Оглавление

Предисловие

Нижеследующие задачи предлагались на семинарах по курсу алгебры, прочитанному проф. Э. Б. Винбергом в Математическом Колледже Независимого Московского Университета в 1992–1994 гг. Разумеется, студентам предлагались также задачи из широко известных сборников Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского, И. В. Проскурякова, под ред. А. И. Кострикина и других. Некоторые такие задачи приведены и здесь.

При составлении настоящего задачника авторы старались следовать двум принципам: свести к минимуму чисто вычислительные и стандартные задачи, а кроме того, по возможности, объединить задачи в циклы, последовательное решение которых помогло бы студенту овладеть идеей какой-либо конструкции или доказать теорему, отсутствующую в распространенных учебниках. Этим объясняется наличие в задачнике «разносолов», вроде алгебр Хопфа, инвариантов узлов или представлений полной линейной группы.

Обозначения

Z_n — кольцо вычетов по модулю n

$\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел

$\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел

$v_p(x)$ — показатель, с которым простое число p входит в каноническое разложение рационального числа x

$\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов

$\operatorname{Spec} A$ — спектр коммутативного кольца A

$f \sim g$ — эквивалентность квадратичных форм

P_n — пространство многочленов степени не выше n

$\mathbb{P}^n$ — n-мерное проективное пространство

$\mathbb{A}^n$ — n-мерное аффинное пространство

$[A, B] = AB - BA$ — коммутатор элементов кольца

G_{tors} — подгруппа кручения группы G

G_{free} — свободная подгруппа абелевой группы G

rk — ранг (матрицы или модуля)

1. Комплексные числа, многочлены, формальные ряды

1.1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}, \quad \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}, \quad \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}.$$

1.2. Найти такие $x, y \in \mathbb{R}$, что $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$.

1.3. Решить уравнения

$$z^2 = i, \qquad z^2 = 5-12i, \qquad z^2 + (2i-7) + 13 - i = 0.$$

1.4. Найти все z, для которых

а) $z^2 = \bar{z}$, б) $z^n = \bar{z}$.

1.5. Найти тригонометрическую форму чисел

$$1+i, \quad \sin\alpha + i\cos\alpha, \quad 2+\sqrt{3}+i, \quad \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}.$$

1.6. Вычислить:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}, \quad (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^k.$$

1.7. Решить уравнения: $|z| - z = 1+2i, \quad |z| + z = 2+i$.

1.8. Доказать, что

а) если $|z| < 1$, то $|z^2 - z + i| < 3$,

б) если $|z| \leqslant 2$, то $1 \leqslant |z^2 - 5| \leqslant 9$.

1.9. Доказать, что всякое комплексное число $z \neq -1$ с $|z| = 1$ может быть представлено в виде

$$z = \frac{1+it}{1-it}$$

для некоторого $t \in \mathbb{R}$.

1.10. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, то $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$, при $m \in \mathbb{Z}$.

1.11. Вычислить в алгебраической форме

$$\sqrt{8\sqrt{3}i - 8}, \quad \sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}, \quad \sqrt[3]{1+i}.$$

1.12. Выразить в радикалах $\cos(2\pi/5)$, $\sin(4\pi/5)$.

1.13. Вычислить суммы:

$$1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots, \qquad \binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\ldots,$$
$$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{9}\binom{n}{5}-\ldots,$$
$$1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\cdots+n\varepsilon^{n-1}, \text{ где } \varepsilon^n=1.$$

1.14. Вычислить суммы

$$\sin^2 x+\sin^2 3x+\cdots+\sin^2(2n-1)x,$$
$$\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx.$$

1.15. Является ли число $\frac{2+i}{2-i}$ корнем из единицы?

1.16. а) Найти $\varepsilon_0^k+\cdots+\varepsilon_{n-1}^k$, где $k\in\mathbb{Z}$, а $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{n-1}$ — все корни степени n из 1.

б) Если степень многочлена $f(z)$ меньше n, то среднее арифметическое значений многочлена $f(z)$ в вершинах правильного n-угольника равно его значению в центре этого n-угольника.

в) Если точки $P_0,P_1,\ldots,P_n\in\mathbb{C}$ таковы, что для любого многочлена $f(z)$ степени меньше n выполняется равенство

$$f(P_0)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(P_j),$$

то $P_1,\ldots,P_n$ суть вершины правильного n-угольника с центром P_0.

1.17. Решить уравнения и разложить их левые части на множители с вещественными коэффициентами:

$$x^4+6x^3+9x^2+100=0, \qquad x^4+2x^2-24x+72=0.$$

1.18. Разделить с остатком

а) $2x^5-5x^3-8x$ на $x+3$,

б) $4x^3+x^2$ на $x+1+i$.

1.19. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти (f_1,f_2) и многочлены g_1,g_2 такие, что $(f_1,f_2)=f_1g_1+f_2g_2$, если

а) $f_1=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ \ f_2=2x^3-x^2-5x+4,$

б) $f_1=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3,\ \ f_2=x^4+2x^3+2x^2+x+1.$

1.20. Исключить иррациональность в знаменателе:

а) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, если $\alpha^3-3\alpha+1=0$;

б) $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, если $\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

в) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$.

1.21. Найти

а) $\big((x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1), (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)\big)$,

б) (x^n-1, x^m-1).

1.22. При каких условиях на $m, n, k \in \mathbb{N}$

$$(x^4+x^2+1) \mid (x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3k+2})\,?$$

1.23. Доказать, что если $(x-1)^k \mid f(x^n)$, то и $(x^n-1)^k \mid f(x^n)$.

1.24. Разложить многочлен

$$f(x) = (x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$$

а) по степеням x, б) по степеням $x+2$.

1.25. Найти кратность корня $x_0=2$ многочлена

$$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8.$$

1.26. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен A, а от деления на $x-b$ $(a \neq b)$ равен B. Найти остаток от деления $f(x)$ на $(x-a)(x-b)$.

1.27. Найти все A, B, при которых трехчлен $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ делится на $(x-1)^2$.

1.28. При каких условиях на a, b, c многочлен

$$x^5+10ax^3+5bx+c$$

имеет трехкратный ненулевой корень?

1.29. Доказать, что многочлен $a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\dots+a_kx^{p_k}$ не имеет корней кратности выше $(k-1)$, отличных от нуля.

1.30. Пусть коэффициенты многочлена f лежат в поле нулевой характеристики. Доказать, что $f' \mid f$ тогда и только тогда, когда $f = a(x-x_0)^n$.

1.31. Доказать, что многочлен

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней. Пользуясь методом Штурма, найти количество его вещественных корней.

1.32. Пусть многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ имеет корни $x_1, \dots, x_n$. Какие корни имеют многочлены

а) $a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0$, б) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$,

в) $a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + \dots + a_0 b^n$, г) $f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!} x + \dots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$?

1.33. При каких условиях корни x_1, x_2, x_3 трехчлена $x^3 + px + q$ связаны соотношением $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$?

1.34. Указать многочлен степени 4, корнями которого являются

$$\alpha,\ 1/\alpha,\ -\alpha,\ -1/\alpha.$$

1.35. Указать многочлен степени 6, корнями которого являются

$$\alpha,\ 1/\alpha,\ 1-\alpha,\ 1/(1-\alpha),\ 1-1/\alpha,\ 1/(1-1/\alpha).$$

1.36. а) Доказать, что если комплексные числа $z_1, \dots, z_n$ таковы, что $\dfrac{1}{z_1} + \dots + \dfrac{1}{z_n} = 0$, то отвечающие им точки на плоскости не могут лежать по одну сторону от прямой, проходящей через нуль.

б) Корни $f'(z)$ лежат в выпуклой оболочке корней $f(z)$.

1.37. а) Найти все обратимые элементы кольца $k[[t]]$ формальных степенных рядов над полем k.

б) При каких условиях дробь $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$, где $P(t), Q(t) \in k[t]$, может быть записана виде формального степенного ряда?

в) Верно ли, что всякий формальный степенной ряд происходит из некоторой рациональной дроби?

г) Показать, что ряд $\sum a_n t^n \in k[[t]]$ происходит из рациональной дроби тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению вида

$$\alpha_k a_{n+k} + \alpha_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 a_n = 0$$

с $\alpha_i \in k$.

д) Найти явную формулу для n-ого члена последовательности Фибоначчи 1,1,2,3,5,8,13,21...

е) Описать все решения рекуррентного уравнения

$$a_n + A a_{n-1} + B a_{n-2} = 0.$$

1.38. Найти разложение в формальный степенной ряд дроби $1/(1-t)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Записать полученные коэффициенты в «обобщенный треугольник Паскаля».

1.39. а) Доказать, что для любого ряда $f = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \in k[[t]]$ существует такой единственный ряд $g = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$, что $g^d = f$, $d \in \mathbb{N}$.

б) Какие условия нужно наложить на кольцо A, чтобы утверждение предыдущего пункта было верно для ряда $f \in A[[t]]$?

в) Доказать, что если уравнение $F(z) = 0$ с $F(z) \in k[z]$ имеет решение $z = a_0 \in k$ и $F'(a_0) \neq 0$, то существует единственный формальный степенной ряд вида $f = a_0 + a_1 t + \dots \in k[[t]]$ такой, что $F(f) = 0$ (лемма Гензеля).

1.40. Найти количество a_k неприводимых над $\mathbb{F}_p$ многочленов степени k со старшим коэффициентом 1, пользуясь следующей схемой рассуждений.

а) В кольце формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[t]]$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^n t^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - a_k t^k}.$$

б) Корректно определено отображение $\log\colon 1 + t\mathbb{Q}[[t]] \to \mathbb{Q}[[t]]$ по правилу

$$\log(1 - tf) = -\sum_{s \geqslant 1} \frac{(tf)^s}{s}.$$

При этом $\log(fg) = \log f + \log g$ для $f, g \in 1 + t\mathbb{Q}[[t]]$.

в) Прологарифмировать равенство пункта а) и воспользоваться формулой обращения Мебиуса: если $A_n = \sum\limits_{d|n} B_d$, то $B_n = \sum\limits_{d|n} \mu(n/d) A_d$, где

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{если } n = p_1 \dots p_r \text{ и все } p_i \text{ различны}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

г) Вычислить $a_1, \dots, a_5$ для $\mathbb{F}_2$ вручную и по полученной формуле.

2. Элементарная арифметика

2.1. Решить в целых числах уравнения:

а) $23x - 17y = 5$,

б) $35x + 21y = 14$.

2.2. Оценить количество операций, необходимых для вычисления (a, b) для целых чисел a, b алгоритмом Евклида.

2.3. Имеют ли решения в целых числах уравнения:

а) $3x^2 + 2 = y^2$,

б) $7x^2 + 2 = y^3$,

в) $15x^2 - 7y^2 = 9$?

2.4. Доказать, что хотя бы одна сторона пифагорова треугольника (прямоугольного треугольника с целыми длинами сторон) делится на 5.

2.5. Найти все пифагоровы треугольники.

2.6. Найти все целочисленные решения уравнения

$$2x^2 - 3y^2 + 5z^2 + 4xy - 6xz - 2yz = 0.$$

2.7. Найти три последние цифры числа $1997^{1000000}$. Оценить количество цифр в этом числе.

2.8. Решить сравнение $2^n \equiv n \pmod p$, где p — простое число.

2.9. Пусть

$$u_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \qquad (n \text{ двоек}).$$

Доказать, что последовательность u_n стабилизируется по любому модулю $m \in \mathbb{N}$.

2.10. а) Пусть $m_1, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые модули; $a_1, \dots, a_n$ — произвольные целые числа. Доказать, что существует такое число $N \in \mathbb{Z}$, что $N \equiv a_i \pmod{m_i}$ для любого i, причем N определено однозначно по модулю $m_1 \dots m_k$ (китайская теорема об остатках).

б) Найти все такие $N \in \mathbb{Z}$, что

$$N \equiv 2 \pmod 7, \quad N \equiv 3 \pmod{18}, \quad N \equiv 3 \pmod{13}.$$

в) Доказать, что если $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ (p_i — различные простые числа), то кольца Z_m и $Z_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus Z_{p_k^{\alpha_k}}$ изоморфны.

г) Верно ли, что $Z_4 \cong Z_2 \oplus Z_2$?

д) Пусть A — кольцо, $A^\times$ — группа его обратимых элементов. Доказать, что если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, то $A^\times = A_1^\times \times \dots \times A_k^\times$.

е) Пусть $\varphi(m) = |Z_m^\times|$ — функция Эйлера. Доказать, что $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ при $(m,n) = 1$.

ж) Для $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$

$$\varphi(m) = m\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

2.11. Найти все такие $m \in \mathbb{N}$, что

а) $\varphi(m) = 10$.

б) $\varphi(m) = 2^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

2.12. Сколько делителей нуля в кольцах Z_{24}, Z_{683} ?

2.13. Доказать, что

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m.$$

2.14. Описать все решения уравнения $ax = b$ в кольце Z_m.

2.15. Решить уравнение $x^2 + 4x + 7 = 0$ в кольцах Z_{19}, Z_{15}, Z_{25}.

2.16. Решить уравнения

а) $x^3 = 10$ в Z_{37}.

б) $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 = 0$ в Z_{30}.

2.17. Сколько корней имеет уравнение $x^7 = 35$ в Z_{601} ?

2.18. Решить сравнение $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod m$ когда

а) $m = p^k$, $p \neq 2$ — простое число,

б) $m = 2^k$,

в) m — любое натуральное число.

2.19. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

а) Доказать, что разрешимость сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod m$ при $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ равносильна разрешимости системы сравнений $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ при $i = 1, \dots, k$.

б) Показать, что если существует решение x_0 сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod p$ и $f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod p$, то существует единственное решение x сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, такое, что $x \equiv x_0 \pmod p$ (лемма Гензеля).

2.20. Пусть p/q есть несократимая дробь, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $f(p/q) = 0$. Доказать, что

а) q есть делитель старшего коэффициента $f(x)$,

б) p есть делитель свободного члена $f(x)$,

в) $p - mq$ есть делитель $f(m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

2.21. Найти рациональные корни многочленов

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14, \qquad 24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60.$$

2.22. Доказать, что многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

2.23. а) Пусть $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$; тогда многочлены $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+p-1)$ либо все равны, либо попарно различны.

б) Многочлен $x^p - x - a$ при $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ неприводим над $\mathbb{F}_p$.

2.24. Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ многочленов

а) $x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5$,

б) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5$,

в) $x^{105} - 9$,

г) $(x - a_1)\ldots(x - a_n) - 1$, где $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные целые числа.

2.25. Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$ (т. е. не может быть разложен в произведение двух многочленов меньших степеней), то он неприводим и над $\mathbb{Q}$ (лемма Гаусса).

2.26. Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}$, причем существует такое простое число p, что $p \mid a_i,\ \ 0 \leqslant i < n$, и $p^2 \nmid a_0$. Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$ (критерий Эйзенштейна).

2.27. Пусть $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}$ — множество обратимых вычетов по модулю простого нечетного числа p. Умножение на $a \in Z_p^\times$ задает перестановку этого множества. Пусть k — количество положительных представителей, перешедших в отрицательные, тогда *символ Лежандра* $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^k$.

3. Теория Галуа и теория чисел

3.1. Найти факторкольцо $\mathbb{R}[x]/(x^2+ax+b)$ в зависимости от $a, b \in \mathbb{R}$.

3.2. Выполнить действия в кольце $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$:

а) $(\xi^2+\xi+1)^3$, $f(x)=x^3-1$.

б) $\frac{1}{(1+\xi)^m}$, $f(x)=x^n$.

(Здесь $\xi = x+(f(x))$.)

3.3. Найти степени расширений и их группы автоморфизмов над $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{-2}})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6+3\sqrt{3}})$. Какие из них являются расширениями Галуа?

3.4. Доказать, что $\cos(\pi/11)$ — алгебраическое число. Будет ли нормальным расширение $\mathbb{Q}(\cos(\pi/11))/\mathbb{Q}$? Найти его степень и группу автоморфизмов.

3.5. Найти степени расширений $\mathbb{F}_p(\sqrt{2})$, $\mathbb{F}_p(\sqrt{3})$.

3.6. Найти степени расширений $\mathbb{F}_p(\zeta_m)$, где ζ_m — примитивный корень из единицы степени m.

3.7. Найти степени и группы автоморфизмов расширений

$$\mathbb{C}(\sqrt{1-\sqrt{z}})/\mathbb{C}(z), \qquad \mathbb{C}(\sqrt{z+\sqrt{z}})/\mathbb{C}(z).$$

Являются ли они расширениями Галуа?

3.8. Найти $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

3.9. Доказать, что число $\cos 15^\circ$ является целым алгебраическим. Указать 10 неизоморфных конечных полей, содержащих это число.

3.10. Существуют ли конечные расширения полей $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}$, не содержащие никаких собственных подполей, кроме простых?

3.11. Найти группы Галуа следующих многочленов над $\mathbb{Q}$:

а) x^2-2, б) x^4+2, в) $(x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$,

г) x^3-2, д) x^3+px+q в зависимости от p и q.

3.12. Используя ряд коммутантов групп S_3 и S_4, доказать, что уравнения степеней 3 и 4 разрешимы в радикалах.

3.13. Доказать, что правильный n-угольник строится циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n = 2^m p_1 \dots p_s$, где p_i — различные простые числа вида $2^{2^k}+1$.

3.14. Описать все расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группами Галуа Z_2, $Z_2 \oplus Z_2$.

3.15. Построить расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$ с каждой из групп порядка 8 (Z_8, $Z_4 \oplus Z_2$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$, D_4, Q_8).

3.16. Описать кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

3.17. Элемент p целостного кольца A называется *простым*, если из $d \mid p$ следует, что либо d есть обратимый элемент кольца A, либо d ассоциирован с p. Доказать, что в евклидовом кольце элемент p прост тогда и только тогда, когда прост порожденный им идеал (p).

3.18. Однозначно ли разложение на простые множители в кольцах $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$? Какие из них являются евклидовыми?

3.19. Описать $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[i]$, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]$.

3.20. (Гауссовы целые числа.) Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.

а) Показать, что Γ — евклидово кольцо.

б) Описать все простые элементы Γ.

в) Пусть $\Pi = \operatorname{Spec}\Gamma - \{0\}$. Выразить ζ-функцию кольца Γ:

$$\zeta_\Gamma(s) = \prod_{\mathrm{p}\in\Pi}\Big(1 - \frac{1}{N(\mathrm{p})^s}\Big)^{-1}$$

через *ζ-функцию Римана*

$$\zeta_Z(s) = \prod_{p\ \text{простое}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

и *L-ряд*

$$L(s,\chi) = \prod_{p\ \text{простое}}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

где $\chi\colon Z \to \mathbb{C}^\times$ — *характер Дирихле* по модулю 4, т. е.

$$\chi(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \equiv 0 \pmod 4,\\ 1 & \text{при } m \equiv 1 \pmod 4,\\ -1 & \text{при } m \equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Норма идеала $N(\mathrm{p})$ — это количество элементов факторкольца Γ/p. Предварительно показать, что $N(\mathrm{pq}) = N(\mathrm{p})N(\mathrm{q})$.

г) Показать, что в ряде Дирихле

$$\zeta_\Gamma(s) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$$

число a_n есть количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов, т. е. пар (x,y) целых неотрицательных чисел с $x^2+y^2=n$.

д) Сравнив результаты в) и г), получить, что

$$a_n = \begin{pmatrix}\text{количество делителей } n\\ \text{вида } 4k+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{количество делителей } n\\ \text{вида } 4k+3\end{pmatrix}.$$

3.21. а) Доказать, что имеют место включения

$$\left\{\begin{matrix}\text{евклидовы}\\ \text{кольца}\end{matrix}\right\} \subset \left\{\begin{matrix}\text{кольца}\\ \text{главных}\\ \text{идеалов}\end{matrix}\right\} \subset \left\{\begin{matrix}\text{факториальные}\\ \text{кольца}\end{matrix}\right\}.$$

б) Привести примеры, показывающие, что эти включения строгие.

3.22. а) Пусть $K = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — алгебраическое расширение поля k характеристики 0. Показать, что существует элемент $\theta \in K$, для которого $K = k(\theta)$ (теорема о примитивном элементе).

б) Верно ли аналогичное утверждение для кольца $A = \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, порожденного целыми алгебраическими числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$?

3.23. Доказать, что группа Галуа многочлена $x^5 - 4x + 2$ изоморфна S_5.

3.24. (Круговые поля.) Пусть $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ и $K_m = \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

а) Доказать неприводимость многочлена $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ для простого p.

б) Пусть

$$\Phi_m(x) = \prod_{\zeta}(x - \zeta),$$

где произведение берется по всем примитивным корням из 1 степени m. Доказать, что $\Phi_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

в) Доказать, что многочлен $\Phi_m(x)$ неприводим при любом m. Найти степень расширения $K_m/\mathbb{Q}$.

г) Найти $\mathrm{Gal}(K_m/\mathbb{Q})$.

3.25. Доказать, что всякая конечная абелева группа может быть реализована как группа Галуа некоторого расширения поля $\mathbb{Q}$, содержащегося в K_m.

3.26. (Квадратичный закон взаимности.)

а) В круговом поле K_p с нечетным простым p существует единственное подполе степени 2 над $\mathbb{Q}$.

б) Из соотношения

$$p = \prod_{i=1}^{p-1}(1 - \zeta_p^i)$$

вывести, что $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = g^2$ для некоторого $g \in K_p$.

в) Используя лемму Гаусса о том, что $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$, получить закон взаимности

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

для нечетных различных простых p и q.

г) Доказать, что
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$
для нечетного простого p.

3.27. (Суммы Гаусса и снова квадратичный закон взаимности.) Пусть $g_a = \sum\limits_{x \in Z_p^\times} \left(\frac{x}{p}\right)\zeta_p^{ax}$, $a \in Z_p^\times$.

а) Доказать, что $g_a = \left(\frac{a}{p}\right) g_1$.

б) Вычислив двумя способами сумму $S = \sum_a g_a g_{-a}$, установить, что
$$p(p-1) = S = \left(\frac{-1}{p}\right)(p-1)g_1^2.$$

в) Из п. б) и леммы Гаусса получить квадратичный закон взаимности.

3.28. Найти количество решений сравнения $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod p$.

3.29. Плотно ли в $\mathbb{C}$ множество всех целых алгебраических чисел?

3.30. Пусть $\bar{\mathbb{Q}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$ и k — максимальное по включению подполе $\bar{\mathbb{Q}}$, не содержащее $\sqrt{5}$. Доказать, что группа Галуа $\mathrm{Gal}(K/k)$ циклическая для любого конечного расширения K поля k.

3.31. Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k характеристики 0, σ — автоморфизм поля $\bar{k}$ и $L = \{\, x \in \bar{k} \mid \sigma x = x \,\}$. Доказать, что если $k \subset L$, то группа $\mathrm{Gal}(P/L)$ циклическая для любого конечного расширения P поля L.

3.32. Доказать, что конечное расширение конечного поля всегда сепарабельно. То же верно и для конечного расширения поля характеристики 0.

3.33. Пусть K — поле характеристики p, L/K — конечное нормальное расширение, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, $L_0 = L^G$ — подполе G-инвариантных элементов. Докажите, что L/L_0 есть расширение Галуа, а L_0/K — чисто несепарабельное расширение (т. е. для любого $\alpha \in L_0$ найдется такое m, что $\alpha^{p^m} \in K$).

3.34. Доказать, что всякое конечное поле совершенно.

3.35. Пусть $F = K(\alpha)$ и $\mu(x)$ — минимальный многочлен α над K. Доказать, что $L \otimes_K F \cong L[x]/(\mu(x))$.

3.36. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, причем его кольцо целых $\mathcal{O}_K$ имеет вид $\mathbb{Z}[\theta]$, и $\mu(x)$ — минимальный многочлен θ. Доказать, что простые идеалы $P_1, \ldots, P_k$ в $\mathcal{O}_K$, участвующие в разложении $(p) = P_1 \ldots P_k$ для простого числа $p \in \mathbb{Z}$, имеют вид $P_i = (p, \mu_i(\theta))$, где

$\mu(x) \equiv \mu_1(x) \dots \mu_k(x) \pmod p$ — разложение на неприводимые множители по модулю p.

3.37. Найти число классов полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

3.38. Пусть $x \in \mathbb{Z}_p^\times$. Доказать, что ряд

$$x + (x^p - x) + (x^{p^2} - x^p) + \cdots$$

сходится, и что его сумма есть $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{p^n}$. Вывести отсюда, что уравнение $x^{p-1} - 1$ имеет $p-1$ корень в $\mathbb{Z}_p$.

3.39. Вычислить группу непрерывных автоморфизмов поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

3.40. Доказать, что p-адическая запись числа $a^{p^{k-1}(p-1)}$ начинается k нулями для любого $a \in \mathbb{Z}_p$.

3.41. Какие из чисел 5, -7, $3 \cdot 11^{-2} + 6 \cdot 11^{-1} + 3 + 7 \cdot 11^2$ имеют квадратные корни в $\mathbb{Q}_{11}$? Вычислить эти корни с точностью до 11^{-3}.

3.42. Доказать, что p-адическое разложение рационального числа периодично. Верно ли обратное?

3.43. Доказать, что

$$|a|_\infty \prod_p |a|_p = 1$$

для всех $a \in \mathbb{Q}^\times$. (Здесь $|a|_\infty = |a|$ и $|a|_p = p^{-v_p(a)}$.)

3.44. Доказать, что

$$v_p(n!) = \left[\frac{n - \sigma_p(n)}{p-1}\right],$$

где $\sigma_p(n)$ есть сумма коэффициентов в p-адическом разложении числа n.

3.45. Доказать, что $\mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$, если $(a, b) = 1$.

3.46. Найти степени расширений $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt{3})/\mathbb{Q}_p$.

3.47. Найти степени расширений $\mathbb{Q}_p(\zeta_m)$, где ζ_m — примитивный корень из единицы степени m.

3.48. Найти радиус сходимости ряда $\exp(x)$ в $\mathbb{Q}_p$.

3.49. Вычислить с точностью до 10^{-3} корни уравнения $x^2 - 2x + 2 = 0$ в $\mathbb{Z}_5$.

3.50. Докажите, что нормы $|\cdot|_p$ и $|\cdot|_q$ при разных p и q задают неэквивалентные топологии на $\mathbb{Q}$. Ни одна норма $|\cdot|_p$ не задает на $\mathbb{Q}$ топологии, эквивалентной обычной топологии, задаваемой абсолютной величиной.

4. Линейная алгебра

Определения. Базисы. Сопряженное пространство

4.1. Проверить, что множество $\mathbb{R}_+$ есть векторное пространство над $\mathbb{R}$ относительно операций $v+u=vu$, $\alpha\cdot v=v^\alpha$. Чему равна размерность этого пространства?

4.2. Можно ли ввести структуру векторного пространства на множестве $\mathbb{N}$ над полями $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$?

4.3. При каких условиях векторное пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ может быть превращено в векторное пространство над $\mathbb{C}$?

4.4. а) Доказать, что поле является векторным пространством над любым своим подполем.

б) Чему может равняться количество элементов конечного поля?

4.5. Найти количество элементов линейной оболочки векторов

$$(1,0,2,1),\ (1,1,2,2),\ (2,1,1,0),\ (0,2,0,2)$$

над полем $\mathbb{F}_3$.

4.6. Доказать, что функции (соответственно, формальные степенные ряды) $1, \sin x, \ldots, \sin nx$ линейно независимы как элементы пространства $C^\infty[0,1]$ (соответственно, $\mathbb{R}[[x]]$) над $\mathbb{R}$.

4.7. Пусть $V=\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$. Доказать, что однородные многочлены степени d образуют подпространство H_d в V. Доказать, что однородные симметрические многочлены степени d образуют подпространство S_d в H_d. Найти размерности H_d, S_2, S_3 при произвольном n и размерность S_{10} при $n=4$.

4.8. а) Найти количество наборов из k линейно независимых векторов (k-реперов) в пространстве $\mathbb{F}_q^n$.

б) Найти количество $\left[{n \atop k}\right]_q$ k-мерных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$.

4.9. Найти $\dim_k k[x]$, $\dim_k k[[x]]$.

4.10. Всегда ли верно, что $(V+U)\cap W = V\cap W + U\cap W$ для подпространств V, U, W некоторого векторного пространства?

4.11. Пусть $\dim V<\infty$, $U\subset V$, $U^0\subset V^*$ — аннулятор подпространства U. Доказать, что

$$\dim U+\dim U^0=\dim V,$$
$$(U^0)^0=U,$$
$$(U_1+U_2)^0=U_1^0\cap U_2^0,$$
$$(U_1\cap U_2)^0=U_1^0+U_2^0.$$

4.12. Пусть $f, g\colon V \to k$ — линейные формы, причем $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Доказать, что f и g пропорциональны.

4.13. а) Доказать, что для конечномерного пространства V отображение $\varphi\colon V \to V^{**}$, $v \mapsto \varphi_v$ при котором $\varphi_v(f) = f(v)$ определяет канонический (т.е. не зависящий от выбора базиса в V) изоморфизм.

б) Доказать, что никакое бесконечномерное пространство не изоморфного своему дважды сопряженному.

4.14. Доказать, что множество всех $t \in \mathbb{F}_{p^n}$, для которых разрешимо уравнение $x^p + x + t = 0$, есть векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Найдите его размерность.

4.15. Пусть $\mathcal{F}_{n,d}$ — множество флагов длины n в d-мерном пространстве V:

$$\mathcal{F}_{n,d} = \{F = (0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = V)\}.$$

Определим для флагов F, F' матрицу $a(F, F') = a_{ij}$, в которой

$$a_{ij} = \dim F_i \cap F'_j / F_{i-1} \cap F'_j + F_i \cap F'_{j-1}.$$

Докажите, что

а) $\sum\limits_{i,j} a_{ij} = d$. Чему равны суммы $\sum\limits_{i} a_{ij}$, $\sum\limits_{j} a_{ij}$?

б) $a(F, F') = a(F', F)$.

в) Если $g \in GL(V)$, то $a(gF, gF') = a(F, F')$.

г) Для каждой матрицы $A = (a_{ij})$ с неотрицательными целыми элементами с $\sum_{i,j} a_{ij} = d$ существуют флаги F, F' такие, что $A = a(F, F')$.

д) Матрица $a(F, F')$ есть полный $GL(V)$-инвариант пары флагов F, F', т.е. пары (F, F') и $(\tilde{F}, \tilde{F}')$ лежат в одной $GL(V)$-орбите тогда и только тогда, когда $a(F, F') = a(\tilde{F}, \tilde{F}')$.

Билинейные и квадратичные формы

4.16. Доказать, что отображение $\mathrm{id}_k\colon C^k(S^1) \times C^k(S^1) \to \mathbb{R}$, при котором

$$\mathrm{id}_k(f, g) = \int\limits_{S^1} f(x) g^{(k)}(x)\, dx,$$

есть билинейная форма. При каких k она симметрична (кососимметрична)? Рассмотреть ограничение формы id_1 на пространство многочленов степени $\leqslant 5$ на окружности и вычислить матрицу этой формы в каком-нибудь базисе этого пространства. Найти канонический базис для id_1 в этом пространстве. Найти левое и правое ядра формы.

4.17. Пусть $f(x,y)$ — такая билинейная форма, что

$$f(x,y)=0 \iff f(y,x)=0.$$

Доказать, что форма $f(x,y)$ либо симметрична, либо кососимметрична.

4.18. Найти индекс инерции

а) квадратичной формы $\operatorname{tr} X^2$ на пространстве матриц $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$,

б) квадратичной формы на четырехмерном пространстве, если известно, что главные миноры ее матрицы в некотором базисе удовлетворяют условиям

$$\Delta_1>0, \quad \Delta_2=\Delta_3=0, \quad \Delta_4>0.$$

4.19. Эквивалентны ли квадратичные формы

а) $f=4x^2+8xy+3x^2$ и $g=3x^2+2xy+3y^2$ над $\mathbb{Z}$?

б) $f=3x^2+6xy$ и $g=2x^2+3xy+4y^2$ над $\mathbb{F}_7$?

4.20. Говорят, что квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ над полем K, $\operatorname{char} k\neq 0$, представляет $\alpha\in K$, если найдется такой ненулевой набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ элементов поля K, что $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\alpha$. Доказать, что

а) если $f\sim g$, то они представляют одни и те же элементы из k;

б) если форма f представляет $\alpha\neq 0$, то $f\sim \alpha y_1^2+g(y_2,\ldots,y_n)$;

в) если форма f представляет 0, то она представляет все элементы поля k.

4.21. Квадратичная форма от двух переменных называется *бинарной*. *Дискриминантом* бинарной формы $f=f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ называется элемент поля $d_f=ac-b^2$. Предположим, что $\operatorname{char} k\neq 0$. Докажите, что

а) если бинарные формы f и g неособы (т.е. их дискриминанты отличны от нуля) и представляют 0, то $f\sim g$, более того, $f\sim g\sim x^2-y^2$;

б) неособая бинарная форма f представляет 0 тогда и только тогда, когда $-d_f$ есть квадрат в поле k;

в) неособые бинарные формы f и g эквивалентны тогда и только тогда, когда отношение d_f/d_g есть квадрат в поле k и существует элемент $\alpha\in k$, представимый обеими формами.

г) Представляет ли нуль форма $-3x^2+8xy-3y^2$ над полем $\mathbb{F}_{11}$?

4.22. а) Доказать, что невырожденная квадратичная форма над $\mathbb{F}_q$ эквивалентна форме вида $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+dx_n^2$.

б) Если $n\geqslant 3$, то всякая квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ над $\mathbb{F}_p$ $(p\neq 2)$ представляет нуль.

4.23. а) Любая вырожденная квадратичная форма представляет нуль.

б) Если форма $x^2 - \alpha y^2$ представляет γ_1 и γ_2, то она представляет и $\gamma_1\gamma_2$.

4.24. Представляет ли нуль форма

$$f(x,y) = (1+\sin t)x^2 + 2(\operatorname{tg} t)xy + (\cos t)y^2$$

над кольцом $\mathbb{R}[[t]]$?

Линейные отображения и матрицы

4.25. Доказать линейность отображений

а) $I\colon C([0,1]) \to \mathbb{R},\ \ I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$;

б) $j_m : C^m([0,1]) \to \mathbb{R}^{m+1},\ \ j_m(f) = (f(1/2), f^{(1)}(1/2), \dots, f^{(m)}(1/2))$;

в) $T_a\colon C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ \ (T_a f)(x) = f(x+a)$;

г) $D^2\colon C^m(\mathbb{R}) \to C^{m-2}(\mathbb{R}),\ \ (D^2 f) = f^{(2)}(x)$.

Найти размерности ядер и образов ограничений этих отображений на пространство P_n многочленов степени не выше n.

4.26. Пусть $S_1, \dots, S_{64}$ — все подмножества множества из шести элементов. Найти ранг матрицы A, элементы которой определены условиями

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i \cap S_j \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } S_i \cap S_j = \emptyset. \end{cases}$$

4.27. *Коммутатором* матриц X, Y называется матрица $[X, Y] = XY - YX$. Доказать, что любая комплексная матрица со следом нуль может быть представлена в виде суммы коммутаторов матриц со следом нуль.

4.28. Пусть V, U, W — векторные пространства, A, B — линейные операторы:

$$V \xleftarrow{A} W \xrightarrow{B} U$$

Доказать, что оператор $C\colon V \to W$ такой, что $CA = B$ существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} B$.

4.29. Доказать, что обратимые линейные отображения $g\colon V \to V$ пространства V над полем k образуют группу $GL(V)$, изоморфную матричной группе $GL(\dim V, k)$.

4.30. Доказать, что существует такой элемент $g \in GL(V)$, что

а) $gx = y$ для любых заданных ненулевых векторов $x, y \in V$;

б) $gX = Y$ для любых заданных d-мерных подпространств $X, Y \subset V$.

в) $gF_1 = F_2$ для любых заданных $(d_1, \ldots, d_l)$-флагов F_1, F_2 в пространстве V ($(d_1, \ldots, d_l)$-флагом в V называется набор вложенных подпространств $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_l$ с $\dim U_i = d_i$).

4.31. Всегда ли можно, действуя невырожденным преобразованием g пространства V, перевести заданную пару векторов из V в другую заданную пару векторов? Тот же вопрос для пары (тройки) подпространств в V.

4.32. Доказать следующие достаточные условия обратимости линейного оператора:

а) если оператор A нильпотентен, то оператор $E + A$ обратим.

б) если существует такой многочлен $f(x)$, что $f(A) = 0$, а $f(0) \neq 0$, то оператор A обратим.

4.33. Получить явную формулу для n-ого числа Фибоначчи, пользуясь следующей схемой рассуждений.

а) Пусть $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Положим

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

б) Вычислив след и детерминант матрицы F, найти такие числа α и β, что

$$F = C \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} C^{-1}$$

для некоторой матрицы C. Далее найти саму матрицу C (она, разумеется, должна быть невырожденной).

в) Заметив, что

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = F^n = C \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} C^{-1},$$

вывести, что

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

4.34. Доказать инвариантность подпространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ относительно любого оператора B, перестановочного с A.

4.35. Найти все инвариантные подпространства оператора

а) с матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$;

б) $\frac{d}{dx}$ в пространстве P_n; в) $\frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве P_n.

4.36. Найти собственные значения оператора с матрицей

а) $A^T A$, где $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

б) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$.

4.37. Пусть $X \in Sp_n$. Доказать, что характеристический многочлен X возвратен.

4.38. Найти необходимые и достаточные условия диагонализируемости над $\mathbb{C}$ оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ldots & a_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.39. Пусть $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$. Тогда $\det[A, B] = 0$ в том и только том случае, когда A и B имеют общий собственный вектор.

4.40. Пусть оператор A в n-мерном пространстве имеет n различных собственных значений и $[A, B] = 0$. Доказать, что существует базис, в котором матрицы операторов A и B диагональны одновременно.

4.41. Пусть $\{ A_\alpha \mid \alpha \in I \}$ — некоторое семейство попарно перестановочных операторов в комплексном конечномерном пространстве. Доказать, что

а) существует вектор, являющийся собственным для каждого A_α;

б) если каждый оператор A_α диагонализируем, то существует такой базис, в котором все A_α одновременно имеют диагональные матрицы.

4.42. Найти собственные значения оператора $\frac{d}{dx}$ в пространствах $\mathbb{C}[[x]]$, $\mathbb{C}[x]$.

4.43. Найти все линейные операторы в пространстве размерности $n \geqslant 2$, матрицы которых одинаковы в любом базисе.

4.44. Найти корневые подпространства оператора

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.45. Найти жорданову нормальную форму матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

в) матрицы A^{-1}, если известна жорданова нормальная форма A;

г) матрицы $\alpha E + J^2$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4.46. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис для матриц

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 2 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.47. а) Пусть жорданова нормальная форма оператора A есть одна жорданова клетка. Доказать, что тогда централизатор A совпадает с $\mathbb{C}[A]$.

б) Пусть степень минимального многочлена оператора A равна размерности пространства. Доказать, что и в этом случае централизатор A совпадает с $\mathbb{C}[A]$.

в) Доказать, что централизатор матрицы порядка n является векторным пространством размерности не меньшей n.

г) Доказать, что не существует более чем $[n^2/2]+1$ линейно независимых матриц, перестановочных между собой.

4.48. Доказать, что если для операторов A, B в конечномерном векторном пространстве выполняется соотношение $[A, B] = B$, то оператор B нильпотентен.

4.49. Доказать, что любая квадратная матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца с единицей аннулируется своим характеристическим многочленом.

4.50. Существует ли такое дробно-линейное преобразование A, $Az = \frac{az+b}{cz+d}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ есть сдвиг $z \mapsto z+1$?

4.51. Существует ли такая вещественная матрица A, что

$$\exp A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

4.52. На окружности отмечено n точек; пусть V — пространство комплекснозначных функций на множестве этих точек. Оператор $A\colon V \to V$ ставит в соответствие функции f функцию Af, значение которой в некоторой точке равно полусумме значений функции f в двух соседних точках.

а) Найти собственные значения оператора A.

б) При каких n у оператора A нуль является собственным значением? Указать соответствующую собственную функцию.

в) Найти $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$.

4.53. Матрица называется вполне положительной, если положительны все ее миноры любых порядков. Пусть A есть трехдиагональная матрица, под- и наддиагональные элементы которой положительны. Доказать, что матрица $\exp A$ вполне положительна.

4.54. Доказать, что всякий автоморфизм аддитивной группы вещественного векторного пространства размерности не меньше 2, сохраняющий коллинеарность векторов, является (невырожденным) линейным преобразованием.

4.55. Пусть A — целочисленная $n \times n$-матрица с определителем ± 1, порядок которой в группе невырожденных матриц равен p^k, где p — простое число. Доказать, что $p^{k-1}(p-1) \leqslant n$.

Тензоры

4.56. Доказать, что $V^{\otimes 2} \cong S^2 V \oplus \bigwedge^2 V$. Верно ли, что $V^{\otimes 3} \cong S^3 V \oplus \oplus \bigwedge^3 V$?

4.57. Найти $(S^2 V)^0$, $(\bigwedge^2 V)^0$.

4.58. Построить канонический изоморфизм пространств

а) $\bigwedge^k V$ и $\bigwedge^n V \otimes \bigwedge^{n-k} V^*$ (если $\dim V = n$);

б) $\bigwedge^k (V \otimes F)$ и $F^{\otimes k} \otimes \bigwedge^k V$ (если $\dim F = 1$).

4.59. Найти сигнатуру квадратичной формы $q(\omega)$ на $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, определенной формулой $\omega \wedge \omega = q(\omega) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, где $\{e_i\}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^4$.

4.60. Верно ли, что минимальный многочлен оператора $A \otimes B$ есть произведение минимальных многочленов операторов A и B?

4.61. Пусть симметрические матрицы A и B положительно определены. Доказать, что матрица C с $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$ также положительно определена.

4.62. а) Найти $\operatorname{tr} A^{\otimes k}$, $\det A^{\otimes k}$.

б) Вычислить $\det(\bigwedge^2 (S^2 A))$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.63. а) Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V; $\{\, e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid I \,\}$ — базис пространства $\bigwedge^k V$. Найти матрицу оператора $\bigwedge^k A$ в указанном базисе.

б) Найти $\operatorname{tr} \bigwedge^k A$.

в) Доказать формулу Бине – Коши:

$$|(AB)_I^J| = \sum_K |A_I^K| |B_K^J|,$$

где A_I^J есть подматрица матрицы A с номерами строк $i_1, \ldots, i_k$ и номерами столбцов $j_1, \ldots, j_k$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$

г) Доказать, что коэффициент c_k характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A) = t^n - c_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n$ матрицы A есть сумма главных миноров размера $k \times k$ этой матрицы.

4.64. Доказать, что над полем характеристики нуль равенство $\operatorname{tr} \bigwedge^k A = 0$ для всех k влечет нильпотентность оператора A.

4.65. Вычислить $\frac{d}{dt}(\bigwedge^k A(t) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$.

4.66. Доказать, что подпространство $U \subset V$ размерности k инвариантно относительно оператора A тогда и только тогда, когда $\bigwedge^k U$ инвариантно относительно $\bigwedge^k A$.

4.67. Найти жорданову нормальную форму оператора $\bigwedge^2 A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.68. Найти наибольшее собственное значение линейного оператора $X \mapsto AXA^t$ в пространстве вещественных кососимметрических матриц порядка 3, если собственные значения матрицы A суть $1, 2, 3$.

4.69. Найти центр алгебры $\bigwedge^{\cdot} V$.

4.70. (Квадрика Плюккера.) Пусть V — четырехмерное пространство, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — некоторый его базис, $\mathrm{Gr}(2, V)$ — множество всех двумерных подпространств в V. Пусть подпространство $U \in \mathrm{Gr}(2, V)$ задано своим базисом $\{u_1, u_2\}$. Коэффициенты p_{ij} в разложении

$$u_1 \wedge u_2 = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$$

называют плюккеровыми координатами подпространства U.

а) Проверить, что при замене базиса в U все числа p_{ij} умножаются на детерминант матрицы замены. Поэтому корректно определено отображение $p\colon\ \mathrm{Gr}(2, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$.

б) Убедиться в том, что образ отображения p есть в точности проективизация множества разложимых бивекторов из $\bigwedge^2 V$.

в) Доказать, что разложимость бивектора $\omega \in \bigwedge^2 V$ равносильна условию $\omega \wedge \omega = 0$.

г) Условие п. в) в координатах записывается как

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Это уравнение квадрики в $\mathbb{P}^5$, называемой квадрикой Плюккера.

д) Могут ли числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ быть минорами порядка 2 некоторой матрицы размера 2×4?

4.71. Пусть $0 \neq v \in V$. Рассмотрим последовательность отображений

$$0 \to \bigwedge^0 V \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^1 V \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^2 V \xrightarrow{\varphi_2} \bigwedge^3 V \ldots,$$

где $\varphi_0(\alpha) = \alpha v,\ \ \varphi_i(\omega) = v \wedge \omega$ при $i > 0$. Доказать, что

а) $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0$,

б) $\mathrm{Ker}\, \varphi_{i+1} = \mathrm{Im}\, \varphi_i$.

5. Векторные пространства с дополнительными структурами

5.1. Приведите нетривиальный пример ортогонального оператора в пространстве многочленов степени не выше трех со скалярным произ-

4.68. Найти наибольшее собственное значение линейного оператора $X \mapsto AXA^t$ в пространстве вещественных кососимметрических матриц порядка 3, если собственные значения матрицы A суть $1, 2, 3$.

4.69. Найти центр алгебры $\bigwedge^{\cdot} V$.

4.70. (Квадрика Плюккера.) Пусть V — четырехмерное пространство, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — некоторый его базис, $\mathrm{Gr}(2, V)$ — множество всех двумерных подпространств в V. Пусть подпространство $U \in \mathrm{Gr}(2, V)$ задано своим базисом $\{u_1, u_2\}$. Коэффициенты p_{ij} в разложении

$$u_1 \wedge u_2 = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$$

называют плюккеровыми координатами подпространства U.

а) Проверить, что при замене базиса в U все числа p_{ij} умножаются на детерминант матрицы замены. Поэтому корректно определено отображение $p\colon \mathrm{Gr}(2, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$.

б) Убедиться в том, что образ отображения p есть в точности проективизация множества разложимых бивекторов из $\bigwedge^2 V$.

в) Доказать, что разложимость бивектора $\omega \in \bigwedge^2 V$ равносильна условию $\omega \wedge \omega = 0$.

г) Условие п. в) в координатах записывается как

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Это уравнение квадрики в $\mathbb{P}^5$, называемой квадрикой Плюккера.

д) Могут ли числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ быть минорами порядка 2 некоторой матрицы размера 2×4?

4.71. Пусть $0 \neq v \in V$. Рассмотрим последовательность отображений

$$0 \to \bigwedge^0 V \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^1 V \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^2 V \xrightarrow{\varphi_2} \bigwedge^3 V \ldots,$$

где $\varphi_0(\alpha) = \alpha v,\ \ \varphi_i(\omega) = v \wedge \omega$ при $i > 0$. Доказать, что

а) $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0$,

б) $\operatorname{Ker} \varphi_{i+1} = \operatorname{Im} \varphi_i$.

5. Векторные пространства с дополнительными структурами

5.1. Приведите нетривиальный пример ортогонального оператора в пространстве многочленов степени не выше трех со скалярным произ-

ведением
$$(f(x), g(x)) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

5.2. (Эпиморфизм $SU_2 \to SO_3$.)

а) Любой элемент из группы SO_3 есть вращение l_φ вокруг некоторой оси l на некоторый угол φ.

б) Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный репер $Oxyz$. Тогда любое вращение l_φ есть композиция $Z_\gamma X_\beta Z_\alpha$ вращений на углы α, β, γ вокруг осей Oz, Ox, Oz соответственно (теорема Эйлера).

в) Эрмитовы матрицы со следом нуль образуют трехмерное векторное пространство V над $\mathbb{R}$. Форма $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$ задает на нем структуру евклидова пространства. Матрицы Паули
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$
образуют ортогональный базис в V.

г) Для любого элемента $u \in U_2$ определено отображение $R_u \colon V \to V$, при котором $R_u(X) = uXu^{-1}$. Доказать, что R_u — ортогональный оператор; соответствие $u \mapsto R_u$ задает гомоморфизм $R\colon U_2 \to O_3$.

д) Пусть
$$u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad v_\psi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix}.$$
Тогда $R_{u_{\varphi/2}} = X_\varphi$, $R_{v_{\psi/2}} = Z_\psi$. Заключить отсюда, что при гомоморфизме R каждый элемент из SO_3 имеет прообраз из SU_2.

е) Показать, что при гомоморфизме R группа SU_2 отображается в точности на SO_3.

5.3. В пространстве бесконечно дифференцируемых вещественнозначных периодических с периодом 2π функций на прямой со скалярным умножением
$$(f(x), g(x)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$
действует оператор вида
$$L\colon f(x) \mapsto u_0(x)f(x) + u_1(x)f'(x) + u_2(x)f''(x),$$
где $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ — функции из указанного пространства. Найти необходимые и достаточные условия самосопряженности оператора L.

5.4. Существуют ли три вектора в трехмерном евклидовом пространстве, матрица Грама которых имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & c \\ 2 & c & 5 \end{pmatrix},$$

где а) $c = 0$, б) $c = 2$, в) $c = 1$?

Геометрия

5.5. Найти пересечение прямой $\langle(-1, 2, -2, 5)\rangle$ с выпуклой оболочкой множества точек

$$(x, x^2, x^3, x^4),$$

$x = 0, \pm 1, \pm 2$ в пространстве $\mathbb{R}^4$.

5.6. Найти предел при $n \to \infty$ длины ребра правильного симплекса, вписанного в сферу радиуса 1 в n-мерном евклидовом пространстве.

5.7. Доказать, что всякий пятигранный выпуклый конус в трехмерном евклидовом пространстве можно линейным преобразованием привести к такому виду, чтобы каждое ребро было перпендикулярно противоположной грани.

5.8. В каких случаях произведение двух винтовых движений трехмерного евклидова пространства является параллельным переносом?

5.9. Считая известной классификацию движений трехмерного евклидова пространства, нарисовать блок-схему для определения типа движения, заданного в виде $x \mapsto Ax + b$, где A — ортогональная матрица, а b — некоторый вектор. Указать, как при этом вычисляются параметры движения (ось, угол и шаг винта — для винтового движения, плоскость симметрии и вектор переноса — для скользящей симметрии и плоскость симметрии, ось и угол поворота — для зеркального поворота).

5.10. Определить тип движения

а) $x \mapsto \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

б) $x \mapsto \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, в) $x \mapsto \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$,

г) $x \mapsto \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.11. Пусть A и B — движения трехмерного евклидова пространства, удовлетворяющие условиям

$$A^3 B^3 = (AB)^2 = \mathrm{id}\,.$$

Доказать, что A и B имеют общую инвариантную прямую.

5.12. Найти число прямых, скрещивающихся с данной прямой в аффинном пространстве над полем $\mathbb{F}_p$.

5.13. Какое наибольшее число сторон может иметь сечение

6. Кольца и модули

6.1. Будет ли нетеровым кольцо степенных рядов от z

а) с бесконечным радиусом сходимости,

б) с конечным радиусом сходимости (своим для каждого ряда)?

6.2. Будет ли нетеровым

а) кольцо многочленов от z, у которых первые k производных обращаются в нуль при $z = 0$,

б) кольцо многочленов от z, w, все частные производные которых по w обращаются в нуль при $z = 0$,

в) кольцо рациональных функций от z, не имеющих полюсов на окружности $|z| = 1$?

6.3. Есть ли делители нуля в алгебре функций, аналитических в данной области $\Omega \subset \mathbb{C}$? (Под *областью* понимается открытое связное множество.)

6.4. Пусть A — нетерово кольцо, $I \subset A$ — идеал. Доказать, что кольцо A/I нетерово.

6.5. Пусть $I \subset A$ — идеал, M — некоторый A-модуль. Доказать, что

$$A/I \otimes_A M \cong M/IM.$$

6.6. Доказать «китайскую теорему об остатках»: если $\{I_k\}$ — семейство идеалов в коммутативном кольце A, причем $I_k + I_l = A$ для любых $k \neq l$, то

а) $\bigcap I_k = \prod I_k$,

б) $A/\bigcap I_k = \bigoplus A/I_k$.

6.7. Пусть $A \subset B$ — области целостности и пусть B цело над A. Доказать, что B — поле тогда и только тогда, когда A — поле.

6.8. Пусть A — нетерова область целостности, K — ее поле частных, S — *мультипликативное подмножество*, т.е. такое подмножество в A, что $1 \in S$, $0 \notin S$ и вместе с любыми элементами из S их произведение также содержится в S. Пусть

$$A_S = \left\{ \frac{a}{b} \in K \;\middle|\; b \text{ есть произведение элементов из } S \right\}$$

есть *локализация* кольца A по S. Доказать, что кольцо A_S нетерово.

6.9. Пусть S — мультипликативное подмножество в кольце A, A_S — соответствующая локализация. Доказать, что для нетерова A-модуля M имеется изоморфизм $M_S \cong M \otimes A_S$.

6.10. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A, M — конечно порожденный A-модуль, A_S — локализация A. Доказать, что $M_S = 0$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in S$, что $sM = 0$.

6.11. Пусть A — нетерово кольцо и $f = \sum a_n x^n \in A[[x]]$ — элемент кольца формальных степенных рядов. Доказать, что если элемент f нильпотентен в $A[[x]]$, то все коэффициенты a_n суть нильпотентные элементы в A. (Обратное тоже верно, но доказывается совсем просто.)

6.12. Обозначим через $\mathbb{Z}_S$ кольцо рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на простые числа из заданного множества S. Доказать, что

а) кольцами вида $\mathbb{Z}_S$ исчерпываются все подкольца с единицей в $\mathbb{Q}$,

б) $\mathbb{Z}_S \otimes \mathbb{Z}_{S'} \cong \mathbb{Z}_{S\cap S'}$.

6.13. Пусть S — некоторое множество простых чисел,

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_S.$$

Доказать, что

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin S, \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, & \text{если } p \in S. \end{cases}$$

6.14. Доказать, что

$$G \otimes \mathbb{Z}_S \cong (\mathbb{Z}^{\operatorname{rk} G}) \oplus (S\text{-кручение группы } G)$$

для любой конечно порожденной абелевой группы G. (Элемент группы G называется *элементом S-кручения*, если его порядок есть произведение простых чисел, принадлежащих множеству S.)

6.15. Пусть $f\colon A \to U$ и $g\colon B \to V$ — сюръективные гомоморфизмы R-модулей. Доказать, что

$$\operatorname{Ker} f \otimes g = \operatorname{Ker} f \otimes B + A \otimes \operatorname{Ker} g.$$

6.16. Существует ли такой нетривиальный $\mathbb{Z}$-модуль M, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$?

7. Абелевы группы

7.1. Являются ли конечно порожденными группы по сложению вещественных и рациональных чисел?

7.2. Верно ли, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена?

6.10. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A, M — конечно порожденный A-модуль, A_S — локализация A. Доказать, что $M_S = 0$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in S$, что $sM = 0$.

6.11. Пусть A — нетерово кольцо и $f = \sum a_n x^n \in A[[x]]$ — элемент кольца формальных степенных рядов. Доказать, что если элемент f нильпотентен в $A[[x]]$, то все коэффициенты a_n суть нильпотентные элементы в A. (Обратное тоже верно, но доказывается совсем просто.)

6.12. Обозначим через $\mathbb{Z}_S$ кольцо рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на простые числа из заданного множества S. Доказать, что

а) кольцами вида $\mathbb{Z}_S$ исчерпываются все подкольца с единицей в $\mathbb{Q}$,

б) $\mathbb{Z}_S \otimes \mathbb{Z}_{S'} \cong \mathbb{Z}_{S \cap S'}$.

6.13. Пусть S — некоторое множество простых чисел,

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_S.$$

Доказать, что

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin S, \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, & \text{если } p \in S. \end{cases}$$

6.14. Доказать, что

$$G \otimes \mathbb{Z}_S \cong (\mathbb{Z}^{\operatorname{rk} G}) \oplus (S\text{-кручение группы } G)$$

для любой конечно порожденной абелевой группы G. (Элемент группы G называется *элементом S-кручения*, если его порядок есть произведение простых чисел, принадлежащих множеству S.)

6.15. Пусть $f\colon A \to U$ и $g\colon B \to V$ — сюръективные гомоморфизмы R-модулей. Доказать, что

$$\operatorname{Ker} f \otimes g = \operatorname{Ker} f \otimes B + A \otimes \operatorname{Ker} g.$$

6.16. Существует ли такой нетривиальный $\mathbb{Z}$-модуль M, что $M \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$?

7. Абелевы группы

7.1. Являются ли конечно порожденными группы по сложению вещественных и рациональных чисел?

7.2. Верно ли, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена?

7.3. Разлагаются ли в нетривиальную прямую сумму группы рациональных чисел по сложению, по умножению (разумеется, в последнем случае нуль исключен)?

7.4. Пусть G — аддитивная абелева группа, $a \in G$, $(\operatorname{ord} a, n) = 1$. Доказать, что уравнение $nx = a$ разрешимо в группе G.

7.5. Сколько существует неизоморфных абелевых групп порядка $2^{10} \cdot 5^3$?

7.6. Сколько элементов

а) порядка 4 в группах Z_{36}, Z_{1728},

б) порядка 6 в группах $Z_3 \oplus Z_{26}$, $Z_{12} \oplus Z_4$,

в) порядка p^s в примарной группе $Z_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{n_k}}$?

7.7. Доказать, что кольцо эндоморфизмов конечной абелевой группы коммутативно тогда и только тогда, когда эта группа является циклической.

7.8. Конечная абелева группа является циклической тогда и только тогда, когда каждая ее p-компонента — циклическая группа.

7.9. Аддитивная абелева группа G делима тогда и только тогда, когда уравнение $px = a$ разрешимо в группе G для любого элемента a и любого простого числа p.

7.10. Найти примарное разложение группы $\mathbb{Z}^3/R\mathbb{Z}^3$, где

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

7.11. Пусть

$$L_m = \big\{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{Z}^n \bigm| m \mid (x_1 + \cdots + x_n)\big\}.$$

Найти индекс $[\mathbb{Z}^n : L_m]$.

7.12. Найти факторгруппу $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$, если $B \in SL(n, \mathbb{Z})$.

7.13. Пусть $B \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{Z})$ и $G = \mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n = G_{\text{free}} \oplus G_{\text{tors}}$. Доказать, что если $\det B \neq 0$, то $G_{\text{free}} = 0$. Верно ли, что если $\det B = 0$, то $\operatorname{rk} G_{\text{tors}} = n - \operatorname{rk} B$?

8. Алгебры

8.1. Вычислить ряды Пуанкаре
$$P_A(t) = \sum_k (\dim A_k) t^k$$
градуированных алгебр
$$k\langle x, y\rangle/(x^2 - xy - yx),$$
$$k\langle x, y\rangle/(x^2),$$
где $k\langle x, y\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, порожденная x, y.

8.2. Пусть T — центральная конечномерная алгебра с делением над полем k и P — ее максимальное подполе. Тогда
$$[T : k] = [P : k]^2.$$

8.3. Пусть $Z(A)$ — центр алгебры A. Доказать, что
$$Z(A \otimes B) = Z(A) \otimes Z(B).$$

8.4. Пусть L — некоторое поле, $\phi\colon L \to L$ — его автоморфизм, $\mathcal{L}$ — алгебра конечных влево рядов Лорана $\sum_{i=-M}^{\infty} a_i t^i$, $a_i \in L$ с обычной операцией сложения и умножением по правилам
$$ta = \phi(a)t, \quad a \sum a_i t^i = \sum (aa_i) t^i.$$
Доказать, что $\mathcal{L}$ — тело.

8.5. Если алгебра $K[x]/(f(x))$ полупроста, то многочлен $f(x)$ не имеет кратных неприводимых множителей.

8.6. Если A — центральная простая алгебра над полем k и $\dim_k A = 4$, то либо $A \cong M_2(k)$, либо A есть алгебра с делением.

8.7. Пусть L — конечное расширение поля k. Доказать эквивалентность следующих условий:

1) алгебра $L \otimes L$ является полупростой,
2) всякий элемент поля L сепарабелен над k;
3) алгебра $A \otimes L$ полупроста для любой полупростой коммутативной k-алгебры A.

8.8. Пусть A — полупростая алгебра над полем k ($\operatorname{char} k \neq 2$) и $[A : k] = 2$. Доказать, что либо $A \cong k \times k$, либо A — квадратичное расширение поля k.

8.9. Доказать, что если K есть $\mathbb{Q}$-алгебра и $K \otimes \mathbb{R}$ — алгебра с делением, то для K есть только три возможности:

$$
\begin{aligned}
&K \cong \mathbb{Q},\\
&K \cong \mathbb{Q}(\sqrt{m}), \quad m \in \mathbb{Q},\ m < 0,\\
&K \cong D_{\mathbb{Q}}(a,b), \quad a,b \in \mathbb{Q},\ a<0,\ b<0.
\end{aligned}
$$

($D_{\mathbb{Q}}(a,b)$ — алгебра кватернионов с образующими i, j и соотношениями $i^2 = a,\ \ j^2 = b,\ \ ij = -ji$.)

8.10. Если A и B — две конечно порожденные алгебры без делителей нуля над алгебраически замкнутым полем, то их тензорное произведение $A \otimes B$ является алгеброй без делителей нуля.

8.11. Пусть A — алгебра над полем k с базисом $\{e_1, e_2, u\}$ и таблицей умножения

	e_1	e_2	u
e_1	e_1	0	u
e_2	0	e_2	0
u	0	u	u

Доказать ассоциативность этой алгебры. Найти $\operatorname{rad} A$, $A/\operatorname{rad} A$.

8.12. Пусть A — не нильпотентная ассоциативная алгебра. Доказать, что в ней имеется ненулевой идемпотент.

8.13. Алгебра Вейля A_n над полем k определяется образующими $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ и соотношениями

$$
\begin{gathered}
x_i x_j = x_j x_i, \quad \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i,\\
\partial_i x_i - x_i \partial_i = 1, \quad \partial_j x_i = x_i \partial_j \text{ при } i \neq j.
\end{gathered}
$$

Докажите, что

а) Алгебра A_n изоморфна алгебре дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на аффинной плоскости $\mathbb{A}^n$, если поле k имеет характеристику нуль.

б) Алгебра A_n проста, если $\operatorname{char} k = 0$. Что будет, если характеристика поля является простым числом?

в) Алгебра A_n нетерова справа и слева.

г) Алгебра A_n является кольцом Оре.

д) Каждый собственный левый идеал алгебры A_n порождается двумя элементами (теорема Стаффорда).

8.14. Пусть G — конечная группа, $H = kG$ — ее групповая алгебра. Доказать, что отображение $\Delta\colon g \mapsto g \otimes g$ продолжается до гомоморфизма алгебр $\Delta\colon H \to H \otimes H$ (он называется коумножением). Доказать коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H\otimes H \arrow[d, "\Delta\otimes 1"] \\ H\otimes H \arrow[r, "1\otimes\Delta"] & H\otimes H\otimes H \end{tikzcd}$$

(она называется аксиомой коассоциативности) и

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, shift left, "1\otimes S"] \arrow[r, shift right, "S\otimes 1"'] & H\otimes H \arrow[d, "m"] \\ H \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & k \arrow[r, "\eta"] & H \end{tikzcd}$$

где m — умножение в H, $\varepsilon(g) = 1$ — коединица (на всю алгебру H это отображение продолжается по линейности), $\eta(\alpha) = \alpha e$ — единица, $S(g) = g^{-1}$ (последнее отображение называется антиподом, а последняя диаграмма — аксиомой антипода). Записать аксиому единицы в группе в терминах коммутативности некоторой диаграммы.

8.15. Пусть G есть алгебраическая группа и $H = k[G]$ — алгебра регулярных функций на ней. Доказать, что отображение $\Delta\colon H \to H\otimes H$ при котором $(\Delta f)(x,y) = f(xy)$, будет коассоциативным коумножением. Если положить далее $\varepsilon(f) = f(e)$, $\eta(\alpha) = \alpha.1$, $S(f)(g) = f(g^{-1})$, то выполняется аксиома антипода.

8.16. Доказать, что для конечной группы G алгебры kG и $k[G]$ двойственны друг другу как алгебры Хопфа, т. е. существует невырожденное спаривание между векторными пространствами kG и $k[G]$, относительно которого оператор умножения в одной алгебре сопряжен коумножению в другой.

8.17. Выписать явные формулы для коумножения и антипода в случае $G = GL_n$, $G = SL_n$.

8.18. Доказать, что универсальная обертывающая $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ будет алгеброй Хопфа, если для $x \in \mathfrak{g}$ положить $\Delta x = 1\otimes x + x\otimes 1$, $\varepsilon x = 0$ и $Sx = -x$.

9. Гомологическая алгебра

9.1. Доказать, что если строка

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

точна, то $A \cong B$.

9.2. (Лемма о пяти гомоморфизмах.) Пусть в нижеследующей коммутативной диаграмме строки точны, а все вертикальные стрелки, кроме средней, являются изоморфизмами:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & A_4 \arrow[r] \arrow[d] & A_5 \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Доказать, что и средняя вертикальная стрелка — изоморфизм. Это утверждение верно и при более слабых условиях на вертикальные стрелки. При каких?

9.3. В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[r] \arrow[d] & D_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3 &
\end{tikzcd}$$

точны строки, а также левый и правый столбцы. Будет ли точен средний столбец?

9.4. (Лемма о змее.) В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

строки точны. Доказать, что существует такой гомоморфизм $\delta\colon \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$, что последовательность

$$\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} g \longrightarrow \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Coker} g \longrightarrow \operatorname{Coker} h$$

точна.

9.5. (Сложение Бэра.) Расширением модуля M с помощью модуля N (в фиксированной категории модулей) называется точная последовательность

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 .$$

Расширения (E, i, π) и (E', i', π') называются изоморфными, если существует изоморфизм модулей $E \to E'$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "\pi"] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, phantom] \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & M \arrow[r] & 0. \\ & E' \arrow[ur, "\pi'"'] & & \end{tikzcd}$$

Суммой расширений (E, i, π) и (E', i', π') называется последовательность

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\tilde{i}} E \,\Box\, E' \xrightarrow{\tilde{\pi}} M \longrightarrow 0 ,$$

в которой $E \,\Box\, E' = B/D$, где

$$B = \{\, (e, e') \in E \oplus E' \mid \pi(e) = \pi'(e') \,\},$$
$$D = \{\, (e, e') \in B \mid \exists n \in N : e = -i(n),\ e' = i'(n) \,\},$$
$$\tilde{i}(n) = (i(n), 0) + D = (0, i'(n)) + D,$$
$$\tilde{\pi}((e, e') + D) = \pi(e) = \pi'(e').$$

Доказать, что эта операция превращает множество $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ классов изоморфных расширений в абелеву группу, нулем которой служит тривиальное расширение

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_1} N \oplus M \xrightarrow{p_2} M \longrightarrow 0 ,$$

где i_1 и p_2 — очевидные вложение и проекция.

9.6. Вычислить $\mathrm{Ext}^1(Z_p, Z_p)$ в категории абелевых групп (p — простое число).

9.7. Доказать, что кольца Гротендика категорий представлений $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}\, Q_8$ и $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}\, D_4$ изоморфны.

10. Группы

10.1. Пусть $X(\mathbb{R})$ — множество точек вещественной плоскости, лежащих на кривой $y = x^3$. Определим сумму $P \oplus Q$ точек $P, Q \in X$ следующим образом: проведем прямую, соединяющую точки P и Q (касательную, если $P = Q$), тогда $P \oplus Q$ есть точка, центрально симметричная относительно начала координат к точке пересечения кривой X и проведенной прямой. Найти нейтральный элемент относительно операции $\oplus$. Доказать, что множество X образует абелеву группу относительно операции $\oplus$. Доказать, что обратный элемент к точке P есть точка, центрально симметричная ей относительно начала координат. Проверить, что подмножество $X(\mathbb{Q})$ рациональных точек той же кривой образует подгруппу в $(X(\mathbb{R}), \oplus)$.

10.2. Привести несколько примеров бесконечных групп, каждый элемент которых имеет конечный порядок.

10.3. Доказать, что в группе четного порядка обязательно содержится элемент порядка 2.

10.4. Доказать, что пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса есть подгруппа конечного индекса.

10.5. Доказать, что в конечно порожденной группе существует лишь конечное число подгрупп, индекс которых не превосходит заданного натурального числа N.

10.6. Верно ли, что всякая подгруппа конечно порожденной группы также конечно порождена?

10.7. При каких n и k отображение

$$k^\times \times SL_n(k) \to GL_n(k), \quad (\lambda, g) \mapsto \lambda \cdot g$$

является изоморфизмом?

10.8. Доказать, что i-ый коммутант $G^{(i)}$ группы G нормален в G.

10.9. Привести пример ситуации, когда $K \lhd H$, $H \lhd G$, но подгруппа K не является нормальной в G.

10.10. Доказать, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует нормальный ряд

$$G \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_N \rhd \{e\}$$

с $G_i/G_{i+1} \cong Z_{n_i}$.

10.11. Доказать, что факторгруппа неабелевой группы по центру не может быть циклической. Верно ли, что факторгруппа неабелевой группы по центру не может быть абелевой?

10.12. Вычислить порядки групп $SL_n(\mathbb{F}_q)$ и $PSL_n(\mathbb{F}_q)$.

10.13. Вычислить порядок $\varphi(n,m)$ группы $GL_n(\mathbb{Z}_m)$. (Заметим, что $\varphi(1,m)$ совпадает со значением функции Эйлера $\varphi(m)$.)

10.14. Доказать, что отображение редукции по модулю N

$$SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(Z_N)$$

является эпиморфизмом. Найти порядок группы $SL_n(Z_N)$.

10.15. Описать орбиты действия $X \mapsto CXC^{-1}$ группы $GL_n(\mathbb{C})$ на себе.

10.16. Описать орбиты действия группы $O(2,1)$ в $\mathbb{R}^3$.

10.17. Доказать, что в группе S_n любой элемент есть произведение двух инволюций. Верно ли это утверждение для A_n?

10.18. Доказать, что любые две инволюции g_1, g_2 в произвольной конечной группе G порождают группу диэдра $D_{2|g_1g_2|}$.

10.19. Доказать, что любая группа порядка p^n разрешима, а порядка p^2 — абелева. (Трудная теорема Бернсайда утверждает, что всякая группа порядка p^aq^b, где p и q — различные простые числа, разрешима. Из этого следует, что порядок простой группы должен делиться по крайней мере на три различных простых числа!)

10.20. Доказать, что если $p^n \mid |G|$, где p — простое число, то в G существует подгруппа порядка p^n.

10.21. Доказать, что всякая группа порядка p^2q, где p и q — различные простые числа, разрешима.

10.22. Если p и q — различные простые числа и $q-1$ не делит p, то всякая группа порядка pq является циклической.

10.23. Доказать разрешимость всех групп, порядок которых меньше 60.

10.24. Доказать коммутативность всех групп порядков 185 и 255.

10.25. Пусть p, q и r — различные простые числа. Доказать, что неразрешимая группа порядка p^2qr изоморфна A_5.

10.26. а) Доказать, что группа $SL_n(k)$ порождается трансвекциями, т. е. матрицами вида $t_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij}$.

б) Вычислить (групповой) коммутатор двух трансвекций.

в) Доказать, что если k — поле, то при $n \geqslant 3$

$$GL_n(k)' = SL_n(k)' = SL_n(k),$$

а при $|k| > 3$ имеем

$$GL_2(k)' = SL_2(k)' = SL_n(k).$$

г) Объясните, почему группа $SL(2, \mathbb{F}_3)$ порядка 24 разрешима.

10.27. Описать классы сопряженных элементов в группе $SL_2(\mathbb{F}_p)$.

10.28. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что группа порядка $2p$ изоморфна либо Z_{2p}, либо D_p.

10.29. Классифицировать (с точностью до изоморфизма) все группы, порядок которых не превосходит 11.

10.30. Классифицировать (с точностью до изоморфизма) все группы порядка 12.

10.31. а) Используя действие на проективной прямой, построить гомоморфизм $SL_2(\mathbb{F}_3) \to S_4$ и доказать, что его ядро изоморфно Z_2, а образ есть A_4.

б) Является ли группа $SL_2(\mathbb{F}_3)$ (полу)прямым произведением групп Z_2 и A_4?

10.32. Доказать, что все образы группы Q_8 в группе S_8, получающиеся при применении теоремы Кэли, сопряжены друг другу. Верно ли, что все подгруппы группы S_8, изоморфные Q_8, сопряжены?

10.33. Доказать, что $SL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

10.34. По каждой конечной группе G построим ориентированный граф, вершины которого отвечают подгруппам G, а ребра — отношениям включения. Этот граф называется структурой подгрупп.

а) Описать все группы, структура подгрупп которых тривиальна, т. е. состоит из двух вершин и одного ребра.

б) Изоморфны ли группы, имеющие одинаковые структуры подгрупп?

в) Назовем структуру подгрупп размеченной, если в каждой вершине указан класс изоморфизма соответствующей подгруппы. Предположим, что для двух групп их размеченные структуры подгрупп совпадают везде, за исключением вершин, отвечающих самим группам. Изоморфны ли эти группы?

10.35. Доказать, что у любой конечной группы движений евклидова пространства всегда есть неподвижная точка.

10.36. Описать все конечные подгруппы групп O_2, SO_2.

10.37. Пусть L — решетка в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, $\operatorname{Aut} L$ — группа движений, оставляющих на месте точку 0 и переводящих L в себя.

а) Доказать, что группа $\operatorname{Aut} L$ конечна.

б) Для $n = 2, 3$ найти решетки, у которых порядок $\operatorname{Aut} L$ максимален.

в) Привести нижнюю и верхнюю оценки максимального порядка группы $\operatorname{Aut} L$ для данной размерности n.

10.38. Для каждой из следующих групп

$$Z_n,\ S_n,\ D_{2n},\ D_{2n+1},\ Q_8,\ A_3,\ A_4$$

вычислить центр, коммутант, факторгруппу по коммутанту, описать классы сопряженных элементов и найти их мощности (это понадобится для описания представлений).

10.39. Доказать, что симметрическая группа S_n является n-транзитивной, а группа A_n — $(n-2)$-транзитивна. Доказать, что любая $(n-2)$-транзитивная группа, действующая на множестве из n элементов, изоморфна либо S_n, либо A_n. (Действие группы G на множестве X называется k-транзитивным, если любой набор из k различных элементов множества X действием некоторого элемента из G может быть переведен в любой другой такой набор.)

10.40. Предположим, что группа G транзитивно действует на множестве X, и пусть существует такая нормальная подгруппа H, что

$$G_x \cap H = \{e\} \quad \text{и} \quad G_x H = G.$$

Тогда

1) естественное действие стабилизатора G_x на H сопряжениями эквивалентно действию G_x на X;

2) если G — m-транзитивна и $|X| = n$, то

   если $m = 2$, то $n = p^k$ и $H \cong (Z_p)^r$ — элементарная абелева p-группа, если $m = 3$, то $n = 2^l$ или $n = 3$ и $G \cong S_3$, а

при $m \geqslant 4$ имеем $m = n = 4$ и $G \cong S_4$.

10.41. Вывести из результатов двух предыдущих задач простоту группы A_n при $n \geqslant 5$.

10.42. Пусть действие группы G на множестве X транзитивно. Это действие G называется примитивным, если стабилизатор G_x — максимальная по включению подгруппа. Доказать, что всякое 2-транзитивное действие примитивно.

10.43. Пусть действие $G\colon X$ эффективно, транзитивно и примитивно, и $\{e\} \neq H \lhd G$. Доказать, что действие H на X транзитивно и $G = G_x H$.

10.44. Используя результаты предыдущих задач, доказать следующую теорему Ивасавы. Пусть группа G примитивно действует на множестве X и

1) $G = G'$,

2) для каждого $x \in X$ стабилизатор G_x содержит абелеву нормальную подгруппу H_x,

3) подгруппы H_x порождают G (или для фиксированной точки x подгруппа H_x нормально порождает G).

Тогда группа G проста.

10.45. Вывести из теоремы Ивасавы простоту групп $PSL_n(K)$ при $|K| \geqslant 4$.

10.46. Используя теорему Ивасавы, доказать простоту группы A_5.

11. Представления

11.1. Доказать существенность условий теоремы Машке о полной приводимости (конечности группы, условия $\operatorname{char} k \nmid |G|$).

11.2. В n-мерном векторном пространстве V над полем k выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и зададим представление группы S_n на базисе как $\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$, продолжив его далее по линейности. Доказать, что подпространство $L \subset V$, порожденное вектором $e_1 + \cdots + e_n$ является инвариантным; подпространство W_{n-1}, порожденное векторами $e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n$, также инвариантно. Ограничение построенного представления на W_{n-1} неприводимо над любым полем, а если $\operatorname{char} k \nmid n$, то $V = L \oplus W_{n-1}$.

11.3. Могут ли неприводимые комплексные представления конечной группы исчерпываться пятью одномерными и одним пятимерным?

11.4. Доказать, что всякое неприводимое комплексное представление конечной группы конечномерно.

11.5. Доказать, что всякое неприводимое представление абелевой группы над алгебраически замкнутым полем одномерно.

11.6. Доказать, что множество классов изоморфных одномерных представлений конечной группы G над фиксированным полем k образует группу относительно тензорного умножения (над k), причем обращение является переходом к сопряженному представлению, а единицей служит класс тривиального представления. Эта группа называется группой Пикара $\operatorname{Pic}_k(G)$. Доказать, что $\operatorname{Pic}_k(G) \cong \operatorname{Pic}_k(G/G')$, а если поле k алгебраически замкнуто, то $\operatorname{Pic}_k(G) \cong G/G'$. Можно ли ослабить условие алгебраической замкнутости, предположив, что в поле k имеется «достаточно много» корней из единицы. Описать поведение группы Пикара конечной абелевой группы при расширении поля. Попробовать сформулировать аналогичные утверждения для бесконечных групп.

11.7. Пусть V — конечномерное вещественное неприводимое представление группы G. Доказать, что его комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ либо является неприводимым (комплексным) представлением, либо разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений одинаковой размерности: $V^{\mathbb{C}} = V \oplus \bar{V}$, где черта означает комплексное сопряжение. (Указание: воспользуйтесь тем, что комплексное подпространство $U \subset V^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией подпространства $U' \subset V$ тогда и только тогда, когда $U = \bar{U}$.) Сформулировать и доказать аналог этого утверждения для произвольного расширения Галуа K/k.

11.8. Описать все неприводимые комплексные представления групп

$$Z_n,\ D_{2n},\ D_{2n+1},\ Q_8,\ A_3,\ S_4,\ A_4,\ S_3 \times S_3.$$

11.9. Описать все неприводимые вещественные представления группы Z_n.

11.10. Вычислить неприводимые характеры группы A_5.

11.11. Рассмотрим действие симметрической группы S_4 на алгебре плюккеровых координат:

$$P = \mathbb{C}[\,\pi_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 4]/(\pi_{12}\pi_{34} - \pi_{13}\pi_{24} + \pi_{14}\pi_{23})$$

по правилу $\sigma.\pi_{ij} = \pi_{\sigma(i)\sigma(j)}$, далее действие продолжается по линейности и мультипликативности (при этом $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$). Разложить на неприводимые представления подпространство P_2 алгебры P, порожденное квадратичными мономами от плюккеровых координат.

11.12. Разложить регулярные комплексные представления групп S_3, Z_n, Q_8, D_n в прямую сумму неприводимых.

11.13. Пусть порядок неабелевой группы G есть куб простого числа. Найдите количество неприводимых комплексных представлений этой группы и количество классов сопряженных элементов в G.

11.14. Пусть группа G действует на конечном множестве X. Через $\mathcal{F}(X)$ обозначим пространство функций на X, а через χ — характер G-модуля $\mathcal{F}(X)$. Пусть χ_{id} — характер тривиального представления.

а) Доказать формулу Бернсайда

$$\langle \chi, \chi_{\mathrm{id}} \rangle = (\text{число орбит группы } G \text{ на } X).$$

б) Скалярный квадрат $\langle \chi, \chi \rangle$ равен числу орбит группы G в $X \times X$.

в) Предположим, что группа G действует на X дважды транзитивно. Тогда

$$\langle \chi, \chi \rangle = 2 \iff \chi = \chi' + \chi_{\mathrm{id}},$$

где χ' — характер неприводимого представления, и

$$\langle \chi, \chi \rangle = 3 \iff \chi = \chi' + \chi'' + \chi_{\mathrm{id}},$$

где χ', χ'' — характеры различных неприводимых представлений.

11.15. Пусть G — конечная группа, V — конечномерное векторное пространство над полем рациональных чисел, $\rho\colon G \to GL(V)$ — неприводимое представление группы G.

а) Доказать, что представление группы G в $V \otimes \mathbb{R}$ неприводимо над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда пространство G-инвариантных симметрических билинейных форм в $V \otimes \mathbb{R}$ одномерно.

б) Доказать, что значение характера представления группы G в пространстве $S^2(V)$ равно $\frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$. (Указание: $V^{\otimes 2} = S^2(V) \oplus \oplus \bigwedge^2(V)$.)

в) С помощью результата п. б) показать, что представление G неприводимо в $V \otimes \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{|G|}\sum \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)) = 1.$$

г) Пусть $K = \mathrm{End}_G(V) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid f\rho(g) = \rho(g)f \ \forall g \in G \}$. Доказать, что представление G в $V \otimes \mathbb{R}$ неприводимо тогда и только тогда, когда $K \otimes \mathbb{R}$ — алгебра с делением.

11.16. Найти все неприводимые комплексные представления группы A_5 и дать их геометрическое описание.

11.17. Комплексное представление V конечной группы G тогда и только тогда изоморфно своему сопряженному, когда характер χ_V принимает только вещественные значения.

11.18. Представление V группы G тогда и только тогда изоморфно своему сопряженному, когда существует ненулевая G-инвариантная форма на пространстве V. Если представление V неприводимо, то такая форма B_V единственна с точностью до множителя и либо симметрична, либо кососимметрична.

11.19. Пусть V — неприводимое комплексное представление конечной группы G с вещественным характером χ. Тогда

а) если форма B_V симметрична, то пространство V получается с помощью расширения поля скаляров $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ из некоторого неприводимого вещественного представления $\tilde{V}$ с характером χ.

б) если форма B_V кососимметрична, то пространство V не происходит ни из какого вещественного. Ограничение поля скаляров до $\mathbb{R}$ определяет в этом случае вещественное неприводимое представление $V_{\mathbb{R}}$ с характером 2χ. Его централизатор изоморфен алгебре кватернионов.

11.20. Пусть G — абелева группа, $\mathcal{F}(G)$ — пространство комплекснозначных функций на G, $f \in \mathcal{F}(G)$ и T_γ — оператор сдвига на элемент $\gamma \in G$: $(T_\gamma f)(g) = f(\gamma g)$. Доказать, что характеры группы G суть собственные векторы оператора T_γ. Найти соответствующие собственные значения.

11.21. Разложить в прямую сумму неприводимых естественное представление группы S_4 в пространстве функций на множестве вершин куба.

11.22. Изоморфны ли алгебра кватернионов и вещественная групповая алгебра группы кватернионных единиц Q_8?

11.23. Можно ли восстановить с точностью до изоморфизма конечную группу по следующим данным:

а) по количеству неизоморфных неприводимых комплексных представлений каждой размерности,

б) по групповой алгебре,

в) по таблице умножения неприводимых представлений (имеется в виду тензорное умножение представлений и последующее разложение произведения в сумму неприводимых)?

По каким из этих данных восстанавливается конечная абелева группа?

12. Группы и алгебры Ли

12.1. Найти касательную алгебру следующих групп: SL_n, O_n, SO_n, U_n, SU_n, Sp_n, Aff_n.

12.2. Доказать, что конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ может быть превращено в представление группы Ли $SL(n)$ («проинтегрировано»).

12.3. Доказать, что $\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad}\, X}$.

12.4. Доказать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности 2 коммутативна.

12.5. Доказать, что всякая двумерная некоммутативная алгебра Ли разрешима, но не нильпотентна.

12.6. Описать все вещественные алгебры Ли размерности 2.

12.7. Описать неприводимые комплексные представления групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, S^1.

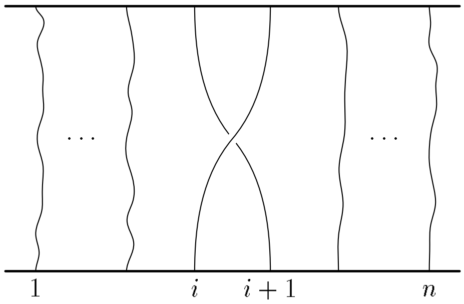
13. Представления группы кос

13.1. Доказать, что группа кос B_n может быть описана как группа, порожденная образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i-j| > 1,$$
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}.$$

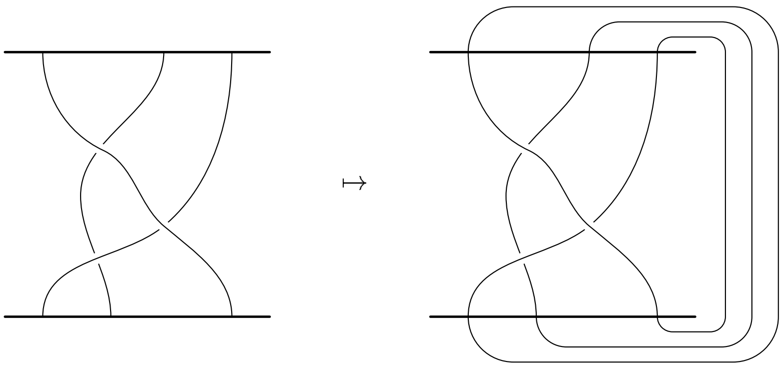
При этом

$\sigma_i =$



13.2. Имеется эпиморфизм групп $B_n \to S_n$, при котором $\sigma_i \mapsto$ $\mapsto (i, i+1)$.

13.3. Доказать, что всякое зацепление может быть получено как замыкание некоторой косы:



13.4. Пусть $R\colon V \otimes V \to V \otimes V$ — некоторый линейный оператор, $\dim V = m$. Показать, что сопоставление

$$\rho\colon \sigma_i \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes R \otimes \cdots \otimes 1,$$

где оператор R действует на i-й и $i+1$-й тензорные сомножители в $V^{\otimes N}$, продолжается до представления группы B_n тогда и только тогда, когда R удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера

$$(R\otimes 1)(1\otimes R)(R\otimes 1)=(1\otimes R)(R\otimes 1)(1\otimes R) \qquad \text{(QYBE)}$$

13.5. Проверить, что следующие операторы удовлетворяют (QYBE):

а) $P\colon x\otimes y\mapsto y\otimes x$,

б) $R_q=\begin{pmatrix}-q & 0 & 0 & 0\\ 0 & q^{-1}-q & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -q\end{pmatrix}$,

в) если $\{v_1,\ldots,v_m\}$ — фиксированный базис пространства V, то положим

$$R_q(v_i\otimes v_j)=\begin{cases} v_j\otimes v_i, & \text{если } i>j,\\ -qv_i\otimes v_i, & \text{если } i=j,\\ v_j\otimes v_i+(q^{-1}-q)v_i\otimes v_j, & \text{если } i<j\end{cases}$$

(обобщение предыдущего примера).

г) $R_{p,q}=\begin{pmatrix}1 & p & -p & pq\\ 0 & 0 & 1 & -q\\ 0 & 1 & 0 & q\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

При этом $R_1=R_{0,0}=P$ и

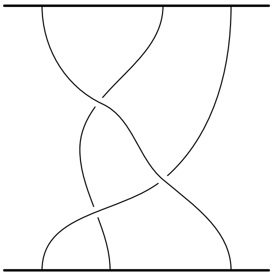
$$R_{p,q}^2=1,\quad (R_q+q)(R_q-q^{-1})=0.$$

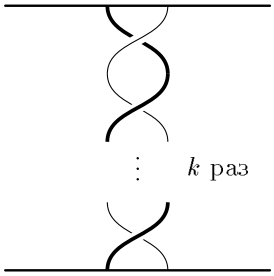
13.6. а) Представим косу σ как произведение образующих $\sigma=\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_N}$. Тогда оператор

$$\rho(\sigma)=\rho(\sigma_{i_1})\ldots\rho(\sigma_{i_N})$$

зависит только от косы σ, но не от выбора ее представления. В частности, число $t(\sigma)=\operatorname{tr}\rho(\sigma)$ есть инвариант косы.

б) Выбрав какой-нибудь оператор R из предыдущей задачи, вычислить инвариант $t(\sigma)$ для следующих кос:





в) Пусть оператор R фиксирован. Различает ли инвариант $t(\sigma)$ косы из B_n? Верно ли, что этот инвариант различает косы, если при заданном n взять оператор R_q из п. в) предыдущей задачи с достаточно большим m (зависящим только от n)?

14. Конечномерные представления $GL_n(\mathbb{C})$

Везде ниже

$G = GL_n(\mathbb{C})$,

$T = (\mathbb{C}^\times)^n$ — максимальный тор, реализованный диагональными матрицами,

B_+, B_- — борелевские подгруппы, состоящие из верхних и нижних треугольных матриц соответственно,

V — тавтологический G-модуль,

все G-модули предполагаются конечномерными комплексными векторными пространствами,

G-модуль U называется полиномиальным, если он происходит из некоторого $\operatorname{End} V$-модуля.

14.1. Найти группы характеров (т. е. одномерных представлений) групп T, $B_\pm$, G.

14.2. Показать, что всякий G-модуль U после ограничения на тор разлагается в прямую сумму T-модулей U_λ:

$$U = \bigoplus_{\lambda \in P(U)} U_\lambda.$$

Можно считать, что λ есть набор целых чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и тогда

$$U_\lambda = \{\, u \in U \mid t.u = t_1^{\lambda_1} \ldots t_n^{\lambda_n} u \text{ для всех } t \in T \,\}.$$

Набор λ называется весом, указанное разложение модуля U — весовым, подпространство U_λ — весовым подпространством, его элементы — весовыми векторами, размерность U_λ называется кратностью веса λ, множество $P(U)$ — множеством весов G-модуля U.

На множестве $\mathbb{Z}^n$ всех весов введем лексикографический порядок, полагая $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, если $\lambda_1 > \mu_1$ или $\lambda_1 = \mu_1$, но $\lambda_2 > \mu_2$ или $\lambda_2 = \mu_2$, но $\lambda_3 > \mu_3 \ldots$

14.3. Найти веса и весовые векторы G-модулей $\bigwedge^k V$, $S^k V$.

14.4. Пусть U есть B_+-модуль и $v \in U$ — весовой вектор веса λ. Тогда для $b \in B_+$ имеем $b.v = \lambda v + u$, где u есть некоторый вектор, лежащий в подпространстве U, порожденном векторами, веса которых больше λ. Поэтому если вес вектора v является наибольшим, то прямая $\langle v \rangle$ является B_+-инвариантной. (Таким образом, индекс «+» в обозначении B_+ указывает на то, что действие группы B_+ повышает веса. В том же смысле действие B_- понижает их.)

14.5. Пусть U есть G-модуль, порожденный вектором старшего веса v_λ, т. е. $U = G.v_\lambda$ и $B_+\langle v_\lambda\rangle = \langle v_\lambda\rangle$. Тогда

а) любой другой вес в U строго меньше λ и размерность U_λ равна 1;

б) в U содержится единственное максимальное собственное инвариантное подпространство, фактор по которому есть неприводимое представление.

14.6. а) Всякое неприводимое представление является представлением старшего веса.

б) Неприводимые представления одного и того же старшего веса изоморфны.

Неприводимое представление старшего веса λ обозначается $L(\lambda)$.

14.7. Пусть $\omega_k = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (единицы стоят на первых k местах). Тогда $L(\omega_k) = \bigwedge^k V$.

14.8. Пусть $H \subset G$ — некоторая подгруппа, U — ее представление. Положим

$$\operatorname{Ind}_H^G U = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} U.$$

Доказать закон взаимности Фробениуса:

$$\operatorname{Hom}_{H-\mathrm{mod}}(\operatorname{Res}_H^G W, U) = \operatorname{Hom}_{G-\mathrm{mod}}(W, \operatorname{Ind}_H^G U),$$

где $\operatorname{Res}_H^G W$ есть ограничение представления W группы G на подгруппу U.

14.9. Пусть $H^0(\lambda) = \operatorname{Ind}_G^{B_+}(\lambda)$, где λ — одномерное представление B_+, определенное как

$$\begin{pmatrix} t_1 & * & \ldots & * \\ 0 & t_2 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix} \mapsto t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \ldots t_n^{\lambda_n}.$$

Доказать, что

а) В пространстве $H^0(\lambda)$ существует единственная B_+-инвариантная прямая и ее вес равен λ.

б) $H^0(\lambda)$ обладает единственным неприводимым подпредставлением, изоморфным $L(\lambda)$.

в) Всякий другой композиционный фактор $H^0(\lambda)$ имеет вес строго меньший λ.

14.10. Если G-модуль U обладает единственным неприводимым подмодулем, изоморфным $L(\lambda)$, и любой другой композиционный фактор U имеет вес строго меньший λ, то U изоморфен подмодулю в $H^0(\lambda)$.

14.11. Назовем вес $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ доминантным, если $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) вес λ доминантен,

б) $H^0(\lambda) \neq 0$,

в) существует $L(\lambda)$.

14.12. Пусть $U = \bigoplus\limits_{\lambda} U_\lambda$ — весовое разложение G-модуля U. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\, e^\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}^n]$, в котором $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$, и его элемент

$$\operatorname{ch} U = \sum_\lambda (\dim U_\lambda) e^\lambda.$$

Он называется характером модуля U. Доказать, что

а) $\operatorname{ch}(U \otimes U') = \operatorname{ch} U \operatorname{ch} U'$.

б) $\operatorname{ch} U^* = \sum\limits_\lambda (\dim U_\lambda) e^{-\lambda}$.

в) $\operatorname{ch} U = \operatorname{ch} U'$ тогда и только тогда, когда модули U и U' имеют один и тот же набор композиционных факторов. Таким образом, отображение ch корректно определено на кольце Гротендика категории конечномерных представлений группы G.

г) характер $\operatorname{ch} U$ является S_n-инвариантом, если считать, что $\sigma \in S_n$ действует на вес $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ перестановкой компонент:

$$\sigma(\lambda) = (\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$$

и $\sigma e^\lambda = e^{\sigma(\lambda)}$.

д) $L(\lambda)^* = L(-w_0(\lambda))$, где

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

есть элемент «наибольшей длины» в S_n.

14.13. Пусть λ и μ — доминантные веса, а последовательность

$$0 \to L(\lambda) \to U \to L(\mu) \to 0$$

точна и нерасщепима. Тогда либо U есть подмодуль в $H^0(\lambda)$, либо U^* есть подмодуль в $H^0(\mu)$.

14.14. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) Всякий G-модуль вполне приводим.

б) Модули $H^(\lambda)$ неприводимы для доминантных весов λ.

б) $\operatorname{Ext}^1_{G-\mathrm{mod}}(L(\lambda), L(\mu)) = 0$ для всех доминантных весов λ и μ.

14.15. Пусть в $V^{\otimes N}$ группа S_N действует перестановками тензорных сомножителей, а $\operatorname{End}_{S_N}(V^{\otimes N})$ есть кольцо эндоморфизмов $V^{\otimes N}$, перестановочных с этим действием. Доказать, что

$$\operatorname{End}_{S_N}(V^{\otimes N}) \cong S^N(\operatorname{End} V).$$

14.16. Определим алгебру Шура Sch как (пополненную) прямую сумму $\mathrm{Sch} = \hat{\bigoplus\limits_N} \mathrm{Sch}_N$ с

$$\mathrm{Sch}_0 = \mathbb{C},$$
$$\mathrm{Sch}_1 = \mathrm{End}\, V,$$
$$\mathrm{Sch}_N = \mathrm{End}_{S_N}(V^{\otimes N}),$$

а алгебру M как прямую сумму $\mathrm{M} = \bigoplus\limits_N \mathrm{M}_N$ с $\mathrm{M}_N = S^N((\mathrm{End}\, V)^*)$. Проверить, что эти алгебры являются биалгебрами и что естественное спаривание между Sch_1 и M_1 продолжается до невырожденного спаривания между Sch и M, согласованного со структурами биалгебр (умножение в Sch переходит в коумножение в M и наоборот).

14.17. Построить взаимно однозначное соответствие между левыми $\mathrm{End}\, V$-модулями и правыми M-комодулями, пользуясь тем, что по двойственности отображение $\mathrm{End}\, V \times U \to U$ определяет отображение $U^* \to U^* \otimes (\mathrm{End}\, V)^*$. Показать, что при полученном соответствии сохраняется полупростота объектов этих категорий.

14.18. Доказать, что групповая алгебра $\mathbb{C}S_N$ полупроста, поэтому полупроста и алгебра Sch. Следовательно, все полиномиальные G-модули вполне приводимы.

14.19. Докажите, что

а) $L(\omega_n)^{\otimes m} \otimes H^0(\lambda) \cong H^0(\lambda + m\omega_n)$.

б) G-модуль $H^0(\lambda)$ при $\lambda > 0$ полиномиален.

в) G-модуль $H^0(\lambda)$ при доминантном λ неприводим.

Таким образом, доказана полная приводимость всякого G-модуля. В следующих задачах описывается реализация полиномиальных неприводимых модулей старшего веса.

14.20. Доказать, что алгебра $\mathbb{F}$ однородных функций на пространстве полных флагов в V порождается плюккеровыми координатами $\pi_I = \pi_{i_1,\ldots,i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, которые кососимметричны относительно перестановок элементов мультииндекса I и удовлетворяют серии соотношений Плюккера:

$$\sum_{\substack{K \subset I,\\ l(K)=s}} \epsilon((I-K)*K)\pi_{L*(I-K)}\pi_{K*J} = 0,$$

для всех мультииндексов L, I, J и чисел s таких, что $l(I) \geqslant s$ и $l(L) + l(I) - s \geqslant s + l(J)$. Здесь I, J, K, L — упорядоченные мультииндексы, $l(I)$ и т. д. — длина мультииндекса, $I - K$ получается из I вычеркиванием элементов из K, $K * J = (k_1, \ldots, k_s, j_1, \ldots, j_t)$ — конкатенация двух мультииндексов, наконец, $\epsilon((I-K)*K)$ есть -1 в степени равной числу инверсий в наборе $(I-K)*K$.

14.21. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ — некоторое разбиение числа n, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n$ и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_s > 0$. Обозначим через $\mathbb{F}^\alpha$ подпространство в $\mathbb{F}$, порожденное мономами вида $\pi_{I_1} \ldots \pi_{I_s}$ с $l(I_k) = \alpha_k$. Докажите, что

а) алгебра $\mathbb{F}$ градуирована разбиениями n, т.е. $\mathbb{F} = \bigoplus\limits_\alpha \mathbb{F}^\alpha$ и $\mathbb{F}^\alpha \mathbb{F}^\beta \subset \mathbb{F}^{\alpha+\beta}$.

б) $\mathbb{F}^{(k)} \cong \bigwedge^k V$ и $\mathbb{F}^{(1,\ldots,1)} \cong S^l V$ (если $l((1,\ldots,1)) = l$) как G-модули.

14.22. а) Проверить, что алгебра $\mathbb{F}$ есть G-модуль относительно следующего действия (заданного на образующих и продолженного по мультипликативности и линейности)

$$g.\pi_I = \sum_J |g_I^J| \pi_J,$$

где $|g_I^J|$ есть минор матрицы g, составленный из строк с номерами из I и столбцов с номерами из J.

б) Относительно этого действия $\mathbb{F}^\alpha$ есть модуль старшего веса, являющийся подмодулем в $H^0(\alpha^t)$, где α_i^t есть количество α_j не меньших, чем i. Следовательно, $L(\lambda) \cong H^0(\lambda) \cong \mathbb{F}^{\lambda^t}$ при $\lambda > 0$.

14.23. Схемой Юнга $Y(\alpha)$, отвечающей разбиению α числа n, называется множество

$$\{\, (i,j) \mid 1 \leqslant j \leqslant s,\ 1 \leqslant i \leqslant \alpha_j \,\}.$$

Таблица Юнга — это отображение $T\colon Y(\alpha) \to \{1, \ldots, n\}$. Таблица Юнга T называется стандартной, если числа в ее строках строго возрастают (слева направо), а в столбцах — не убывают (сверху вниз). Моном $\pi_{I_1} \ldots \pi_{I_s}$ называется стандартным, если таблица Юнга со строками $I_1, \ldots, I_s$ стандартна. Доказать, что, выбирая подходящим образом параметры в соотношениях Плюккера, любой моном вида $\pi_I \pi_J$ можно выразить через линейную комбинацию стандартных мономов. С помощью индукции показать далее, что алгебра $\mathbb{F}$ порождается стандартными мономами. Наконец, пользуясь тем, что плюккеровы координаты суть детерминанты некоторых матриц, доказать, что стандартные мономы линейно независимы. Таким образом, они составляют базис алгебры $\mathbb{F}$.

14.24. Пользуясь стандартными таблицами Юнга, найти $\dim L(\lambda)$ для $G = GL_3$ при $\lambda = (5,3,2)$, $\lambda = (4,2,1)$.

14.25. Разложить $V^{\otimes 3}$ в сумму неприводимых G-модулей.

15. Довески

15.1. а) Используя действие на проективной прямой, постройте гомоморфизм $SL(2,\mathbb{F}_3) \to S_4$ и докажите, что его ядро изоморфно Z_2, а образ есть A_4.

б) Является ли группа $SL(2,\mathbb{F}_3)$ (полу)прямым произведением групп Z_2 и A_4?

15.2. Доказать, что образы группы Q_8 в группе S_8, получающиеся при применении теоремы Кэли, сопряжены друг другу. Верно ли, что все подгруппы S_4, изоморфные Q_8, сопряжены?

15.3. Доказать, что $SL(2,\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

15.4. По каждой конечной группе G построим ориентированный граф, вершины которого отвечают подгруппам G, а ребра — отношениям вложенности. Этот граф называется структурой подгрупп.

а) Описать все группы, структура подгрупп которых тривиальна, т. е. состоит из двух вершин и одного ребра.

б) Изоморфны ли группы, имеющие одинаковые структуры?

в) Назовем структуру размеченной, если в каждой вершине указан класс изоморфизма соответствующей подгруппы. Предположим, что для двух групп их размеченные структуры совпадают везде, за исключением вершин, отвечающих самим группам. Изоморфны ли эти группы?

15.5. Пусть $\rho\colon \mathfrak{sl}_n \to \mathfrak{gl}(V)$ есть представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Доказать, что образ этого представления содержится в $\mathfrak{sl}(V)$.