140. Центральная симметрия

140.1. Докажите, что при центральной симметрии каждый луч переходит в противоположно направленный с ним луч.

140.2. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

140.3. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два квадрата. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через центр параллелограмма.

140.4. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

140.5. Найдите координаты образа точки $M(x;y)$ при симметрии относительно а) начала координат; б) точки $A(a;b)$.

140.6. Пусть a и b — некоторые числа. Каждой точке $M(x;y)$ координатной плоскости поставим в соответствие точку $M'(x';y')$, для которой $x' = 2a - x$ и $y' = 2b - y$. Докажите, что это соответствие есть центральная симметрия плоскости. Каковы координаты центра симметрии?

140.7. Выпуклый многоугольник имеет центр симметрии. Докажите, что сумма его углов делится на $360°$.

140.8. Дан угол и точка внутри него. С помощью центральной симметрии проведите через данную точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы этой точкой пополам.

140.9. Дан параллелограмм и точка M на одной из его сторон. Постройте ромб, одна вершина которого — точка M, а остальные три вершины лежат на трех других сторонах параллелограмма.

140.10. Проведите через общую точку A окружностей S_1 и S_2 прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

140.11. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой, заключенный между двумя данными окружностями, делился бы этой точкой пополам.

140.12. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2. С помощью циркуля и линейки проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

140.13. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

140.14. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.

140.15. При симметрии относительно точки пересечения медиан треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при пересечении образуют шестиугольник $KLMNOP$. Докажите, что диагонали KN, LO и MP этого шестиугольника пересекаются в одной точке и найдите стороны шестиугольника, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

140.16. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам,

равны между собой.

140.17. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD, касаются.

140.18. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

140.19. *(Теорема Монжа)* Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

140.20. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN равен $90°$. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A).