при некоторых $\tilde\rho>0$ и $\tilde\sigma>0$.

Имеем

$$\partial_z^\gamma q=\sum c_{\gamma'\gamma''}\partial_z^{\gamma'}(1-e)^2\partial_z^{\gamma''}(a-\lambda).$$

Если $\gamma'\neq 0$, то соответствующий член оценивается, как в п. 2 этого доказательства. Если $\gamma'=0$, то при $\gamma\neq 0$ на носителе $1-e$ выполнена оценка

$$|\,(1-e)^2\partial^\gamma(a-\lambda)\,|\leqslant Ca(z)^{1-\rho'|\gamma|}\leqslant(q(z,\lambda)+2\lambda)\,(a(z))^{-\rho'|\gamma|}, \tag{30.24}$$

так как $a(z) \leqslant q(z, \lambda) + 2\lambda$. Далее,

$$(q(z, \lambda) + 2\lambda)\,(a(z))^{-\rho'|\gamma|} \leqslant q(z, \lambda)\,(a(z))^{-\rho'|\gamma|} + 2\lambda^{1-\nu}\lambda^{\nu}a(z)^{-\rho'|\gamma|} \leqslant$$
$$\leqslant q(z, \lambda)\,\lambda^{-\rho'|\gamma|/2}\langle z\rangle^{-\rho'|\gamma|/2m_0} + q(z, \lambda)\,(a(z))^{\nu-\rho'|\gamma|} \quad (30.25)$$

на $\operatorname{supp}(1-e)^2$, поскольку $\lambda^{1-\nu} \leqslant q(z, \lambda)$ и $\lambda^{\nu} \leqslant a(z)^{\nu}$. Наконец,

$$q(z, \lambda)\,(a(z))^{\nu-\rho'|\gamma|} \leqslant q(z, \lambda)\,(a(z))^{-|\gamma|(\rho'-\nu/|\gamma|)} \leqslant$$
$$\leqslant q(z, \lambda)\,(a(z))^{-|\gamma|\cdot(\rho'-\nu)/2}\langle z\rangle^{-|\gamma|(\rho'-\nu)/2m_0}. \quad (30.26)$$

Из (30.24)—(30.26) вытекает (30.23). Отметим еще, что ввиду очевидной оценки $|q(z, \lambda)| \leqslant C\langle z\rangle^m\lambda^{1-\nu}$ из (30.23) вытекает включение $q(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}$.

Аналогично оценивая остальные члены в сумме (30.20), мы видим, что если через $q(z, \lambda)$ обозначить всю эту сумму, то также будут выполнены оценки (30.22) и (30.23) и включение $q(z, \lambda) \in \Gamma^{m,\,1-\nu}_{\tilde\rho,\,\tilde\sigma}$. При этом, как было видно из предыдущего, мы можем взять $\nu = \rho' - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Применяя теорему 29.2, мы видим, что справедливо (30.19), или

$$(I - \mathscr{E}_\lambda)\,(A - \lambda I)\,(I - \mathscr{E}_\lambda) + C\lambda^{1-\rho'+\varepsilon} \geqslant 0. \quad (30.27)$$

4. Для завершения доказательства теоремы 30.1 остается заметить, что требования 1°—5° теоремы 28.1 для построенного «почти-проектора» $\mathscr{E}_\lambda$ уже проверены (соотношения (30.11), (30.12), (30.18) и (30.27)), а свойство (28.7) функции $V(\lambda)$ вытекает из (30.4) и предложения 28.3. Применение теоремы 28.1 завершает доказательство асимптотической формулы (30.6). ■

З а д а ч а 30.1. Вычислить собственные значения оператора $A = -\Delta + |x|^2$ и проверить непосредственно справедливость асимптотической формулы (30.6).

У к а з а н и е. Оператор $A = -\Delta + |x|^2$ является квантовомеханическим оператором энергии гармонического осциллятора, и вычисление его собственных значений можно найти в любом учебнике квантовой механики.

З а д а ч а 30.2. Доказать, что если вейлевский символ $b(z)$ оператора $A$ является эллиптическим многочленом, главная однородная часть которого не принимает значений на луче $\arg\lambda = \varphi_0$, то можно определить комплексные степени $A^z$ и $\zeta$-функция $\zeta(z) = \operatorname{Sp} A^z$ допускает мероморфное продолжение во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Найти ее полюсы, их вычеты и значения $\zeta(z)$ в точках $0, 1, 2, \ldots$ Получить в этой ситуации из тауберовой теоремы Икехара асимптотику $N(\lambda)$ (без оценки остаточного члена).