131. Теорема Фалеса

131.1. (Теорема Фалеса) Если на одной из сторон угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне образуются также равные отрезки.

131.2. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

131.3. Верна ли теорема, обратная теореме Фалеса?

131.4. (Обобщение теоремы Фалеса) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки. Докажите эту теорему для случая, когда отрезки на одной из сторон угла соизмеримы, т.е. имеют общую меру. (Отрезок e называется общей мерой отрезков a и b, если он целое число раз укладывается в этих отрезках.)

131.5. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

131.6. Даны отрезки a, b и c. Постройте такой отрезок x, что $x : a = b : c$

131.7. Сторона AB треугольника ABC разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если $BC = 12$.

131.8. Каждая из сторон AB и AC треугольника ABC разделена соответственно точками M и N в отношении 2:3, считая от точки A. (а) Докажите, что $MN \| BC$. (б) Найдите MN, если $BC = 20$.

131.9. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причем $AM : MB = AN : NC = m : n$ (m и n — натуральные). Найдите отношение $MN : BC$.

131.10. Основания трапеции равны a и b. Каждая боковая сторона трапеции разделена на три равных части. Найдите отрезки, соединяющие соответствующие точки деления.

131.11. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей, и через третью точку деления (считая от вершины меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b.

131.12. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N — вторые точки деления на боковых сторонах, считая от вершин меньшего основания. Найдите MN, если основания трапеции равны a и b.

131.13. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответствеено a и b. Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.

131.14. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причем $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN, если основания AD и BC равны соответственно a и b.

131.15. Через точку на стороне четырехугольника проведена прямая, параллельная диагонали, до пересечения с соседней стороной четырехугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная другой диагонали, и т.д. Докажите, что пятая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной.

131.16. Через точку на стороне треугольника проведена прямая, параллельная другой стороне, до пересечения с третьей стороной треугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная первой стороне треугольника и т.д. Докажите, что (а) если исходная точка сопадает с серединой стороны треугольника, то четвертая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной; (б) если исходная точка отлична от середины стороны треугольника, то седьмая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной.

131.17. Докажите, что диагонали трапеции делятся точкой пересечения на отрезки, пропорциональные основаниям.

131.18. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

131.19. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 3 : 2$, а $AM : MC = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

131.20. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AC, а точка L на стороне BC расположена так, что $BL : LC = 2 : 5$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AB, пересекает отрезок BM в точке O, причем $BO : OM = 7 : 4$. Найдите отношение, в котором точка M делит сторону AC.

131.21. (Замечательное свойство трапеции) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

131.22. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.

131.23. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1.