138. Площадь (2)

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; p — полупериметр.

Формулы площади треугольника.

$S = (1/2) \cdot ab \cdot \sin\gamma$, $S = pr$, $S = abc/(4R)$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***формула** Герона*).

138.1. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

138.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

138.3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°, а сторона AB равна 3. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE.

138.4. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

138.5. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

138.6. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей, равна 2.

138.7. Стороны треугольника равны a, b, b. Найдите высоту, проведенную к стороне, равной b.

138.8. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

138.9. В треугольник со сторонами a и b и углом α между ними вписан полукруг с диаметром на третьей стороне. Найдите его радиус.

138.10. а) В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM.

б) Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите биссектрису, проведенную из вершины этого угла.

138.11. Найдите площадь трапеции

а) с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4;

б) с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.

138.12. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найдите площадь треугольника ABC.

138.13. Найдите площадь трапеции

а) с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12;

б) с основаниями 6 и 3 и диагоналями 7 и 8.

138.14. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

138.15. Площадь треугольника ABC равна S, $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC.

138.16. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.

138.17. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K, причем угол AKB равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

138.18. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.

138.19. В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

138.20. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.

138.21. Основание равнобедренного треугольника равно a, а высота, опущенная на боковую сторону, равна h. Найдите площадь треугольника.

138.22. Углы треугольника равны α, β и γ, а площадь равна S. Найдите высоты треугольника.

138.23. Углы треугольника равны α, β и γ, а площадь равна S. Найдите стороны треугольника.

138.24. Точки B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, площадь которого равна S, а угол BAC равен α. Найдите площадь треугольника AB_1C_1.

138.25. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

138.26. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

138.27. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA. Косинус угла ACB равен $0,8$ и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

138.28. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол AKD, равный 30°. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна P.

138.29. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE. Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

138.30. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен $4,5$. Найдите площадь трапеции.

138.31. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найти длины сторон параллелограмма.

138.32. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE.

138.33. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC. Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

138.34. В четырехугольнике $ABCD$ острый угол между диагоналями равен α. Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Найдите отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырехугольника $ABCD$.

138.35. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

138.36. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

138.37. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\sqrt{3}/4$.

138.38. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60°$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC.

138.39. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k.

138.40. Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка P, а на стороне AC взята точка M так, что $\angle APB = \angle BMA = 45°$. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Известно,что площади треугольников BOP и AOM равны между собой, $BC = 1$, $BO = \sqrt{2}/2$. Найдите площадь треугольника ABC.

138.41. Пусть r_1 — радиус вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны $BC = a$, p — полупериметр треугольника ABC, S — его площадь. Докажите, что

а) $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3$, где r — радиус вписанной окружности, а r_1, r_2 и r_3 — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC; б) $S = \sqrt{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}$.

138.42. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной около ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.

138.43. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $1/\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника ABC.

138.44. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным $30°$, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}/3$.

138.45. На отрезке AB лежат точки C и D, причем точка C — между точками A и D. Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AMB, если известно, что величина угла CMD равна α, а площадь треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

138.46. *(Формула Брахмагупты)* Докажите, что если стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c и d, то его площадь S может быть вычислена по формуле: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,где $p = (a+b+c+d)/2$ — полупериметр четырехугольника.

138.47. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен $120°$. Найдите площадь треугольника.

138.48. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол BAC равен $120°$. Угол ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

138.49. В окружность радиуса 7 вписан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, площадь треугольника BCD в два раза меньше площади треугольника ABD, $\angle ADC = 120°$. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

138.50. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

138.51. Точки K, L, M, N и P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если $LM \| KN$, $KM \| NP$, $MN \| LP$, а угол LOM равен $45°$, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

138.52. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B, равным $30°$, и катетом $CA = 1$, проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом $15°$ к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найдите площадь треугольника CDF.

138.53. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B, середины сторон AB и BC, а также касается стороны AC треугольника ABC. Угол BAC острый, и $\sin \angle BAC = 1/3$. Найдите площадь треугольника ABC.

138.54. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Докажите, что трапеция и треугольник равновелики.

138.55. Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь этого правильного треугольника.

138.56. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Докажите, что его площадь меньше $1/\sqrt{3}$.

138.57. В трапеции основания равны a и b, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α. Найдите площадь трапеции.

138.58. Стороны четырехугольника равны a, b, c и d. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

138.59. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leqslant (ac + bd)/2$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

138.60. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

138.61. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$. Найдите стороны треугольника ABC.

138.62. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC построены как на диаметрах полуокружности S_1, S_2 и S_3 по одну сторону от AC. Пусть D — точка на S_3, проекция которой на AC совпадает с точкой B. Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках E и F соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3, проведенной через точку D.

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

в) Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a.

138.63. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.