В. А. Успенский

Математическое и гуманитарное: преодоление барьера

МЦНМО

В. А. Успенский

Математическое и гуманитарное: преодоление барьера

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
2011

УДК 510
ББК 72
У77

Успенский В. А.

У77 Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. — М.: МЦНМО, 2011. — 48 с.

ISBN 978-5-94057-754-6

ББК 72

ISBN 978-5-94057-754-6

Поверх барьеров.

Борис Пастернак.

Уточняйте значения слов. Тогда человечество избавится от большей части своих заблуждений.

Рене Декарт.

«Да, мой голубчик, — ухо вянет:
Такую, право, порешь чушь!»
И в глазках крошечных проглянет
Математическая сушь.

Андрей Белый. Первое свидание.

Чем дальше, тем Белому становилось яснее, <…> что искусство и философия требуют примирения с точными знаниями — «иначе и жить нельзя». <…>. Недаром прежде, чем поступить на филологический факультет, он окончил математический.

Владислав Ходасевич.

I

Никто не знает, сохранят ли грядущие века и тысячелетия сегодняшнее деление наук на естественные и гуманитарные. Но даже и сегодня безоговорочное отнесение математики к естественным наукам вызывает серьёзные возражения. Естественнонаучная, прежде всего физическая, составляющая математики очевидна, и нередко приходится слышать, что математика — это часть физики, поскольку она, математика, описывает свойства внешнего, физического мира. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления и тем самым должны проходить по ведомству психологии. Не менее очевидна и логическая, приближающаяся к философской, составляющая математики. Скажем, знаменитую теорему Гёделя о неполноте, гласящую, что, какие бы способы доказывания ни установить, всегда найдётся истинное, но не доказуемое утверждение — причём даже среди утверждений о таких, казалось бы, простых объектах, как натуральные числа, — эту теорему с полным основанием можно считать теоремой теории познания.

В 1950-х годах, по возвращении с индийских научных конференций, мои московские математические коллеги с изумлением рассказывали, что в Индии математику — при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные — относят к наукам гуманитарным. И на этих конференциях им приходилось сидеть не рядом с физиками, как они привыкли, а с искусствоведами. К великому сожалению, у людей гуманитарно-ориентированных математика нередко вызывает отторжение, а то и отвращение. Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе немало тому способствует.

Лет сорок назад было модно подчёркивать разницу между так называемыми *физиками* (к коим относили и математиков) и так называемыми *лириками* (к коим относили всех гуманитариев). Терминология эта вошла тогда в моду с лёгкой руки поэта Бориса Слуцкого, провозгласившего в 1959 году в культовом стихотворении «Физики и лирики»:

Что-то физики в почёте,
Что-то лирики в загоне.
Дело не в сухом расчёте,
Дело в мировом законе.

Однако само противопоставление условных *физиков* условным *лирикам* вовсе не было вечным. По преданию, на воротах знаменитой Академии Платона была надпись: «Негеометр (то есть нематематик — *В. У.*) да не войдёт сюда!». С другой стороны, самоё математику можно называть младшей сестрой гуманитарной дисциплины, а именно юриспруденции: ведь именно в юридической практике Древней Греции, в дебатах в народных собраниях впервые возникло и далее шлифовалось понятие доказательства.

II

Можно ли уничтожить и нужно ли уничтожать ставшие, увы, традиционными (хотя, как видим, и не столь древние!) границы между гуманитарными, естественными и математическими науками — об этом я не берусь судить. Но вот разрушить барьеры между представителями этих наук, между *лириками* и *физиками*, между гуманитариями и математиками — это представляется и привлекательным, и осуществимым. Особенно благородная цель — уничтожить этот барьер внутри отдельно взятой личности, то есть превратить гуманитария отчасти в математика, а математика — отчасти в гуманитария. Обсуждая эту цель, полезно вспомнить некоторые факты из истории российской науки. Эти факты связаны — в обратном хронологическом порядке — с именами Колмогорова, Барсова и Ададурова (в другом написании — Адодурова).

Первой научной работой великого математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987) была работа отнюдь не по математике, а по истории. В начале 20-х годов XX в., будучи семнадцатилетним студентом математического отделения Московского университета, он доложил свою работу на семинаре известного московского историка Сергея Владимировича Бахрушина. Она была опубликована посмертно[1] и чрезвычайно высоко оценена специалистами — в частности, руководителем Новгородской археологической экспедиции Валентином Лаврентьевичем Яниным. Выступая на вечере памяти Колмогорова, состоявшемся в Московском доме учёных 15 декабря 1989 года, он так охарактеризовал историческое исследование Колмогорова: «Эта юношеская работа в русле исторической науки занимает место, до которого её [исторической науки] развитие ещё не докатилось. Будучи опубликованной, она окажется впереди всей исторической науки». А в предисловии к вышеназванному посмертному изданию исторических рукописей Колмогорова В. Л. Янин писал: «Некоторые наблюдения А. Н. Колмогорова способны пролить свет на источники, обнаруженные много десятилетий спустя после того, как он вёл своё юношеское исследование». И там же:

> Андрей Николаевич сам неоднократно рассказывал своим ученикам о конце своей «карьеры историка». Когда работа была доложена им в семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как «в исторической науке каждый вывод должен быть снабжён несколькими доказательствами»(!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я

1 *А. Н. Колмогоров*. Новгородское землевладение XV века. М.: Физматлит, 1994.

> решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика приобрела его.

26 апреля (по старому стилю, а по новому стилю тогда было 7 мая) 1755 года состоялось торжественное открытие Московского университета. После молебна были произнесены четыре речи. Первая из них — и притом единственная, сказанная на русском языке, — называлась «О пользе учреждения Московского университета». Говорил её Антон Алексеевич Барсов (1730–1791). Неудивительно, что в 1761 году он был назначен профессором (в современных терминах — заведующим кафедрой) на кафедру красноречия; вступление в эту должность ознаменовалось его публичной лекцией «О употреблении красноречия в Российской империи», произнесённой 31 января (11 февраля) 1761 года. Чем же занимался Барсов до того? Преподавал математику — именно с Барсова, в феврале 1755 года специально для этой цели переведённого из Петербурга в Москву, и началось преподавание математики в Московском университете! Впоследствии Барсов прославился трудами по русской грамматике; ему же принадлежит и ряд предложений по русской орфографии, тогда отвергнутых и принятых лишь в XX веке.

Ещё раньше, в 1727 году, знаменитый математик Даниил Бернулли, работавший в то время в Петербургской академии наук, обратил внимание на студента этой академии Василия Евдокимовича Ададурова (1709–1780). В письме к известному математику Христиану Гольдбаху от 28 мая 1728 года Бернулли отмечает значительные математические способности Ададурова и сообщает о сделанном Ададуровым открытии: сумма кубов последовательных натуральных чисел равна квадрату суммы их первых степеней: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Математические заслуги Ададурова засвидетельствованы его включением (с портретом в виде силуэта) в биографический раздел однотомного «Математического энциклопедического словаря» (М.: «Советская энциклопедия», 1988). А из статьи «Ададуров» в первом томе другого словаря, «Нового энциклопедического словаря» Брокгауза и Ефрона, мы узнаём, что Ададуровым написано несколько сочинений по русскому языку и, более того, что «в 1744 году ему было поручено преподавать русский язык принцессе Софии, т. е. будущей императрице Екатерине II». Последующие изыскания (они были проведены братом автора этих строк Борисом Андреевичем Успенским) показали, что Ададуров является автором первой русской грамматики на русском же языке, составление каковой следует рассматривать как большое событие. Ведь важнейшим этапом в языковом сознании носителей какого бы то ни было языка является появление первой грамматики этого языка на том же самом языке; этот этап сравним с осознанием того, что кажущаяся пустота вокруг нас заполнена воздухом. Прибавим ещё, что с 1762 года по 1778 год Ададуров был куратором Московского университета — вторым после основавшего университет И. И. Шувалова.

Итак, даже если согласиться с традиционной классификацией наук, отсюда ещё не следует с неизбежностью аналогичная классификация учёных или учащихся. Приведённые факты показывают, что математик и гуманитарий способны уживаться в одном лице.

Здесь предвидятся два возражения. Прежде всего, нам справедливо укажут, что Ададуров, Барсов, Колмогоров были выдающимися личностями, в то время как любые рекомендации должны быть рассчитаны на массового потребителя. На это мы ответим, что образцом для подражания — даже массового подражания — как раз и должны быть выдающиеся личности и что примеры Ададурова, Барсова, Колмогорова призваны вдохновлять. Далее нам укажут, опять-таки справедливо, что отнюдь не всем гуманитариям и отнюдь не всем математикам суждено заниматься научной работой, это и невозможно, и недолжно. Ну что ж, ответим мы, примеры из жизни больших учёных выбраны просто потому, что история нам их сохранила; возможность же и цель сочетания в одном лице математического и гуманитарного подхода к окружающему миру сохраняют привлекательность не только для научных работников, но и для тех гуманитариев и математиков, кто не собирается посвятить себя высокой науке.

III

По всеобщему признанию, литература и искусство являются частью человеческой культуры. Ценность же математики, как правило, видят в её практических приложениях. Но наличие практических приложений не должно препятствовать тому, чтобы и математика рассматривалась как часть человеческой культуры. Да и сами эти приложения, если брать древнейшие из них — такие как, скажем, использование египетского треугольника (т. е. треугольника со сторонами 3, 4, 5) для построения прямого угла — также принадлежат общекультурной сокровищнице человечества. (Кому, чьей сокровищнице принадлежит шестигранная форма пчелиных сот, обеспечивающая максимальную вместимость камеры при минимальном расходе воска на строительство её стен, — этот вопрос мы оставляем читателю для размышления.) В Древнем Египте, чтобы получить прямой угол, столь необходимый при строительстве пирамид и храмов, поступали следующим образом. Верёвку делили на 12 равных частей, точки деления, служащие границами между частями, помечали, а концы верёвки связывали. Затем за верёвку брались три человека, удерживая её в трёх точках, отстоящих друг от друга на 3, 4 и 5 частей деления. Далее верёвку натягивали до предела — так, чтобы получился треугольник. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник оказывался прямоугольным, причём тот человек, который стоял между частью длины 3 и частью длины 4, оказывался в вершине прямого угла этого треугольника.

Раздел математики, сейчас называемый «математический анализ», в старые годы был известен под названием «дифференциальное и интегральное исчисление». Отнюдь не всем обязательно знать точное определение таких основных понятий этого раздела, как *производная* и *интеграл*. Однако каждому образованному человеку желательно иметь представление о *производном числе* как о мгновенной скорости (а также как об угловом коэффициенте касательной) и об *определённом интеграле* как о площади (а также как о величине пройденного пути). Поучительно знать и о знаменитых математических проблемах (разумеется, тех из них, которые имеют общедоступные формулировки) — решённых (таких как проблема Ферма и проблема четырёх красок[2]), ждущих решения (таких, как проблема

2 *Проблема четырёх красок* заключается в требовании доказать следующий факт: любую мыслимую карту можно так раскрасить в четыре цвета, чтобы страны, имеющие общую границу, всегда были окрашены в разные цвета. Проблема ждала решения более ста лет.

близнецов[3]) и тех, у которых решения заведомо отсутствуют (из числа задач на геометрическое построение и простейших задач на отыскание алгоритмов). Ясное понимание несуществования чего-то — чисел ли с заданными свойствами, или способов построения, или алгоритмов — создаёт особый дискурс, который можно было бы назвать *культурой невозможного*. И культура невозможного, и предпринимаемые математикой попытки познания бесконечного значительно расширяют горизонты мышления.

Всё это, ломая традиционный стереотип математики как сухой цифири, создаёт её образ как живой области знания, причём *живой* в двух смыслах: во-первых, связанной с жизнью, во-вторых развивающейся, то есть продолжающей активно жить. Всякому любознательному человеку такая область знания должна быть интересна. Вообще, образованность предполагает ведь знакомство не только с тем, что непосредственно используется в профессиональной деятельности, но и с человеческой культурой как таковой, чьей неотъемлемой частью — повторим это ещё раз — является математика.

Здесь возможен следующий упрёк. Хотя в названии настоящего очерка политкорректно говорится о *преодолении барьера*, изложение явно уклоняется в сторону пропаганды «математического». Автор болезненно относится к такому упрёку и спешит оправдаться. Дело в том, что гуманитарная культура не нуждается в пропаганде, она не только повсеместно признана непременной частью культуры вообще, но часто отождествляется с последней. Отличать ямб от хорея, понимать значение выражения «всевышней волею Зевеса», а заодно и знать, кто такой Зевес, — все (или, по крайней мере, большинство) согласны в том, что подобные знания и умения входят в общеобязательный культурный багаж. Включение же в этот багаж чего-то математического в качестве обязательной составной части многим может показаться непривычным и потому нуждается в лоббировании.

3 Близнецами называются такие два простых числа, разность между которыми равна двум, например 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. Неизвестно, конечным или бесконечным является количество близнецовых пар; в требовании дать ответ на этот вопрос и состоит *проблема близнецов*. (Напомним, что простым называется такое большее единицы целое число, которое делится без остатка только на само себя и на единицу).

IV

Однако образование состоит не только в расширении круга знаний. Не в меньшей степени оно состоит в расширении навыков мышления. Математик и гуманитарий обладают различными стилями мышления, и ознакомление с иным стилем обогащает и того, и другого. Скажем, изучение широко распространённого в математике аксиоматического метода, при котором в рассуждениях дозволяется использовать только ту информацию, которая явно записана в аксиомах, прививает привычку к строгому мышлению. А знакомство со свойствами бесконечных множеств развивает воображение. Потребуются ли когда-нибудь, скажем, историку аксиоматический метод или бесконечные множества? Более чем сомнительно. Но вот строгость мышления и воображение не помешают и ему. С другой стороны, и математику есть чему поучиться у гуманитария. Последний более толерантен к чужому мнению, чем математик, и это говорится здесь в пользу гуманитария (разумеется, имеются в виду некоторые усреднённые — а то и воображённые автором этих строк — гуманитарий и математик). Математические понятия резко очерчены, тогда как гуманитарные расплывчаты; и как раз эта расплывчивость делает их *более адекватными для описания окружающего нас расплывчатого мира*, поскольку его явления (или надо сказать «его феномены»?) сами расплывчаты. Математик ведь привык иметь дело с такими утверждениями, каждое из которых либо истинно, либо ложно, и эта привычка поневоле заставляет его видеть мир в черно-белом цвете. Его мышление настроено на более высокую контрастность или резкость (не знаю, какое слово здесь правильнее). Ему, в отличие от гуманитария, чужда или непонятна мысль, что истина, может быть, и одна, но вот правда у каждого своя.

Поучительно сравнить между собой методы рассуждений, применяемые в математических и в гуманитарных науках. На самом деле речь идёт здесь о двух типах мышления, и человеку полезно быть знакомым с каждым из них. Автор не берётся (потому что не умеет) описать эти типы, но попытается проиллюстрировать на двух примерах своё ви́дение их различия. Пример первый. Все знают, что такое вода, — это вещество с формулой H_2O. Но тогда то́, что мы все пьём — это не вода. Разумеется, в повседневной речи и математик, и гуманитарий и то́, и то́ называет водою, но в своих теоретических рассуждениях первый как бы тяготеет к тому, чтобы называть водою лишь H_2O, а второй — всё, что имеет вид воды.

Потому что математик изучает идеальные объекты, имеющие такой же статус, как, скажем, круги и треугольники, которых ведь нет в реальной природе; гуманитарий же изучает предметы более реалистические. Боюсь, впрочем, что этот пример слишком умозрителен и способен отчасти запутать читателя. Вот другой, уже не умозрительный, а взятый из жизни пример. Имеется строгое (кстати, в наиболее отчётливой форме сформулированное Колмогоровым) определение того, что такое ямб. Мы имеем здесь в виду не *ямбическую стопу* **та-тА**, понимание которой не вызывает вопросов, а *ямбическую строку*, которая может состоять отнюдь не из одних только ямбических стоп (как иногда ошибочно думают): любая ямбическая стопа может быть всегда заменена пиррихием **та-та** (здесь оба слога безударны), а в особых случаях, впервые чётко указанных Тредиаковским, и спондеем **тА-тА** (здесь оба слога ударны). Если в стихотворении встречается отклонение от законов, которым обязана подчиняться ямбическая строка, то с точки зрения математика это уже не ямб. Однако для многих филологов стихотворение, содержащее не слишком много нарушений, не перестаёт быть ямбическим — в то время как математик назовёт его всего лишь похожим на ямб, ямбоподобным.

По-видимому, математики, которых специально обучают обращению с абстракциями, начинают мыслить отчасти по-особому. Некоторые из них перестают это замечать и начинают думать, что так мыслят все. Другие же математики достаточно реалистически осознают ограниченность применения своих представлений к реальным ситуациям и с удовольствием рассказывают анекдоты, высмеивающие тех математиков, которые эту ограниченность не замечают (или не желают замечать). Вот три примера таких анекдотов.

Жена говорит мужу-математику: «Купи батон, а если будут яйца, купи десяток». Муж приносит десять батонов. (Действительно, сказанное женой имеет — на формальном уровне — два смысла, и муж воспользовался тем из них, который аналогичен смыслу фразы: «Купи батон, а если хватит денег, купи десяток».)

Летящие на воздушном шаре заблудились в критической для них ситуации, и им жизненно необходимо знать, где они находятся. Завидев человека внизу, они крикнули ему: «Где мы?». Человек внизу оказался математиком, и его ответом было: «Вы на воздушном шаре». (Более длинный вариант анекдота таков. Спрошенный, прежде чем ответить, подумал, и тогда один из унесённых ветром воздухоплавателей сказал: «Ясно, что этот человек — математик. Во-первых, он подумал, прежде чем дать ответ. Во-вторых, его ответ был совершенно точен и совершенно бессмыслен».)

Пассажиры поезда наблюдают в окно нескончаемые стада белых овец. И вдруг замечают чёрную овцу, повернувшуюся к мчащемуся поезду боком. «О, здесь бывают и чёрные овцы!» — восклицает один из пассажиров. «По меньшей мере одна овца с по меньшей мере одним чёрным боком», — поправляет его другой, математик.

«Сказка ложь, да в ней намёк! Добрым молодцам урок». Эти анекдоты весьма поучительны: в них в наглядной и сжатой форме выражена идея о том, что чрезмерная точность может быть вредной, может мешать адекватному восприятию текста. Здесь — основа для уважительного диалога между гуманитарием и математиком, диалога, полезного для обеих сторон. В этом диалоге математик обучает гуманитария… — нет, не так, не обучает, а делится с собеседником своими представлениями о важности точности, причём не только точности слов, о которой говорил ещё Декарт, процитированный нами в эпиграфе, но и точности синтаксических конструкций. Математик в этом диалоге пытается передать гуманитарию свою способность увидеть логический каркас текста. Гуманитарий же делится с математиком своими соображениями о важности неточности, он объясняет математику, что и «плоть» текста, натянутая на его логический каркас, и контекст, в котором возникает текст, не менее существенны, чем упомянутый каркас. Окружающий мир, говорит гуманитарий, аморфен и расплывчат, и потому неточные, расплывчатые тексты и образы более приспособлены для адекватного его отражения, нежели тексты и образы математически точные.

V

Ряд положений языкознания может быть изложен с математической точностью. (А, скажем, для литературоведения подобный тезис справедлив разве что в применении к стиховедению.) В то же время именно на уроках математики учащиеся могли бы приучаться правильно выражать свои мысли на своём родном языке. Уроки языка и уроки литературы на родном языке проводятся, как правило, одним и тем же учителем. На наш взгляд, было бы полезнее несколько отделить лингвистику от литературоведения. И уже совсем крамольная идея — объединить, хотя бы в порядке эксперимента, язык и математику, с тем, чтобы один и тот же учитель преподавал и математику, и родной язык. Некоторые уважаемые коллеги автора этих строк нашли эту фантастическую идею ужасающей. Поэтому спешу объясниться.

Прежде всего, идея эта не столько крамольная, сколько утопическая и относится к некоторому идеальному будущему. Будущее, как известно, подразделяется на обозримое и необозримое. В обозримом будущем объединение уроков языка и уроков математики нереально хотя бы потому, что преподавателей, способных осуществить такое объединение, на сегодняшний день не существует. Если же говорить о будущем необозримом, то можно предполагать, что сама технология обучения в этом будущем кардинально изменится и окажется мало похожей на сегодняшнюю. Так что высказанное предложение обозначает всего лишь вектор движения, и притом не движения реальной организации образования, а движения мысли. Это как показ изделий высокой моды или выставки и конкурсы бумажной архитектуры, которые хотя и не предполагают реализации образцов одежды или архитектурных проектов, но ценятся дизайнерами реальной одежды и реальной архитектуры.

Что до «движения мысли», то здесь надлежит сказать следующее.

Среди многочисленных функций языка можно выделить две: передавать информацию и передавать эмоции. Разумеется, в реальном использовании языка названные функции переплетены. Тем не менее, при всей их нераздельности наличествует и некая неслиянность, и можно попытаться разделить их как в обучении языку, так и в его преподавании. Функция передачи эмоций сближает язык с литературой (думается, что, когда говорят о «великом и могучем», имеют в виду именно эту функцию). Действительно, вся стилистика, всевозможные художественные средства языка, и, в частности, такие локальные средства, как тропы (метафоры, метонимии, гиперболы и т. п.), — всё это относится столько же к ведомству лингвистики, сколько к ведомству литературоведения. Поэтому названные темы могут изучаться на лингвистико-литературоведческих уроках. Нас же будет интересовать функция бесстрастной передачи информации; она воплощается в таких текстах, которые один из основоположников отечественного программирования Андрей Петрович Ершов называл *деловой прозой*. К деловой прозе относятся, в частности, естественнонаучные тексты[4] (и прежде всего математические), юридические тексты, тексты делопроизводства, инструкции. Деловая проза занимает всё большее место в нашей жизни и потому должна быть предметом, которому учат в школах. Соответствующее преподавание могло бы происходить на уроках родного языка или же на специальных уроках, посвящённых чистой, то есть не несущей эмоции, информации.

Обучение деловой прозе заключается в обучении правильно ею пользоваться, то есть правильно составлять и правильно понимать, иначе говоря, правильно выражать мысль посредством слов и правильно находить в словах выраженную ими мысль. Это особенно важно для правильного понимания инструкций. Их понимание может вызывать проблемы.

Приведём одну из таких проблем, случившихся на практике.

Чтобы стать членом некоего общества гуманитарной направленности, надо пройти процедуру голосования на имеющиеся вакансии. Правом голоса обладают все члены общества, голосование проводится турами. Положение о выборах было написано математиками. Оно гласит:

> Для избрания членом общества необходимо получить не менее 2/3 голосов лиц, принявших участие в голосовании, и не менее половины от списочного состава общества. Кандидат считается избранным в данном туре голосования, если в этом туре он получил необходимое для избрания число голосов и число всех кандидатов, получивших в этом туре такое же или большее число голосов, не превышает числа вакансий по данной специальности, оставшихся незаполненными в предыдущих турах (в первом туре — числа всех имеющихся вакан-

4 Было бы хорошо, если бы и некоторые гуманитарные тексты, в частности все тексты исторической науки, писались с такой же безоценочной бесстрастностью.

> сий). Если в первом туре голосования число избранных кандидатов по данной специальности оказалось меньше, чем число вакансий по этой специальности, то проводится второй тур голосования. Если по результатам первого и второго туров остались незаполненные вакансии по данной специальности, то проводится третий тур голосования.

Случилось так, что при выборах на единственную вакансию каждый из кандидатов X и Y получил во втором туре не менее 2/3 голосов лиц, принявших участие в голосовании, и не менее половины списочного состава. При этом Y получил больше голосов, чем X. Два вопроса: избран ли кто-нибудь в этом туре, и если избран, то кто? надо ли проводить третий тур? Эксперимент показал, что математики отвечают на этот вопрос, как правило, верно, тогда как гуманитарии, как правило, неверно. Верные ответы состоят в том, что X не избран, избран Y и что третий тур проводить не надо. Это обосновывается следующим рассуждением. Имеются два условия избрания. Первое условие — получить необходимое количество голосов: не менее 2/3 голосов участвующих в голосовании и не менее половины от списочного состава. Второе условие — количество N всех кандидатов, получивших в этом туре такое же или большее число голосов, не превышает числа P вакансий. В нашем примере первое условие выполнено для обоих кандидатов. Посмотрим, что происходит со вторым условием. В нашем примере число вакансий P равно 1. Для X второе условие не выполнено, поскольку для этого кандидата $N = 2$ и тем самым N превышает P. Для Y второе условие выполнено, поскольку для этого кандидата $N = 1$ и тем самым N не превышает P. В реальности же был проведён третий тур, в котором избранным оказался X.

Напомним, что электорат состоял из гуманитариев. Мораль этой истории такова: текст положения о выборах, логически и лингвистически безупречный, всё же обладает тем недостатком, что реальный гуманитарный электорат понимает его (по крайней мере, отдельные его фрагменты) с трудом, или вовсе не понимает, или понимает неправильно. По-видимому, текст стоило бы переписать с учётом этого обстоятельства. Так что упрёк можно предъявить не только гуманитариям, не понявшим инструкцию, но и математикам, её составлявшим. Хотя текст инструкции безупречен с логической точки зрения и смысл его однозначен, он, этот текст, составлен без учёта возможных психологических трудностей его восприятия.

В понимании деловой прозы главное — это понимание синтаксических конструкций. Вот пример на сравнительное понимание таких конструкций студентами-математиками и студентами-гуманитариями. Рассмотрим два утверждения: «каждый из присутствующих знает хотя бы один из следующих двух языков — папуасского и ирокезского» и «среди присутствующих есть некто, кто не знает ни папуасского, ни ирокезского». Абсолютное большинство студентов-математиков не испытывают никаких затруднений в понимании того, что каждое из этих утверждений равносильно отрицанию другого. Большое число студентов-гуманитариев испытывают такие затруднения.

Следует, однако, подчеркнуть, что реальная фраза на естественном языке состоит не только из её логического каркаса. Каркас этот облачён в мягкую (а то и пульсирующую студенистую) плоть, каковая плоть весьма существенная для адекватного восприятия фразы. Что и было продемонстрировано приведёнными выше анекдотами о математиках.

VI

В последние годы получило заметное распространение преподавание математики студентам гуманитарных специальностей. Если иметь в виду интересы такого преподавания, то понимание математиком способов мышления гуманитариев становится важно не только в общефилософском, но и в совершенно практическом аспекте. Чтобы преподавание было успешным, преподаватель-математик должен понимать, как предмет воспринимается его учениками-гуманитариями. Вот простой пример. Отношение называют *рефлексивным*, коль скоро всякий предмет, для которого данное отношение осмысленно, находится в этом отношении к самому себе. Пример рефлексивного отношения: ‘жить в том же городе’: каждый живёт в том же городе, что он сам (не исключено, впрочем, что некоторые сочтут предложение «NN живёт в том же городе, что он сам» бессмысленным). Будет ли рефлексивным отношение ’находиться неподалёку’? Опрошенные мною математики (притом отнюдь не математические логики) отвечали, что будет: каждый предмет находится неподалёку от самого себя. Гуманитарии же — да и просто обычные люди, нематематики, — в большинстве своём расценивают высказывание «нечто находится неподалёку от самого себя» либо как ложное, либо как бессмысленное. Причина такого расхождения, надо полагать, заключается в следующем. «Неподалёку» означает 'на малом расстоянии' (но смысл слова этим не ограничивается, о чём будет сказано ниже). Математики свободно оперируют расстоянием ноль, на каковом расстоянии любой предмет находится от самого себя. Для нематематика же, в том числе для гуманитария, нулевых расстояний не бывает. Беседуя как-то с дамой, мастером по маникюру и педикюру, я спросил её, находится ли предмет неподалёку от самого себя. Получив, к немалому своему удивлению, положительный ответ, я спросил о расстоянии между предметом и им самим и удивился ещё более: ответом был ноль. Тогда я задал вопрос об образовании моей собеседницы. Оказалось — высшее техническое по специальности «гидравлика», с достаточно большим курсом математики. Всё стало на свои места. Даже если её и не обучали в этих курсах расстоянию ноль, то даваемая в них общая система понятий и терминов не могла не выработать мысли о возможности такого расстояния.

Математики, в большинстве своём, не замечают, что слово «неподалёку» означает нечто большее, чем малость расстояния. Напомним, что отношение называется *симметричным*, коль скоро выполняется следующее условие: всякий раз, когда какой-то предмет находится в этом отношении к другому, то и этот второй предмет находится в том же отношении к первому; примеры симметричных отношений: 'жить в том же городе', 'быть родственниками'. По наблюдению автора этих строк, для большинства математиков отношение 'находиться неподалёку' является симметричным. Но анализ естественного языка показывает, что значение словосочетания «находиться неподалёку» отнюдь не симметрично. Соответствующее наблюдение сделал выдающийся американский лингвист Леонард Талми. Вот что пишет Талми по этому поводу[5]:

5 *Leonard Talmy*. Toward a Cognitive Semantics. — Vol. 1. The MIT Press, 2000. — P. 314. ⟨http://linguistics.buffalo.edu/people/faculty/talmy/talmyweb/Volume1/chap5.pdf⟩

Можно было бы ожидать, что такие два предложения, как

(a) *Велосипед находится неподалёку от дома*;

(b) *Дом находится неподалёку от велосипеда*.[6]

будут синонимичны, на том основании, что они всего-навсего выражают две инверсные формы некоторого симметричного отношения. Отношение это выражает не что иное, как малость расстояния между двумя объектами. На самом же деле эти два предложения вовсе не означают одно и то же. Они *были бы* синонимичными, если бы они выражали *только* указанное симметричное отношение. Однако, в дополнение к этому, (a) содержит несимметричное указание, что один из объектов (а именно дом) имеет местоположение [set location] в пределах некоторой рамки [reference frame] (в качестве таковой здесь подразумевается данная окрестность, весь мир и тому подобное), и используется в целях сообщения о местоположении другого объекта (а именно велосипеда). Соответственно, местоположение этого другого объекта есть переменная (для рассматриваемого примера это так и есть, поскольку в разных ситуациях велосипед окажется в разных местах), чьё частное значение и составляет предмет интереса.

Что касается предложения (b), то оно содержит противоположное указание. Это указание, однако, не вписывается в привычную картину мира, что́ и заставляет предложение (b) выглядеть странным и тем самым ясно демонстрирует его отличие от (a).

Из разбора Талми в действительности видно, что обычный человек (в том числе гуманитарий) полнее и глубже понимает смысл русского слова *неподалёку* (а именно, слышит во всей полноте заключённый в нем «семантический звук», а потому и отвергает фразу, где он прозвучать не может) — глубже, чем типичный математик. Типичный математик слышит в этом слове только те элементы, которые ему профессионально близки (да ещё зачастую учит гуманитария быть таким же полуглухим).

6 В оригинале: «The bike is near the house» и The house is near the bike».

VII

Различие в понимании слов составляет существенную часть барьера, упомянутого в заголовке настоящего очерка. И следует признать, что подавляющая часть людей находится по ту же сторону барьера, что и гуманитарии. Честнее было бы сказать, что гуманитарии просто пользуются общенародными значениями слов. (Подозреваю, правда, что, когда в гуманитарном собрании звучат слова *дискурс, парадигма, экзистенциальный* и им подобные, затесавшийся на собрание математик получает редкую возможность насладиться своим единством с большинством человечества.) Можно выделить два фактора, вызывающие указанное различие.

Первый, очевидный фактор состоит в том, что математики пользуются точной терминологией, а в качестве терминов нередко используют слова обычного языка, придавая им совершенно новый смысл. Например, слова *кольцо* и *поле* обозначают в математике алгебраические структуры определённого вида, ничего общего не имеющие с обручальными кольцами и засеянными полями. Подобные явления следует квалифицировать как омонимию, а омонимия, как правило, легко устраняется контекстом, и потому правильное понимание того, какое значение слова имеется в виду, обычно не является проблемой[7]. Математики настолько привыкли к свободному заимствованию общеупотребительных слов для использования в качестве сугубо математических терминов, что бывают склонны искать особый, «математический» смысл в самых обычных словах. Вот иллюстрация к сказанному. Механико-математический факультет Московского университета, 1950-е годы. Идёт научный семинар, руководимый знаменитым математиком Сергеем Львовичем Соболевым (сейчас его имя носит Институт математики Сибирского отделения РАН). До слегка задремавшего Соболева доносятся слова докладчика: «А теперь я должен ввести целый ряд обозначений». Соболев просыпается и спрашивает: «Простите, какой ряд вы называете целым?». (Для тех чита-

7 Математикам, впрочем, иногда нравится обыгрывать указанную омонимию в каламбурах: *И до боли жаждет воли / Истомившийся от бега / По борелевскому полю / Измеримых по Лебегу*. Те множества, которые являются измеримыми по Лебегу, действительно образуют борелевское поле, но бежать по нему, разумеется, невозможно.

телей, которые незнакомы с математическим термином *ряд*, поясню, что в математике рядом называется последовательность из бесконечного числа членов, подлежащих суммированию.) В подобных случаях долг гуманитария — напомнить математику, что обычные слова имеют значения и за пределами математического жаргона.

Второй фактор наблюдается в тех случаях, когда математический смысл слова, заимствованного из естественного языка, близок к обычному смыслу этого слова, но не совпадает с этим обычным смыслом. Так, математическое понимание слова *угол* заимствовано из обыденного понимания этого слова, однако эти понимания не совпадают даже в простейшем случае угла между двумя прямыми линиями (не говоря уже об угле комнаты): обыденное понимание вряд ли примирится с углом в ноль градусов. В подобных случаях выбор правильного значения может оказаться затруднительным. Этот фактор более глубок и заключается, по-видимому, в том, что занятия математикой и сопряжённое с ними систематическое использование точной терминологии приводят к изменениям психологии — по крайней мере, в части восприятия слов. Этот фактор и проявился в нашем примере со словом *неподалёку*.

Пожалуй, существует и третий фактор, не упомянутый нами по той причине, что он, возможно, проявляется лишь в одном (но очень важном) слове. Фактор этот заключается в том, что для обозначения одного важнейшего — и важнейшего не только для математики! — понятия в русском языке отсутствует нужное слово. В математике понятие, о котором идёт речь, обозначается словом *ложь*.

Слово *ложь* происходит от глагола *лгать*, каковой факт отражается в его определении в толковых словарях: «неправда, намеренное искажение истины». Подчеркнём здесь слово «намеренное». Знаменитый «Энциклопедический словарь» Брокгауза и Ефрона в одноименной статье прямо указывает на аморальность лжи:

> **Ложь** — в отличие от заблуждения и ошибки — обозначает сознательное и потому нравственно предосудительное противоречие истине. Из прилагательных от этого слова безусловно дурное значение сохраняет лишь форма *лживый*, тогда как *ложный* употребляется также в

> смысле объективного несовпадения данного положения с истиною, хотя бы без намерения и вины субъекта; так, *лживый вывод* есть тот, который делается с намерением обмануть других, тогда как *ложным выводом* может быть и такой, который делается по ошибке, вводя в обман самого ошибающегося.

Мы видим, что в значение русского существительного *ложь* непременно входит субъект и его злонамеренность. Но субъект со своими намерениями чужд математике.

Вместе с тем в математике ощущается острая потребность в слове, обозначающем любое неистинное утверждение. В качестве такого слова и выбрано слово *ложь*. Таким образом, математики употребляют это слово, лишая его какой-либо нравственной оценки и отрывая от слова *лгать*. Заметим, что английский язык располагает двумя словами для перевода русского слова *ложь*: это *lie* для обычного, общенародного, бытового его смысла, включающего сознательную злонамеренность, и *falsehood* для смысла математического. Заметим также, что в русском языке существует слово, обозначающее любое истинное утверждение, вне зависимости от намерений, с которыми это утверждение сделано, — это слово *истина*. Можно сказать «дважды два четыре — это истина» и при этом не иметь в виду никого, кто бы собирался нас просветить. Но в математике можно сказать и «дважды два пять — это ложь», не имея в виду никого, кто бы стремился нас обмануть. (Вот тема для любителей философии языка: истина в русском языке объективна, а ложь субъективна.)

VIII

Было бы замечательно, если бы математик был способен понимать точку зрения гуманитария, в значительной степени отражённую в языке гуманитария, а гуманитарий — точку зрения математика, в ещё большей степени отражённую в языке математика. И то и другое трудно. Ещё труднее не требовать признания одной из точек зрения единственно правильной. Таким образом, и гуманитариев, и математиков следует призвать сделать шаги навстречу друг другу. И начинать надо с преподавания, руководствуясь следующими словами А. Н. Колмогорова:

> ...Учитель (для конкретности — преподаватель математики) находится в том же положении, как учёный, приходящий **со своей проблематикой** в уже существующий вычислительный центр с определённым набором вычислительных машин, запасом заготовленных (с другими целями!) программ, даже со штатом программистов. Задача его состоит в том, чтобы обучить этот сложный механизм выполнить новую работу, используя все свои уже заготовленные заранее механизмы, программы, навыки.

IX

Обсуждая вопрос о преподавании кому-либо чего-либо, полезно иметь представление о целях этого преподавания. Среди таких целей можно выделить две:

1) получение *образования*;

2) подготовка к *профессии*.

Следует заметить, что в ряде стран различие названных целей отчётливо отражено в организации образовательных учреждений. Так, в России разделение целей организационно оформлено на уровне среднего образования, во Франции — на уровне высшего. В современной России, как это было ещё в СССР, образование призваны давать средние школы; в СССР к профессии готовили техникумы, каковые в современной России переименованы, кажется, в колледжи (слава богу, что не в академии). Во Франции образование дают *Университеты*, профессии же — так называемые *Высшие школы* («Grandes écoles»), среди которых наиболее известны Высшая нормальная школа (École normale supérieure) и Политехническая школа (École Polytechnique). В университеты берут без экзамена всякого, лишь бы он проживал в данном регионе и имел надлежащую справку о среднем образовании; в высшие школы — суровый конкурс, и по крайней мере в некоторых из них платят приличную стипендию.

X

Разумеется, грань между повышением общеобразовательного уровня и профессиональной подготовкой зачастую стирается. Скажем, знакомство с аксиоматическим методом значимо не только в плане общего образования.

Разъясним, прежде всего, как в рамках этого метода трактуется слово *аксиома*. В повседневном языке аксиома понимается, скорее всего, как утверждение настолько очевидное, что не требует доказательств. Однако авторитетный толковый словарь Ушакова вообще отрицает принадлежность слова *аксиома* повседневному языку, относя один из оттенков его значения к математике, а другой — к языку книжному.[8] Словари же иностранных слов — и словарь Крысина[9], и словарь трёх авторов[10] — если и впускают это слово в повседневный язык, то лишь в значении, квалифицируемом этими словарями как переносное: «Бесспорное, не требующее доказательств положение». Для основного же, даваемого первым значения слова *аксиома* эти словари дают близкие друг другу толкования: «Исходное положение, принимаемое без доказательств и лежащее в основе доказательств истинности других положений» (словарь Крысина), «Отправное, исходное положение какой-либо теории, лежащее в основе доказательств других положений этой теории, в пределах которой оно принимается без доказательств» (словарь трёх авторов). Таким образом, в том своём значении, которое является основным для математиков, аксиомы функционируют не как положительные утверждения, а как формулировки предположений. В современной математике развитие какой-либо аксиоматической теории происходит так: предположим, что верно то, что записано в аксиомах, тогда окажется верным то-то и то-то.

Сущность аксиоматического метода останется непонятной без предъявления содержательных примеров. Сообщим поэтому, как выглядит фрагмент одной из аксиоматических систем для геометрии. Сперва объявляется, что существуют два типа объектов; объекты первого типа называются *точками*, объекты второго типа называются *прямыми*. Что это за объекты, как они «выглядят», намеренно не объясняется. Далее объявляется, что существует некоторое отношение, называемое *отношением*

8 «Положение, принимаемое без доказательств (мат.). || Очевидная истина, утверждение, принимаемое на веру (книжн.)» (*Д. Н. Ушаков, редактор*. Толковый словарь русского языка).

9 *Л. П. Крысин*. Толковый словарь иноязычных слов. — 2-е изд., доп. — М.: Рус. яз., 2000.

10 *Е. Н. Захаренко, Л. Н. Комарова, И. В. Нечаева*. Новый словарь иностранных слов. М.: Азбуковник, 2003.

инцидентности, в которое могут вступать между собой отдельно взятая точка и отдельно взятая прямая. Что это за отношение, опять-таки не объясняется, сообщается лишь, что если даны точка и прямая, то они могут быть *инцидентны* друг другу, а могут быть и не инцидентны. Если точка инцидентна прямой, то говорят, что точка *лежит на* этой прямой, а прямая *проходит через* эту точку. Наконец, указываются свойства, соединяющие между собой вводимые сущности: в нашем случае — точки, прямые, отношение инцидентности. Формулировки таких свойств и называются в математике аксиомами — в нашем случае *аксиомами геометрии*. Приведём для примера три из аксиом геометрии. Первая: для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих точек. Вторая: существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Третья: для любой прямой и любой не лежащей на ней точки существует не более одной прямой, проходящей через эту точку, но не проходящей ни через одну из точек, лежащих на исходной прямой (эта аксиома называется *аксиомой о параллельных*). Эти три аксиомы вкупе с другими аксиомами, говорящими о свойствах точек, прямых и отношения инцидентности, а также свойствах некоторых других объектов и отношений, позволяют развить науку, называемую геометрией. При этом никакими иными сведениями, кроме тех, которые записаны в аксиомах, пользоваться не разрешается. Предпринимались попытки создать аксиоматику и для некоторых нематематических дисциплин, скажем, для фонологии. В качестве исходных понятий брались такие объекты, как *звук языка* и *фонема*. В качестве исходных отношений — *отношение равносмысленности*, в каковом отношении могли находиться две цепочки звуков языка и *отношение принадлежности*, в каковом отношении могли находиться звук языка и фонема. Одна из аксиом постулировала, что если при замене в какой-то цепочке звуков языка звука X звуком Y оказалось, что результирующая цепочка не равносмысленна исходной, то звуки X и Y не могут принадлежать одной и той же фонеме (эта аксиома называется *аксиомой минимальной пары*, поскольку пара цепочек, не являющихся равносмысленными и различающихся лишь тем, что в одной и той же позиции в них стоят разные звуки, называется *минимальной парой*). Другая аксиома постулировала, что если, напротив, в любой цепочке звуков такая замена приводит к равносмысленной цепочке, то звуки X и Y непременно принадлежат одной и той же фонеме (эта аксиома называется *аксиомой свободного варьирования*, поскольку про звуки X и Y, во всех случаях допускающие замену одного другим, так что результирующая цепочка оказывается равносмысленной исходной, говорят, что они находятся в *отношении свободного варьирования*).

И геометрический, и фонологический примеры демонстрируют главное, что характеризует аксиоматический метод. Это главное состоит в следующем. Природа вводимых в рассмотрение предметов и отношений намеренно не разъясняется, они остаются *неопределяемыми*. Единственное, что про них предполагается известным, — это те связи между ними, которые записаны в аксиомах. Вся дальнейшая информация выводится из аксиом путём логических умозаключений. Таким образом, человек, собирающийся развивать теорию на основе сформулированных аксиом, должен сделать над собой психологическое усилие и забыть всё, чему его учили в школе по геометрии и в вузе по фонологии. Другое дело, что он ни в коем случае не должен забывать этого на стадии составления списка аксиом, коль скоро он желает, чтобы эти аксиомы отражали реальность.

В обоих наших примерах невозможно было выделить из списка аксиом геометрии такие, которые характеризовали бы только точку, или только прямую, или только инцидентность. Аналогично среди аксиом фонологии невозможно выделить такие, которые характеризуют, скажем, только звук речи или только равносмысленность. Набор аксиом характеризует, как правило, исходные понятия не по отдельности, а в их совокупности — через объявление их связей между собой.

Аксиоматический метод может рассматриваться как один из способов введения новых понятий, наряду с широко известными демонстрационным и вербальным. *Демонстрационный* способ заключается в предъявлении достаточного числа примеров, не только положительных, но и отрицательных. Желая, например, ввести понятие ‘кошка’, нужно показать достаточное количество кошек, но также, скажем, собак и кроликов, объясняя, что эти собаки и кролики не суть кошки. *Вербальный* способ опирается на словесную дефиницию. Вот два примера вербального способа: 1) определение слова *хвоя* из толкового словаря Ушакова: «Узкий и упругий в виде иглы лист у некоторых пород деревьев»; 2) определение термина *простое число*: «Натуральное число называется простым, если оно, во-первых, больше единицы и, во-вторых, делится без остатка только на единицу и на само себя» (интересно, кстати, сколько чисел, как простых, так и простыми не являющихся, надо предъявить, чтобы понятие простого числа могло быть усвоено демонстрационным способом[11]). *Аксиоматический* способ определения, скажем, понятия ‘точка’ предполагает определение этого понятия одновременно с понятиями ‘прямая’ и ‘инцидентно’. Все эти три понятия определяются не порознь, а совокупно, через ту информацию о них, которая записана в аксиомах. Хотя записанная в аксиомах информация, очевидно, вербальна, аксиоматический способ существенно отличается от вербального. Ведь при вербальном способе новое понятие определяется через старые, уже известные; при аксиоматическом способе несколько новых понятий определяются друг через друга на основе тех соотношений, кои связывают их в аксиомах.

XI

Сходным образом, изучение математических моделей реальных явлений позволяет осознать границы моделирования, задуматься над соотношением между моделью и моделируемой реальностью. Но помимо этой философской миссии, изучение математических моделей явлений экономики, психологии или лингвистики позволяет и лучше понять сами моделируемые явления. Можно согласиться с теми, кто не устаёт напоминать об ограниченности математических моделей. Действительно, когда говорят о точности такой модели, то подразумевают её точность как математического объекта, то есть точность «внутри себя». Когда говорят о точности модели, речь не идёт о точности описания, то есть о точном соответствии модели с описываемым фрагментом действительности. Под ограниченностью математических моделей как раз и понимается их неспособность охватить описываемое ими явление во всей его полноте. Однако нельзя согласиться с теми, кто в этой ограниченности видит их слабость. Скорее, в этом их сила. Математическая модель должна быть проста, а потому огрублена. Проиллюстрирую сказанное таким примером. Все знают, что Земля — шар. Те, кто получил

11 Задача для развлечения не математика: продолжить последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,…

некоторое образование, знают, что Земля — эллипсоид вращения, сдавленный у полюсов. Геодезисты знают, что Земля — геоид; геоид есть геометрическая фигура, поверхность которой совпадает с поверхностью Земли без учёта таких мелких деталей, как горы и т. п. (более точно — совпадает с той поверхностью, которую образовывал бы Мировой океан, если бы все материки и острова были бы залиты водой, или, ещё более точно, были бы срезаны по уровню Мирового океана). Мы имеем здесь три математические модели, с возрастающей точностью описывающий моделируемый ими объект — форму планеты Земля. Самая важная из этих моделей — самая первая, она же самая неточная. Хотя для прокладки авиамаршрутов нужна, возможно, и вторая, а для запуска баллистических ракет даже третья.

Полное понимание реального строения окружающей нас Вселенной вряд ли когда-либо будет достигнуто. Однако именно математические модели приближают нас к такому пониманию и — это главное — объясняют, каким это строение **может быть**. А ведь если вдуматься, то понимание некоторых сторон устройства пространственно-временного континуума (а может, вовсе и не континуума, а чего-то дискретного) существенно для выживания человечества — или, точнее, того, во что превратится человечество в далёком будущем.

Роль математической модели для представителя гуманитарной науки можно сравнить с ролью скелета для художника, рисующего человека. Художник не изображает скелет, скелет скрыт и от него, и от зрителя картины, но, чтобы грамотно изобразить человеческую фигуру, полезно представить её себе в виде скелетного каркаса, обросшего плотью. Так, гениальный математик Андрей Колмогоров очертил скелет понятия падежа, указав, в частности, основные исходные представления, необходимые для образования этого понятия (представления о синтаксически правильной фразе, о состоянии предмета, о выражении состояний предмета контекстами и т. п.). Гениальный лингвист Андрей Зализняк обрастил этот скелет лингвистической плотью в своём знаменитом трактате «Русское именное словоизменение».

Тут самое время заметить, что скелеты всё же представляют скорее интерес для анатомов. И при всей пользе, которые могут извлечь художники от рисования скелетов, на картинах всё-таки изображаются скелеты, обросшие плотью. В качестве поучительного отступления перескажу свой разговор с Ираклием

Луарсабовичем Андрониковым. Я спросил его, как ему удаётся добиваться не только голосового, но и портретного сходства с имитируемыми людьми. Он объяснил, что главное в похожести лица — это не геометрическая форма, которой он, разумеется, достичь не может, а мимика.

XII

Из только что сказанного как бы напрашивается вывод, что главная цель обучения гуманитариев математике состоит в обучении их математическим моделям или хотя бы в создании фундамента для такого обучения. Однако это не так.

Главная цель обучения гуманитариев математике — психологическая. Эта цель состоит не столько в сообщении знаний и даже не столько в обучении методу, сколько в изменении — нет, не в изменении, а в *расширении* психологии обучающегося, в привитии ему строгой дисциплины мышления (слово «дисциплина» понимается здесь, разумеется, не в значении ‘учебный предмет’, а в смысле приверженности к порядку и способности следовать этому порядку). Как сказал Ломоносов, «математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит».

Помимо дисциплины мышления я бы назвал ещё три важнейших умения, выработке которых должны способствовать математические занятия. Перечисляю их в порядке возрастания важности: первое — это умение отличать истину от лжи (понимаемой в обсуждённом выше объективном математическом смысле, то есть без ссылки на намерение обмануть); второе — это умение отличать смысл от бессмыслицы; третье — это умение отличать понятное от непонятного.

Вливание элементов математической психологии в сознание гуманитариев (недруги такого вливания назвали бы его индоктринизацией, а то и интоксикацией) может осуществляться как в *прямой* форме, путём обучения в классах и аудиториях, так и в форме *косвенной*, путём проведения совместных исследований, участия математиков в проводимых гуманитариями семинарах и т. п.; к косвенным формам влияния относятся даже вопросы, задаваемые математиками на лекциях на гуманитарные темы. Здесь на память приходит известный случай из истории психологии. В конце XIX века в одной из больших аудиторий Московского университета была объявлена лекция на тему «Есть ли интеллект у животных?». Просветиться на такую интригующую тему собралось несколько десятков, а то и сотен слушателей. Председательствовал заслуженный ординарный профессор математики Московского университета Николай Васильевич Бугаев — президент Московского математического общества (с 1891 года по 1903 год) и отец Андрея Белого. Перед началом доклада он обратился к аудитории с вопросом, знает ли кто-либо, что такое интеллект. Ответ оказался отрицательным. Тогда Бугаев объявил, что, поскольку никто из присутствующих не знает, что такое интеллект, лекция о том, есть ли он у животных, состояться не может. Это типичный пример косвенного воздействия математического мышления на мышление гуманитарное. Подобные формы воздействия также являются одним из элементов математического образования.

За последние полвека произошло заметное уменьшение количества непонятных или бессмысленных утверждений в отечественной литературе по языкознанию; полагаю, что это произошло не без влияния — как прямого, так и главным образом косвенного — математики. Случается, впрочем, и языковедам поправлять математиков. Наиболее существенную из таких поправок осуществил в отношении математика Фоменко лингвист Зализняк.[12]

Разумеется, математики не претендуют на то, чтобы ответить на проблемы, возникающие в гуманитарных науках (хотя именно математику Колмогорову принадлежит первое научное определение лингвистического понятия ‘падеж’ — см. выше). Но они помогают гуманитариям лучше уяснить суть этих проблем и критически отнестись к попыткам их решения.

Роль математики в подготовке гуманитариев можно сравнить с ролью строевой подготовки в обучении воина. Все эти ружейные арти́кулы, повороты, строевой шаг и иные движения, которым обучают молодого бойца, вряд ли находят применение в реальном бою. Но во всех армиях мира они рассматриваются как необходимая основа всякого военного обучения, поскольку приучают выполнять команды. (Кстати, оперирование с мате-

12 *А. А. Зализняк*. Лингвистика по А. Т. Фоменко // Успехи математических наук. 2000 г., т. 55, вып. 2. С. 162–188. И подробнее: *А. А. Зализняк*. Из заметок о любительской лингвистике. — М.: Русскій міръ, 2009. — 240 с.

матическими алгоритмами также приучает выполнять команды. «Сначала я вам скажу, что я делаю, а [только] потом объясню зачем» — это программное заявление содержится в одной из книг по методике математики.)

Строевая подготовка тренирует дисциплину — только не дисциплину мышления, как это делает математика, а дисциплину действий.

Другая аналогия — тренировка моряков на парусных судах. Не знаю, как сейчас, но во времена моей молодости всякий, кто обучался в гражданских мореходных вузах, в обязательном порядке проходил плавание на парусниках — и это притом, что применять полученные парусные навыки впоследствии ему вроде бы не приходилось. Тем не менее, обучение этим навыкам считалось (а может быть, и считается до сих пор) необходимой частью морской подготовки, необходимым тренингом. Сходным тренингом — тренингом мышления, наведением порядка в мозговых извилинах — служит математика.

XIII

Спросите «человека с улицы», в чём состоит аксиома о параллельных прямых и в чём состоит открытие Лобачевского. Эксперимент показывает, что на первый вопрос ответ будет в большинстве случаев таким (причём и в России, и в Америке): аксиома состоит в том, что параллельные прямые не пересекаются. А на второй вопрос ответ будет, скорее всего, таким: Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются. При этом отвечающий, как правило, знает, что прямые **называются** параллельными, если они лежат в одной плоскости и **не пересекаются**. В значительном числе случаев ответившего можно убедить в ошибочности обоих ответов. В случае вопроса об аксиоме многие (но не все!) понимают, что коль скоро слово «параллельные» — это синонимичное название для непересекающихся прямых, то объявлять непересекаемость параллельных аксиомой довольно бессмысленно (это всё равно как объявить такую аксиому: «всякий красный предмет является красным»; впрочем, ощутимое количество людей не имеют ничего против такой аксиомы). Что до открытия Лобачевского, то, в чём бы оно ни состояло, ясно, что прямые линии, называемые параллельными, пересечься не могут.

Вопрос про аксиому о параллельных не является, разумеется, вопросом на испытание памяти. Точно так же вопрос об открытии Лобачевского не является вопросом на проверку эрудиции. Оба вопроса — на понимание смысла делаемых утверждений. Строго говоря, вся ситуация лежит здесь не в сфере математики, а в сфере упоминавшейся выше логики русского или иного естественного языка. И это довольно типично: значительная часть того, что происходит на уроках математики для гуманитариев, как раз и должна, по нашему разумению, состоять в обсуждении этой логики, а отчасти и в обучении ей. Математики впитывают семантику неосознанно, поскольку занятия математикой невозможны без чётко сформулированных утверждений. Столь же неосознанно у гуманитариев семантика размывается — не без влияния расплывчатых текстов гуманитарных наук. (И для гуманитария такая размытость семантики зачастую необходима.)

Диалог математика с гуманитарием о параллельных прямых мы считали бы полезным и поучительным для обеих сторон. Вот ещё пример такого полезного и поучительного диалога.

Математик. Возьмём прямую линию и точку на ней. Существует ли на этой прямой точка, ближайшая к нашей точке и лежащая справа от неё?

Гуманитарий. Да, существует.

Математик. Вы не возражаете, если исходную точку мы обозначим буквой A, а ближайшую к ней справа буквой B?

Гуманитарий. Не возражаю.

Математик. Вы согласны с тем, что любые две различные точки можно соединить отрезком?

Гуманитарий. Согласен.

Математик. Значит, можно соединить точки A и B и получить отрезок AB. Правильно?

Гуманитарий. Правильно.

Математик. А согласны ли вы с тем, что всякий отрезок имеет середину?

Гуманитарий. Согласен.

Математик. Значит, и у отрезка AB есть середина. Но ведь эта середина явно ближе к точке A, чем точка B. Меж тем, точка B — ближайшая к A. Как быть?

Гуманитарий. (*Не знает, что сказать.*)

Математик. Я лишь хотел обратить ваше внимание, что не могут одновременно быть истинными все три утверждения о существованиях: «Для всякого отрезка существует его середина», «Любые две различные точки можно соединить отрезком» и «Для точки на прямой линии существует ближайшая к ней точка справа».

Надо признать, впрочем, что ответ «Да, существует» на вопрос о ближайшей точке встречается хотя и весьма часто, но всё же реже, чем приведённые выше ответы о сущности аксиомы о параллельных и открытия Лобачевского.

Результатом диалога о ближайшей точке должно стать отнюдь не только уяснение гуманитарием того, что для данной точки не существует ближайшей к ней точки справа; несуществование такой точки — это, в конце концов, всего лишь математический факт. Не менее, а скорее даже более важным является уяснение математиком тех деталей психологии гуманитария, которая заставляет его считать, что такая точка существует. Дело в том, что представление о ‘ближайшем’ формируется у гуманитария (как и у всякого человека) не на основе изучения такого сложного образования, как континуум точек на прямой, а на основе наблюдений материальных предметов окружающего мира. Наблюдение же, скажем, окон дома или кресел в театральном зале не оставляет сомнений в наличии ближайшего справа окна или кресла (предвидя ехидное возражение мелочного педанта, прибавим: если только исходное окно или кресло не является крайним). Из сказанного можно сделать такое заключение: наш пример с ближайшей точкой есть конкретное проявление некоей общей трудности, имеющей философский характер. Трудность состоит в следующем. Математика изучает идеальные сущности (такими сущностями являются, в частности, точки), но обращается с ними, как если бы они были реальными предметами физического мира (например, применяет к точкам понятие ‘ближайший’). Но в таком случае математик обязан отдавать себе отчёт, что подобный квазиматериальный подход к абстракциям, если не сделать специальных оговорок, влечёт перенесение на эти абстракции шлейфа таких представлений, которые абстракциям не свойственны, а заимствуются из обращения с физическими предметами. Что до упомянутых «специальных оговорок», они делаются явно, а подсознательно впитываются математиками в процессе их обучения. В случае точек на прямой указанный шлейф включает в себя представление о точках на прямой как о мельчайших бусинах, нанизанных на натянутую нить. Разумеется, в рамках такого представления естественно предполагать наличие ближайшей точки и даже быть уверенным в таком наличии. Порядок точек на прямой является, в математической терминологии, *плотным порядком*; термин «плотный» означает, что для любых двух участвующих в этом упорядочении объектов, каковыми в данном случае служат точки прямой, найдётся объект (в данном случае точка) между ними. В окружающем нас материальном мире плотных порядков не встречается.

Вот другой пример на ту же тему. Одной из математических абстракций является пустое множество. Само понятие ‘множество’, подобно понятию ‘натуральное число’, является одним из первичных, неопределяемых математических понятий, познаваемых из примеров. Синонимом математического термина *множество* является слово *совокупность*; объекты, входящие в какую-либо совокупность, она же множество, называются её (соответственно его) *элементами*. Слово «множество» может навести на мысль, что в множестве должно быть много элементов — тем более, что главное общеязыковое значение этого слова действительно выражает эту мысль, как, например, во фразе «Можно указать множество причин…». Эта ложная мысль разрушается уже заявлением, что «множество» (в математическом смысле) и «совокупность» суть синонимы: ведь количество элементов в совокупности может быть и малым. Заметим, кстати, что переводы термина «множество» на французский язык («ensemble») и на английский язык («set») не содержат идеи ‘много’. Зададимся теперь вопросом, может ли совокупность состоять из одного элемента. Математик ответит категорическим «да». Для гуманитария же минимально возможное количество элементов совокупности — это два. Но математики свободно оперируют и *пустым множеством*, вовсе не содержащим элементов. На занятиях по математике гуманитарии быстро усваивают это понятие (в частности, соглашаются, что пустое множество единственно: пустое множество крокодилов и пустое множество планет — это одно и то же множество).

Для математика наименьшим числом, возможным при ответе на вопрос «Сколько?», является число ноль. Для нематематика же наименьшим числом, возможным при ответе на вопрос

«Сколько?», является число один. Скажем, если в зоопарке всего лишь один слон, то слово «один» будет естественным ответом на вопрос «Сколько слонов в этом зоопарке?». Хотя нематематик поймёт ответ «ноль» на вопрос «Сколько в этом бассейне крокодилов?» и даже, возможно, сам в состоянии дать подобный ответ, но всё же он скорее ответит так: «Да нет тут никаких крокодилов!». И уж точно он не задаст вопрос «Сколько?», не спросив предварительно «Есть ли в этом бассейне крокодилы?», и только после положительного ответа спросит, сколько их.

Как в примере с точками, так и в примере с пустым множеством общение математика с гуманитарием здесь более поучительно для математика, нежели для гуманитария. Потому что заставляет математика осознать, что он, математик, даже в таких простых, казалось бы, вопросах, ушёл в мир абстрактных сущностей и тем самым удалился от общечеловеческого словоупотребления и образа мыслей.

Поэтому математику негоже с высокомерием относиться к высказываниям гуманитария. Напротив, ему полезно осознать, что это он приписывает своим абстракциям такие свойства, которые в жизни не встречаются. Заметим, что именно неограниченное, а потому незаконное перенесение на математические абстракции слов и смыслов, заимствованных из реальной жизни, и приводит, в конце концов, к *математическим* парадоксам, а именно к так называемым парадоксам теории множеств. Эти парадоксы появляются там, где с чрезвычайно высокими абстракциями начинают обращаться так, как обращаются обычно с реальными предметами.

Заметим, что ту же, по существу, природу — природу незаконного перенесения — имеют и парадоксы, которые обычно называют *логическими*, хотя правильнее было бы называть их *лингвистическими*. Так мы и будем их называть. Как только что отмечалось, математические парадоксы возникают при попытке оперировать с математическими сущностями путём обычных словоупотреблений. Лингвистические парадоксы возникают, напротив, при попытке оперировать с обычными словоупотреблениями так, как если бы они выражали точные математические понятия. Обычные словоупотребления, как правило, имеют расплывчатый смысл, и попытка придания им точного смысла как раз и приводит к парадоксам. Приведём для ясности три известных лингвистических парадокса.

Парадокс кучи. Это один из самых известных и древних парадоксов. Ясно, что если из кучи песка удалить одну песчинку, то то́, что останется, всё еще будет кучей. Но ведь производя удаление достаточное количество раз, мы дойдём до одной единственной песчинки, каковая кучу не образует. Где же граница между кучей и не кучей? Ответ очевиден: слово «куча» имеет расплывчатый смысл, и потому искать точные границы этого смысла бесполезно.

Парадокс наименьшего числа. Возьмём «наименьшее натуральное число, которое не допускает определения посредством фразы, содержащей менее ста слов». С одной стороны, это число не допускает определения посредством менее ста слов. С другой стороны, взятая в кавычки фраза является его определением, причём таким, которое содержит менее ста слов. Разгадка в том, что мы обращаемся с выражением «определять натуральное число» так, как если бы оно имело точный смысл, какового в действительности оно не имеет. Достаточно задаться вопросом, какие слова можно использовать в определении. Можно ли, например, использовать названия редких растений, известные лишь узкому кругу ботаников, или специальные математические термины, или собственные имена людей (притом, что каждое такое имя принадлежит, как правило, нескольким людям)? Наш парадокс как раз и показывает, что обсуждаемому выражению точный смысл придать невозможно.

Парадокс гетерологичности. Назовём прилагательное гомологическим, если оно обладает тем свойством, которое это прилагательное выражает; в противном случае назовём его гетерологическим. Примеры: прилагательное «многосложный» само многосложно, и потому оно является гомологическим; прилагательное «односложный» не односложно, и потому оно является гетерологическим. Гомологическим или гетерологическим является прилагательное «гетерологический»? Если оно гомологическое, то, значит, оно обладает тем свойством, которое оно выражает, а свойство это — ‘гетерологичность’; значит, рассматриваемое прилагательное — гетерологическое. Если же оно гетерологическое, то, обладая выражаемым им свосством гетерологичности, оно должно квалифицироваться как гомологическое. Всё дело в том, что слова «гомологический» и «гетерологический» не обладают точным смыслом, в презумпции какового происходит рассуждение. Толкование этих слов опирается на толкование словосочетания «свойство, выражаемое прилагательным», а при толковании этого словосочетания возникают значительные трудности. Возьмём, для примера, прилагательное *простой*. Возможно ли недвусмысленно указать свойство, выражаемое этим прилагательным? Где граница между простыми и непростыми сущностями? И подпадают ли под это свойство простые дроби, простые числа, простые вещества, простые эфиры и василистник простой (являющийся растением семейства лютиковых)?

XIV

Вернёмся, однако, к тому, чем математика может быть полезна всем — в частности, гуманитариям.

К воспитываемой на уроках математики дисциплине мышления относится осознание отчётливого различия между истиной и ложью (в вышеуказанном математическом значении слова «ложь»), между доказанным и всего лишь гипотетическим: ведь нигде эти различия не проявляются с такой чёткостью, как в математике. Автору очень хочется сказать, что математика — единственная наука, где достигается абсолютная истина, но он всё же на это не решается, так как подозревает, что абсолютность истины не достигается нигде. Но в любом случае математические истины ближе к абсолютным, чем истины других наук. Поэтому математика — наилучший полигон для тренировки на истину. Истина — основной предмет математики.

Духовная культура состоит не столько в знаниях, сколько в нормах. Нормы проявляются прежде всего в противопоставлениях. Эстетика учит нас противопоставлению между прекрасным и безобразным, высоким и низким. Этика — между должным и недолжным, между нравственным, моральным и безнравственным, аморальным. Юриспруденция — между законным, правовым и незаконным, неправовым. Логика — между истинным и ложным. Но логика сама по себе не создаёт истин. Её законы носят условный характер: если то-то и то-то истинно, то неизбежно истинно то-то и то-то. (Точно так же теория вероятностей ни для какого события не назначает и не может назначать вероятности этого события, а лишь указывает, как по одним вероятностям вычислять другие. Например, она не утверждает, что при бросании монеты выпадение двух орлов подряд имеет вероятность одна четвёртая; она утверждает лишь, что если при одном бросании монеты выпадение орла имеет вероятность одна вторая и если результаты бросаний не зависят друг от друга, то выпадение двух орлов подряд имеет вероятность одна четвёртая.) Знаменитый силлогизм про смертность бедного Кая не утверждает, что Кай смертен, а утверждает лишь, что если все люди смертны и если Кай человек, то и он, Кай, смертен.

Истину же поставляют конкретные науки, в том числе математика. Кажется, что математика становится тем самым на одну доску с другими науками. Но нет, это не так: её и только её истины могут претендовать на приближение к абсолютности, и если они даже не абсолютны, то «почти» абсолютны.

Приходится, однако, признать — математику со вздохом, гуманитарию с удовлетворением, — что в этой приближённости математических истин к абсолютным состоит некоторая ограниченность математики. Потому что тот мир, который дан нам в ощущениях, более адекватно отображается скорее в истинах, достаточно удалённых от абсолютных. Даже казавшиеся незыблемыми законы Ньютона оказались пригодными лишь для сравнительно узкой полосы между микро- и макромирами, а вне этой полосы требующими замены законами теории относительности. Что уж говорить о так называемых прописных истинах гуманитарной сферы, будь то истины моральные или эстетические, которые с трудом поддаются, а то и вообще не поддаются оценке в терминах «верно» и «неверно».

XV

Казалось бы, что может быть важнее и первичнее, чем умение отличать истинные высказывания от высказываний ложных. Однако ещё более важным, ещё более первичным является умение отличать осмысленные высказывания от бессмысленных. Вот характерный пример бессмысленного высказывания: «рассмотрим совокупность *всех* слов, имеющих хотя бы одну общую букву». Бессмысленность этого заявления вызвана тем, что такой совокупности не существует. В самом деле, «рот» и «сыр» имеют общую букву эр и потому должны принадлежать этой совокупности. Слово «око» должно принадлежать этой совокупности, поскольку имеет общую букву со словом «рот», и не должно ей принадлежать, поскольку не имеет общих букв со словом «сыр». Мы потому назвали пример характерным, что подобные псевдоконструкции, ничего на самом деле не конструирующие, были довольно типичны для литературы по языкознанию несколько десятилетий назад. Возникало даже парадоксальное удовлетворение, когда некоторое утверждение можно было квалифицировать как всего лишь ложное, — чувство удовлетворения возникало потому, что ложность утверждения свидетельствовала о его осмысленности.

В диалоге преподавателя-математика со студентом-гуманитарием зачастую приходится просить студента вдуматься в то, что он только что сказал, и затем спросить его, понимает ли он то, что сам сказал. Не столь уж редко честные студенты после размышления в некоторой растерянности признаются, что не понимают.

Когда знаменитого педиатра доктора Спока спросили, с какого возраста следует воспитывать ребёнка, он, узнав, что ребёнку полтора месяца, ответил: «Вы уже опоздали на полтора месяца». Не следует ли способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного неназойливо прививать уже с начальных классов школы? И не является ли это главным в школьном преподавании?

Надо сказать, что для того, чтобы квалифицировать высказывание как ложное, бессмысленное или непонятное, надо, как правило, сделать некоторое усилие — иногда почти героическое: «как же так, уважаемый человек что-то говорит или пишет, а ты осмеливаешься его не понимать или, поняв, возражать». Не все и не всегда способны на такое усилие.

XVI

Способность к тому усилию, о котором только что говорилось, тренируется (во всяком случае, должна тренироваться) на уроках математики и при общении с математиками. Дело в том, что математика — наука по природе своей демократическая. На её уроках воспитывается — а при косвенном воздействии прививается — демократизм. Внешние формы такого демократизма произвели большое впечатление на автора этих строк в его первые студенческие годы, когда в конце 1940-х гг. он стал обучаться на знаменитом Мехмате — механико-математическом факультете Московского университета. Если почтенный академик обнаруживал, что выступающий вслед за ним студент собирается стереть с доски им, академиком, написанное, он с извинениями вскакивал с места и стирал с доски сам. Для профессора Мехмата было естественно самому написать и вывесить объявление; для профессора гуманитарного факультета это не было столь естественно. Эти внешние проявления косвенно отражают глубинные различия. Ведь математическая истина не зависит от того, кто её произносит, академик или школьник; при этом академик может оказаться неправ, а школьник прав. Реакция Колмогорова на третьекурсника, опровергнувшего его на лекции, была такова: он пригласил студента к себе на дачу и там покатался с ним на лыжах, накормил обедом и взял себе в ученики. С горечью приходится признать, что подобный демократизм имеет свои издержки. Указывает Андрей Анатольевич Зализняк[13]:

> Мне хотелось бы высказаться в защиту двух простейших идей [...]:
>
> 1) Истина существует, и целью науки является её поиск.
>
> 2) В любом обсуждаемом вопросе профессионал (если он действительно профессионал, а не просто носитель казённых титулов) в нормальном случае более прав, чем дилетант.
>
> Им противостоят положения, ныне гораздо более модные:
>
> 1) Истины не существует, существует лишь множество мнений (или, говоря языком постмодернизма, множество текстов).
>
> 2) По любому вопросу ничьё мнение не весит больше, чем мнение кого-то иного. Девочка-пятиклассница имеет мнение, что Дарвин неправ, и хороший тон состоит в том, чтобы подавать этот факт как серьёзный вызов биологической науке.

13 В кн.: Похвала филологии. М.: «Русский путь», 2007. Стр. 79. А также в кн.: *А. А. Зализняк*. Из заметок о любительской лингвистике. — М.: Русскiй мiръ, 2009. — С. 210.

Чем наука дальше от математики, чем она, так сказать, гуманитарнее, тем сильнее убедительность того или иного высказывания начинает зависеть от авторитета высказывающего лица. На гуманитарных факультетах подобная персонализация истины ещё недавно ощущалась довольно сильно. *Это верно, потому что сказано имяреком* или даже *Это верно, потому что сказано мною* — такие категорические заявления, высказанные в явной или, чаще, неявной форме, не столь уж редки в гуманитарных науках. (Как имярек в первой фразе, так и первое лицо во второй фразе обычно относились как раз к одному из тех «носителей казённых титулов», о которых говорит Зализняк.) В естественных науках и в математике подобные заявления невозможны. Впрочем, в тоталитарном обществе принцип приоритета того, кто на должность авторитета назначен властью, применялся, с печальными последствиями, и к естественным наукам — достаточно вспомнить лысенковщину. Проживи Сталин дольше, возможно, была бы заменена и таблица умножения. Попытки отменить, скажем, теорию относительности имели место в действительности.

Нет в математике и «царского пути». Здесь я ссылаюсь на известную историю, то ли подлинную, то ли вымышленную, которую одни рассказывают про великого математика Архимеда и сиракузского царя Гиерона, другие про великого математика Евклида и египетского царя Птолемея. Царь выразил желание изучить геометрию и обратился с этой целью к математику. Математик начал его обучать. Царь выразил недовольство тем, что его учат совершенно так же, в той же последовательности, как и всех других, не принимая во внимание его царский статус, каковой особый статус, по мнению царя, предполагал и особый способ обучения. На что математик, по преданию, ответил: **Нет царского пути в геометрии**.

Эпилог

Первоначальный, журнальный вариант этого очерка был напечатан в 2007 г. в виде статьи в декабрьском номере журнала «Знамя». Даже самые доброжелательные критики не могли не предъявить тексту упрёка в односторонности. Хотя и чувствуется, говорили они, что автор желает примирить «физиков» и «лириков» на основе презумпции равенства сторон, но на деле этого подразумеваемого равенства не получилось. Каковы бы ни были самые добрые намерения автора, в статье декларируемое преодоление барьера реально осуществилось путём агрессии с математической стороны: математическое проламывает барьер и, вторгшись на территорию гуманитарного, начинает устанавливать там свои порядки. Автор вынужден был признать справедливость критики. Готовя текст для включения в книгу «Апология математики», выпущенную издательством «Амфора» в 2009 г., он пытался эту критику учесть. Но всё равно получалось, что математик выступает в роли поучателя для гуманитария. Такое положение вещей автору определённо не нравилось и, главное, не отвечало его замыслу. Автор стал размышлять, почему так получилось. Результатами своих размышлений он и хотел бы поделиться с читателем в настоящем эпилоге.

Дело в том, что каждое из слов *математик* и *гуманитарий* употребляется в тексте в двух смыслах, или пониманиях. Эти смыслы не указаны явно, но могут, при желании, быть извлечены из контекста. Первое понимание подразумевает и математика, и гуманитария в их профессиональной сфере деятельности. Второе понимание подразумевает и того и другого в быту. При этом втором понимании объёмы терминов *математик* и *гуманитарий* расширяются. Говоря о поведении в быту, к *математикам* мы относим не только профессиональных математиков, но и просто людей с математически ориентированными мозгами; к *гуманитариям* относим почти всех остальных представителей человеческого рода.

Каждое из этих пониманий приводит к своему направлению преодоления барьера. Иными словами, выбор того или иного понимания определяет, с какой стороны происходит или должно происходить это преодоление — математическое ли влияет на гуманитарное, его математизируя, или же, напротив, гуманитарное влияет на математическое, его гуманизируя.

Условный математик вряд ли поможет гуманитарию в его бытовом поведении, но вот в профессиональной деятельности может помочь. Термин *условный математик* не следует понимать в вульгарном смысле математика, который нависает над гуманитарием и подаёт ему непрошенные советы. Этим термином обозначается здесь абстрактная персонификация математического. Математическое же может проявляться в разных формах, в том числе и в виде реального лица, в пессимальном случае действительно, увы, «нависающего над», а в случае оптимальном — в виде доброжелательного критика, обращающего внимание гуманитарного исследователя на недостаток, скажем, ясности, логики или точности. Наиболее успешный результат математического влияния, к которому надлежит стремиться, состоит в усвоении гуманитарием той дисциплины мышления, о которой шла речь в настоящем очерке, то есть в создании некоего небольшого условного математика в своём мозгу. (Теоретически усвоение дисциплины мышления должно происходить на уроках математики в школе, практически же этого не происходит, поскольку математика редко когда преподаётся интересно, да и вообще преподаётся не та математика, которой следовало бы обучать школьников.)

Гуманитарий же, напротив, вряд ли поможет математику в его профессиональной деятельности, но вот в бытовом поведении может помочь. Он, прямо или косвенно, может привить математику общечеловеческие нормы использования языка. Среди них — те нормы восприятия синтаксических конструкций, которые требуют учёта контекста («предлагаемых обстоятельств», как сказал бы Станиславский) и тем предписывают купить не десять батонов (как математик из приведённого в разделе IV анекдота), а десять яиц. А также нормы, регулирующие употребление отдельных слов — например, слова *неподалёку*, обсуждавшегося в разделе VI. Возможно, слово «норма», даже с эпитетом «общечеловеческая», здесь слишком узко. Потому что, скажем, рекомендации по составлению инструкций вряд ли поддаются регламентации, предполагаемой термином «норма». Ведь одна из главных рекомендаций состоит в том, что текст инструкции должен быть лёгок для понимания, а именно этой лёгкости была лишена электоральная инструкция, приведённая в разделе V. Безупречная с точки зрения синтаксиса и семантики и тем самым полностью устраивающая *математиков* (в широком смысле слова), она была, как показала практика, трудна для понимания *гуманитариями* (опять-таки в широком смысле слова) и тем самым неудачна. Лингвист сказал бы, что текст инструкции неудовлетворителен с точки зрения прагматики.

И ещё одно немаловажное обстоятельство. Основная форма влияния математического на гуманитарное, при всей роли школы (не реальной, впрочем, роли, а той, которая должна быть) и прочих общественных институтов, — это всё-таки личное влияние математика-человека. Такое положение вещей не может не представить математика в незавидной роли высокомерного поучателя, каковым он, в целом, не является. Напротив, основная форма влияния гуманитарного на математическое деперсонализирована и не выглядит как личное влияние какого-то гуманитария. Влияние гуманитарного на математическое осуществляется путём мощного давления среды, при условии, что эта среда, в широком смысле преимущественно гуманитарная, сумеет победить желание математика от неё отгородиться.

Приложение

Окончательный текст настоящего очерка возник в результате многочисленных дискуссий с Андреем Анатольевичем Зализняком. Ознакомившись с финальным вариантом, он прислал мне письмо, каковое, с любезного разрешения Андрея Анатольевича, и составляет содержание этого приложения.

Разрешите мне, раз уж я погружался в Ваш текст, порассуждать немного от себя на эти темы.

Об общеязыковом и математическом значении слов

Слова обычного языка с их значениями веками и тысячелетиями складывались на основе человеческой практики. Если в практической жизни человека какая-то шкала представлена только в определенных границах, то соответствующее слово получает значение, предполагающее эти границы (т. е. указание этих границ является одним из элементов этого значения).

Например, человек видит цвета только в определенном интервале длины волны. Аналогично со звуком.

И поэтому инфракрасное и ультрафиолетовое излучение обычный обиходный язык никак не может назвать цветом (каким-то еще одним цветом). Или ультразвук — звуком.

А наука (физика, математика) достигает понимания того, что та или иная шкала в действительности шире, чем ее практически известный людям интервал.

И вот возникает терминологическая проблема: как называть теперь в соответствующей науке всю шкалу и как называть ее непрактические (нетрадиционные) части?

Возможные решения таковы:

1) ввести новые термины (либо специально изобретенные, либо взятые из числа уже существующих слов языка, но не тех, которые обозначают практическую часть данной шкалы);

2) использовать обычные общеязыковые обозначения шкалы и ее элементов, объявив, что в науке им приписывается новое, более широкое значение;

3) то же, что 2, но без объявления о новом значении.

Физики, по-видимому, обычно идут по пути 1. Расширенная шкала цветов называется уже, если не ошибаюсь, шкалой длины волны и т. п. Ультрафиолет цветом называть не предлагается.

У математиков в деле счета практически известный человечеству интервал составляет от единицы до несколько неопределенной границы, имеющей последние числительные (тысяча?, тьма? может быть, миллион, хотя скорее он уже из умозрительной сферы). Этому соответствуют слова *число, количество, сколько*.

Обсуждавшееся нами слово *совокупность* по своему объему меньше указанных слов на единицу: его значение начинается с двух. Но это слово стоит не совсем в той же категории, что *число, количество, сколько*, — оно почти чуждо обычному обыденному языку, а принадлежит фактически уже либо официальному, либо научному (или полунаучному) узусу.

Математики в ходе истории совершили (уже в древности) такое же расширение практической шкалы, как в предшествующих примерах. В сторону увеличения количеств — с идеей бесконечности. И в сторону их уменьшения — с идеей сперва нуля, а затем отрицательных чисел.

Насколько я понимаю, они потом применяли такой же мыслительный ход — выявление общего принципа структуры некоторой цепочки элементов и его экстраполяцию (применение за рамками первоначального состава этой цепочки) — во многих других случаях. Например, в появлении отрицательных степеней, дробных степеней, мнимых чисел, новых измерений.

Но, в отличие от физиков, терминологическое решение у математиков обычно было типа 2 или даже 3. Например, и дробные, и отрицательные, и даже мнимые — все они называются *числа*.

Склонность к решению 3 в значительной мере коррелирована с представлением, что достигнутое наукой расширение значения некоторого понятия означает приближение к «более правильному» значению использованного для этого понятия общеязыкового слова. Например, что неправильно понимают слово *число* те, кто не знает, что числом является также и нуль и, скажем, минус единица. Соответственно, у математика легко может возникать представление, что он лучше простых носителей языка знает, что значат слова (если не все, то многие).

Всё это категорически не соответствует тому, что достигнуто лингвистикой, но имеет вполне прозрачную психологическую поддержку.

Проблема «ничего не сообщается»

Вы подчеркиваете, что при аксиоматическом методе «природа вводимых в рассмотрение предметов и отношений никак не разъясняется», о них ничего не сообщается.

Хочу обратить Ваше внимание на то, что гуманитарный читатель решительно не может воспринять эту Вашу фразу так, как Вы ее замыслили.

Причина — в словах! Если бы у Вас вместо *точки* была *папагиглемма*, а вместо *прямой* — *сепулька*, то Ваше заявление было бы полностью психологически оправданно.[14] Но когда Вы что-то говорите о точках и прямых, никакими силами носитель языка — нематематик не может освободиться от подсознательного ощущения, что он всё основное о характере обсуждаемых предметов знает, сколько бы Вы ни приказывали ему считать, что он ничего не знает, кроме аксиом. Как это он может ничего не знать о том, что такое точка или что такое прямая?! Пользуясь Вашей любимой максимой, «знание скрыть невозможно».

14 Андрей Анатольевич, конечно, совершенно прав. В моей статье «Апология математики», вошедшей в состав одноимённого сборника, так и сделано, только там, на с. 163, вместо слова *точка* использовано слово *куздра*, и слово *бокр* вместо слова *прямая*. — *В. У.*

Это — очень большая и очень глубокая трудность на пути Вашей пропаганды математичности. То, что математики узурпируют слова из общенародного фонда, сами обычно этого не осознавая (во всяком случае, не осознавая последствий этого), оборачивается одной из причин той самой их отгороженности, от которой Вы их приглашаете освободиться. Отгороженности, при которой пересечение барьера плохо дается как одной стороне, так и другой.

Владимир Андреевич Успенский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ГУМАНИТАРНОЕ:
ПРЕОДОЛЕНИЕ БАРЬЕРА

Подписано в печать 29.03.2011 г. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура Charter ITC. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Печ. л. 3. Тираж 1000 экз. Заказ № ????

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Красногорская типография».
143400, Московская обл., г. Красногорск, Коммунальный квартал, д. 2.