132. Подобные треугольники

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны:

$$\Delta ABC \simeq \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется коэффициентом подобия.

132.1. Докажите, что прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две другие его стороны (или их продолжения), образует с этими сторонами треугольник, подобный данному.

132.2. (Признаки подобия треугольников) Докажите, что два треугольника подобны, если (а) два угла одного из них соответственно равны двум углам другого; (б) две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны; (в) три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

132.3. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $1/(n+1)$ всей диагонали.

132.4. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

132.5. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

132.6. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

132.7. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

132.8. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

132.9. Через точку персечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

132.10. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри трапеции, делился бы ее диагоналями в отношении $1:3:1$.

132.11. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

132.12. AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что: (а) треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C; (б) треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.

132.13. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Найдите B_1C_1, если $\angle A = 60^o$ и $BC = 6$.

132.14. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

132.15. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC.

132.16. Две окружности пересекаются в точках A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

132.17. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

132.18. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l, параллельная AC. Прямая KM пересекает прямую l в точке P, а прямую AC в точке N. Найдите BP и CN, если $AC = a$.

132.19. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$. Точка K - середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

132.20. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = (2/3) \cdot AC$. Точка K лежит на стороне AB, причем $AK : KB = 3 : 2$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

132.21. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2 \cdot CN$. Точка M лежит на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ?

132.22. Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и BC треу гольника ABC, причем $BK : KA = 1 : 4$, $BM : MC = 3 : 2$. Прямая MK пересекает продолжение стороны AC в точке N. Найдите $AC : CN$.

132.23. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K. Найдите отношения $DK : KM$, $CK : KN$.

132.24. AD — медиана треугольника ABC. Точка E - лежит на стороне AB, причем $AE : EB = 1 : 2$. Отрезки AD и CE пересекаются в точке M. Найдите отношения $AM : MD$, $CM : ME$.

132.25. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если $BK : KC = 1 : 2$, $AE : EB = 2 : 3$?

132.26. На медиане AD треугольника ABC взята точка M, причем $AM : MD = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

132.27. Докажите, что биссектриса треугольника делит основание на отрезки, пропорциональные боковым сторонам.

132.28. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C ?

132.29. В равнобедренный треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB. Найдите длину стороны ромба, если $AB = BC = 12$, $AC = 6$.

132.30. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса A пересекается со стороной BC в точке D, такой, что $DA = DB$. Найдите сторону BC.

132.31. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC и точке M. Докажите, что $BM/MC = AB/AC$.

132.32. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $BD/AB = DC/AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

132.33. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

132.34. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C, лежащей на окружности, до касательных равны a и b. Найдите расстояние от точки C до прямой AB, где A и B - точки касания.

* * *

132.35. (Теорема Менелая) Дан треугольник ABC. Прямая пересекает его стороны AB, BC и продолжение стороны AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

132.36. (Теорема Чевы) Пусть точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

132.37. В треугольник вписана окружность. Точки касания со сторонами треугольника соединены с противоположными вершинами. Докажите что три полученных отрезка пересекаются в одной точке.

132.38. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b. Найдите диаметр окружности.

132.39. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$ и $AK = 6$.

132.40. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = 1$.

132.41. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \| AB$.

132.42. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC.

132.43. Сторона треугольника равна среднему арифметическому двух других сторон. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис треугольника, параллельна этой стороне.

132.44. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой («прямая Эйлера»), причем точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2 \cdot MO$.

132.45. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D - центр правильного треугольника PMB, точка E - середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC.

132.46. Через центр O окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P, и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q. Вычислите длину отрезка BP, если известны длины сторон треугольника $AB = c$, $BC = a$, и длина отрезка BQ равна p.

132.47. Через точку D, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, параллельная AC, и пересекающая сторону BC в точке E. Докажите, что AE, CD и медиана, проведенная через вершину B, пересекаются в одной точке.

132.48. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трем высотам.

132.49. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B. Окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

132.50. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b, c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.