139. Применение тригонометрии

139.1. В треугольнике ABC угол ABC равен α, угол BCA равен 2α. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Найдите отношение AM к AB.

139.2. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

139.3. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

139.4. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если $LM \| KN$, $KM \| NP$, $MN \| LP$, а угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

139.5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите хорду DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45^\circ$.

139.6. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC.

139.7. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите биссектрису AD.

139.8. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найдите радиус окружности.

139.9. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

139.10. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение которых равно $1 + \sqrt{2}$, считая от вершины. Найдите острые углы треугольника.

139.11. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

139.12. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, $AC : AB = 3 : 2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB. Найдите косинус угла ACB.

139.13. На окружности радиуса 12 с центром в точке O лежат точки A и B. Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K, а стороны BC — в точке H. Расстояние от точки M до прямой KH равно 3. Найдите величину угла AOB.

139.14. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в $1{,}5$ раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найдите отношение периметров этих треугольников.

139.15. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

139.16. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $AC = BC$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояние 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC.

139.17. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2}/3$. Найдите углы трапеции.

139.18. В прямоугольном треугольнике ABC из точки E, расположенной в середине катета BC, опущен перпендикуляр EL на гипотенузу AB. Найдите углы треугольника ABC, если $AE = \sqrt{10} \cdot EL$ и $BC > AC$.

139.19. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $AC : A_1C_1 = 5 : \sqrt{3}$. Вершины A_1 и B_1 расположены соответственно на сторонах AC и BC, а вершина C_1 — на продолжении стороны AB за точку B, причем A_1B_1 перпендикулярно BC. Найдите угол ABC.

139.20. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD; длины сторон равны: $AB = 1$, $CD = 4$, $AD = 5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD?

139.21. Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Найдите площадь этого треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

139.22. В остроугольном треугольнике ABC высота AD, медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O. Найдите $\angle C$, если $OE = 2 \cdot OC$.

139.23. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8.

139.24. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

139.25. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD, имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневписанная окружность треугольника ACD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на ее боковую сторону.

139.26. Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие внешние касательные. Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина — на другой, а каждая из боковых сторон касается одной из данных окружностей. Докажите, что высота треугольника равна сумме радиусов окружностей.