127. Площади

Площадь есть неотрицательная величина. Равные фигуры имеют равные площади. Если фигура разрезана на две фигуры, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур. Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон.

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*.

127.1. Докажите, что (**а**) площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; (**б**) площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту; (**в**) площадь ромба равна половине произведения его диагоналей; (**г**) площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту.

127.2. Каждая сторона треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 0,01?

127.3. Основания равнобедренной трапеции равны a и b, острый угол равен 45°. Найдите площадь трапеции.

127.4. Какую часть площади треугольника отсекает от него средняя линия?

127.5. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики. Верно ли обратное (если они равновелики, то четырехугольник — трапеция)?

127.6. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

127.7. Докажите, что если диагональ четырёхугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырёхугольника.

127.8. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M, для которых (**а**) треугольники AMB и ABC равновелики; (**б**) треугольники AMB и AMC равновелики; (**в**) треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

127.9. Точка M делит сторону AB треугольника ABC в отношении $AM : MB = m : n$. Докажите, что площади треугольников CAM и CBM относятся как $m : n$.

127.10. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

127.11. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC или их продолжениях, причём $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что площади треугольников AMN и ABC относятся как $(m/n) \cdot (p/q)$.

127.12. Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении $2 : 1$, считая по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

127.13. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

127.14. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон выпуклого четырёхугольника, площадь которого равна 1.

127.15. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

127.16. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной c, и острым углом 15°.

127.17. В параллелограмме середина каждой стороны соединена с концом следующей стороны; получился внутренний параллелограмм. Докажите, что его площадь составляет $1/5$ площади данного параллелограмма.

127.18. Произвольный четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найдите площадь четырёхугольника.

127.19. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше её основания AD. Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

127.20. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делит его на два равновеликих четырёхугольника. Докажите, что эти стороны параллельны.

127.21. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PDC равна половине площади четырёхугольника $ABCD$, то стороны BC и AD параллельны.

127.22. (Теорема Пифагора) Доказать, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

* * *

127.23. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AM = CN$ и $AN = BM$. Докажите, что площадь четырехугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN.

127.24. Внутри квадрата со стороной, равной 1, произвольно берут 101 точку, причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/100$.

127.25. Найдите геометрическое место точек X, лежащих внутри или на сторонах трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD, для которых $S(XAB) = S(XCD)$.

127.26. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

127.27. Точка внутри правильного $2n$-угольника соединена с вершинами. Возникшие $2n$ треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных (**а**) для $n = 4$; (**б**) для $n = 3$; (**в**) для произвольного n.

127.28. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

127.29. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.