v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 1

Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев,
Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв,
Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Элементы математики в задачах

с решениями
и комментариями

Часть 2

Издательство МЦНМО
2010

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
Э45

Авторы:
Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов,
А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Э45 **Элементы математики в задачах** (с решениями и комментариями). Ч. 2 / Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов и др. — М.: МЦНМО, 2010. — 160 с.

ISBN 978-5-94057-703-4

Книга содержит один из курсов математики в задачах, на протяжении ряда лет используемых в 57 школе города Москвы. В представленном виде курс преподавался классу «В» 2008 года выпуска. Часть 2 состоит из тем, изучавшихся в 9 классе.

Задания снабжены решениями и комментариями. Многие сюжеты (листки) могут изучаться независимо.

Книга адресована учителям математики, работающим в математических классах, руководителям кружков и факультативов и всем, кто интересуется обучением старшеклассников математике вне школьной программы.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-94057-703-4

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 3

Оглавление

Введение

В математических классах 57 школы кроме алгебры и геометрии (на которых проходится более-менее обычная школьная программа) имеется еще предмет, который традиционно называется «математический анализ». В отличие от других предметов на уроках анализа практически нет рассказов у доски. Вместо этого ученикам регулярно выдаются листочки — наборы задач по какой-либо теме вместе с необходимыми определениями.

Школьники самостоятельно решают и кратко записывают эти задачи — каждый в своем темпе, ни формальных домашних заданий, ни текущих оценок нет (хотя примерно раз в полгода проводится зачет с отметкой), — а на уроке обсуждают их один на один с преподавателями. Для этого на каждом уроке присутствует команда из 4–6 преподавателей. Они же составляют листки.

Из таких листков (выдававшихся нами классу «В» 2008 года выпуска), снабженных решениями задач и комментариями, и состоит эта книга. В часть 2 вошли листки 9 класса.

Дополнительные задачи отмечены звездочкой, дополнительные листки имеют букву «д» в номере.

Некоторые подробности о том, как организован учебный процесс (а также о том, почему он организован именно так), можно найти в предисловии к части 1.

О содержании курса. Первая половина курса в 9 классе посвящена определению действительных чисел. С одной стороны, оно необходимо для замкнутости курса в целом: мы старались, не используя внешних ссылок, определять используемые объекты и доказывать все нужные свойства этих объектов.

С другой стороны, определение действительных чисел — а в курсе действительные числа определяются как полное упорядоченное поле — дает повод познакомиться с некоторыми элементами абстрактной алгебры, научиться работать с объектами, заданными аксиоматически. При этом действительные числа строятся в несколько шагов, каждый из которых превращает в формальное определение часть нашей интуиции («над числами можно производить арифметические операции» — определение поля, «числа можно сравнивать» — определение упорядоченного поля, «в прямой нет дырок» — определение полного упорядоченного поля).

Завершив построение действительных чисел, в первом из дополнительных листков мы возвращаемся к теории множеств, с которой начинался наш курс в 8 классе, — ведь действительные числа дают естественный пример несчетного множества.

При изучении действительных чисел сразу возникает потребность в технике пределов. И вторая половина курса в 9 классе посвящена, в основном, изучению пределов последовательностей и бесконечных сумм. С этого начинается курс собственно математического анализа, который затем продолжается и в 10–11 классах. При этом мы не стараемся ни дойти до какой-то цели как можно быстрее (для чего гораздо лучше подошло бы изложение анализа в виде курса лекций), ни овладеть как можно лучше вычислительными приемами (для чего гораздо лучше подошло бы решение большого числа упражнений из задачника по анализу).

Отметим, что эта часть курса во многом опирается на алгебраическую (в школьном смысле этого слова) технику неравенств и оценок.

В последнем из дополнительных листков обсуждаются топологические свойства действительных чисел, что готовит почву для включения изученного в более общий контекст метрических и топологических пространств.

Поля

листок 14 / сентябрь 2005

Соглашение. В этом листке буква p обозначает простое число.

Определение 1. Пусть на множестве $\mathcal{F}$ заданы две бинарные операции: сложение «+» и умножение «·», удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $\forall a, b \in \mathcal{F}\ \ a+b=b+a$ (*коммутативность сложения*);

2) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ \ (a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения*);

3) $\exists 0 \in \mathcal{F}\colon \forall a \in \mathcal{F}\ \ a+0=a$ (*существование нуля*);

4) $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists b \in \mathcal{F}\colon a+b=0$ (*существование противоположного элемента*);

5) $\forall a, b \in \mathcal{F}\ \ ab=ba$ (*коммутативность умножения*);

6) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ \ (ab)c=a(bc)$ (*ассоциативность умножения*);

7) $\exists 1 \in \mathcal{F}\setminus\{0\}\colon \forall a \in \mathcal{F}\ \ a\cdot 1=a$ (*существование единицы*);

8) $\forall a \in \mathcal{F}\setminus\{0\}\ \exists b \in \mathcal{F}\colon ab=1$ (*существование обратного элемента*);

9) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ \ a(b+c)=ab+ac$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Такое множество $\mathcal{F}$ с двумя бинарными операциями называется *полем*.

Определение 2. Элемент b из аксиомы 4 называется противоположным к a и обозначается $-a$; элемент b из акиомы 8 называется обратным к a и обозначается a^{-1}. Сумма $a+(-b)$ записывается в виде $a-b$ и называется *разностью* элементов a и b; произведение ab^{-1} записывается в виде $\frac{a}{b}$ и называется *частным* элементов a и b.

Задача 1. Докажите, что

а) $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$;

б) в $\mathcal{F}$ существует ровно один нуль;

в) для каждого x в $\mathcal{F}$ существует лишь один противоположный элемент;

г) элемент, противоположный сумме, есть сумма элементов, противоположных слагаемым;

д) $-(-a)=a$;

е) уравнение $a+x=b$ имеет в $\mathcal{F}$ единственное решение $x=b-a$.

Задача 2. Докажите, что:

а) $((ab)c)d=a(b(cd))$;

б) в $\mathcal{F}$ существует ровно одна единица;

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 8

в) для каждого $x \neq 0$ в $\mathscr{F}$ существует лишь один обратный элемент;

г) элемент, обратный произведению, есть произведение элементов, обратных сомножителям;

д) $(a^{-1})^{-1} = a$;

е) уравнение $ax = b$ $(a \neq 0)$ имеет в $\mathscr{F}$ единственное решение $x = ba^{-1}$.

Задача 3. Докажите, что: а) $a \cdot 0 = 0$; б) $(-1) \cdot a = -a$; в) $a^2 = (-a)^2$.

Задача 4. Существует ли элемент, обратный к нулю?

Задача 5*. Верно ли, что множество $\mathscr{F}$ с операциями «$+$» и «$\cdot$» является полем тогда и только тогда, когда:

1) $(\mathscr{F}, +)$ — коммутативная группа;
2) $(\mathscr{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ — коммутативная группа;
3) $\forall a, b, c \in \mathscr{F}$ $a(b+c) = ab + ac$?

Задача 6. Пусть $ab = 0$. Докажите, что $a = 0$ или $b = 0$.

Задача 7. Докажите, что: а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Задача 8. Существует ли поле из: а) одного элемента; б) двух элементов; в) трех элементов; г) пяти элементов; д) p элементов (p простое); е*) шести элементов; ж*) 4 элементов; з*) p^2 элементов (p простое)?

Задача 9. Является ли полем множество $M = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ со следующими операциями:

а) $(p_1, q_1) + (p_2, q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2)$,
$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)$;

б) $(p_1, q_1) + (p_2, q_2) = (p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)$,
$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)$?

Задача 10. Пусть $M = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим на M следующее отношение:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Докажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности.

Определение 3. Множество классов эквивалентности относительно отношения эквивалентности, описанного в предыдущей задаче, называется *множеством рациональных чисел*. Обозначение: $\mathbb{Q}$.

Класс эквивалентности элемента (a, b) принято обозначать $\frac{a}{b}$. Вместо $\frac{a}{1}$ допускается краткая запись a.

Задача 11. Введите на $\mathbb{Q}$ операции сложения и умножения так, чтобы $\mathbb{Q}$ стало полем.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 9

Задача 12. Вычислите:
а) $\frac{1}{3}$ в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; б) $\frac{2}{5}$ в $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; в) $\frac{5}{57}$ в $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; г) $\frac{2008}{57}$ в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Задача 13. Сколько решений имеет уравнение $x^2+1=0$ в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Q}$; е) $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; ж*) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p — простое)?

Задача 14. Сколько решений имеет уравнение $x^2=2$ в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Q}$; е) $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; ж*) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 15. Вычислите 2^2, 2^3, …, 2^{10} в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Q}$.

Задача 16. Вычислите 57^{2008} в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$; е) $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$.

Задача 17. В какую степень надо возвести 2008, чтобы получить 57 в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?

Задача 18*. Докажите, что любое поле либо содержит «копию» поля $\mathbb{Q}$, либо содержит «копию» одного из полей $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Отношение порядка

листок 15 / сентябрь 2005

Определение 1. Бинарное отношение $\leqslant$ на множестве M называется отношением *линейного порядка*, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\forall a, b \in M \ a \leqslant b$ или $b \leqslant a$;
2) $\forall a \in M \ a \leqslant a$ (рефлексивность);
3) $\forall a, b \in M \ a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность);
4) $\forall a, b, c \in M \ a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (транзитивность).

Задача 1. Опишите все отношения линейного порядка на множестве из трех элементов.

Задача 2. Все ли условия в определении 1 существенны?

Определение 2. *Упорядоченным полем* называется поле, на котором введено отношение порядка, согласованное с операциями сложения и умножения, т. е. такое отношение линейного порядка, что

1) $\forall a, b, c \ a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$;
2) $\forall a, b, c \ a \leqslant b$ и $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$.

Задача 3. Докажите, что:

а) если $a \leqslant b$, то $-b \leqslant -a$; б) если $a \leqslant b$ и $c \leqslant 0$, то $bc \leqslant ac$; в) $0 \leqslant 1$.

Задача 4*. Докажите, что упорядоченное поле бесконечно.

Задача 5. Сформулируйте и докажите несколько известных вам свойств неравенств.

Определение 3. Пусть $\mathscr{F}$ — упорядоченное поле. *Множеством неотрицательных чисел* поля F называется множество $P = \{x \in \mathscr{F} \mid x \geqslant 0\}$.

Задача 6. а) Сформулируйте и докажите несколько свойств множества неотрицательных чисел.

б*) Придумайте равносильное определение упорядоченного поля следующего вида: «поле, в котором выделено множество, удовлетворяющее свойствам 1–…, называется упорядоченным полем».

Определение 4. Пусть $a, b > 0$. Определим «средние» чисел a и b следующим образом:

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ — \textit{среднее арифметическое;}}$$
$$G = \sqrt{ab} \text{ — \textit{среднее геометрическое;}}$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ — \textit{среднее квадратичное;}}$$

$$H = \frac{2}{1/a+1/b} \text{ — \textit{среднее гармоническое.}}$$

Задача 7. Докажите, что если $a, b > 0$, то $\min(a, b) \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant S_2 \leqslant$ $\leqslant \max(a, b)$.

Задача 8*. Сформулируйте определения «средних» для n чисел и докажите аналог предыдущей задачи.

Задача 9. Докажите, что:
а) $\exists k \in \mathbb{N}$: $1{,}000001^k > 1000000$; б) $\exists k \in \mathbb{N}$: $0{,}999999^k < 0{,}0000001$.

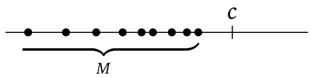
Задача 10. Докажите, что если произведение двух положительных чисел не меньше их суммы, то сумма не меньше четырех.

Задача 11. Докажите, что:
а) $x + 1/x \geqslant 2$ при $x > 0$; б) $a/b + b/c + c/a \geqslant 3$ при $a, b, c > 0$.

Действительные числа

листок 16 / октябрь 2005

Определение 1. Пусть $\mathscr{F}$ — упорядоченное поле, $M\subset\mathscr{F}$. Число $c\in\mathscr{F}$ называется *верхней гранью* множества M, если $\forall m\in M\ m\leqslant c$.



Множество $M\subset\mathscr{F}$ называется *ограниченным сверху*, если оно имеет верхнюю грань.

Задача 1. Дайте определение нижней грани множества; множества, ограниченного снизу; множества, неограниченного снизу; множества, неограниченного сверху.

Определение 2. Множество M называется *ограниченным*, если $\exists c\in\in\mathscr{F}\colon \forall m\in M\ |m|\leqslant c$.

Задача 2. Докажите, что M ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено сверху и снизу.

Задача 3. Верно ли, что каждая нижняя грань множества $M\subset\mathscr{F}$ строго меньше каждой верхней грани этого множества?

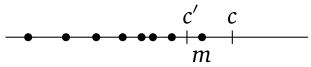
Верно ли, что каждая нижняя грань множества $M\subset\mathscr{F}$ не больше каждой верхней грани этого множества?

Определение 3. Число c называется *точной верхней гранью* множества $M\subset\mathscr{F}$, если

1) $\forall m\in M\ m\leqslant c$;

2) $\forall c'\in\mathscr{F}\ c'<c\ \Rightarrow\ \exists m\in M\colon c'<m$.

Обозначение: $\sup M$.



Задача 4. а) Дайте определение точной нижней грани. Обозначение: $\inf M$.

б) Напишите отрицание определения 3.

Задача 5. а) Пусть M — непустое подмножество поля $\mathscr{F}$. Пусть M_s — множество верхних граней M; M_i — множество нижних граней M. Докажите, что если $M_s\neq\varnothing$ и $M_i\neq\varnothing$, то $\sup M_i=\inf M$; $\inf M_s=\sup M$.

б) Докажите, что любое множество имеет не более одной точной верхней (нижней) грани.

Задача 6. Укажите, для каких из следующих подмножеств $\mathbb{Q}$ существуют (в $\mathbb{Q}$) inf и sup и найдите их:

а) $M = \left\{ m_k \mid m_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N} \right\}$;

б) $M = \left\{ m_k \mid m_k = \frac{(-1)^k}{k},\ k \in \mathbb{N} \right\}$;

в) $M = \{ m_k \mid m_k = k^{(-1)^k},\ k \in \mathbb{N} \}$;

г) $M = \{ a + b \mid -1 \leqslant a < 3;\ -4 < b \leqslant 2 \}$;

д) $M = \{ ab \mid -1 \leqslant a < 3;\ -4 < b \leqslant 2 \}$.

Задача 7. Пусть $A, B \subset \mathscr{F}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и существуют $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$, $\sup B$. Обозначим $A + B = \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \}$, $A \cdot B = \{ ab \mid a \in A,\ b \in B \}$.

Найдите: а) $\inf(A + B)$; б) $\sup(A \cdot B)$;

в) Докажите, что если $A \cap B \neq \varnothing$, то $\min(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cup B) \leqslant \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.

Задача 8. Докажите, что множество рациональных чисел, квадрат которых меньше 2, не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней грани.

Определение 4. Упорядоченное множество называется *полным*, если у любого его ограниченного сверху непустого подмножества есть точная верхняя грань.

Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*.

Утверждение (без доказательства). Поле действительных чисел единственно. Обозначение: $\mathbb{R}$.

Задача 9*. Объясните, что означает написанное выше утверждение про единственность поля действительных чисел.

Задача 10. Докажите, что любое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.

Определение 5. Подмножество $M \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если $1 \in M$ и $m \in M \Rightarrow m + 1 \in M$.

Определение 6. Наименьшее (содержащееся в любом другом) индуктивное подмножество $\mathbb{R}$ называется *множеством натуральных чисел*. Обозначение: $\mathbb{N}$.

Задача 11. Докажите, что (для данного множества действительных чисел) множество натуральных чисел существует и единственно.

Задача 12. Докажите, что в любом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.

Задача 13. Докажите, что $-1 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$.

Определение 7. $2 = 1 + 1$.

Задача 14. $2 \in \mathbb{N}$.

Задача 15 (аксиома Архимеда). Докажите, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $n > x$.

Определение 8. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Отрезком* с концами a и b называется множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Определение 9. Последовательность $[a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, такая что $[a_i, b_i] \supset [a_{i+1}, b_{i+1}]$, называется *последовательностью вложенных отрезков*.

Задача 16. а) (*Принцип вложенных отрезков.*) Докажите, что каждая последовательность вложенных отрезков имеет (хотя бы один) общий элемент.

б) Докажите, что общий элемент единственен, если и только если $\forall \varepsilon > 0\ \exists i \in \mathbb{N}$: $b_i - a_i < \varepsilon$ (длины отрезков стремятся к нулю).

Задача 17. Докажите, что:

а*) не существует взаимно однозначного отображения между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$;

б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Задача 18* (Дедекиндовы сечения). Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$, причем $\forall a \in A$, $b \in B$ $a \leqslant b$. Докажите, что $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A$, $b \in B$ $a \leqslant c \leqslant b$. Верно ли это утверждение для $\mathbb{Q}$?

Задача 19*. Докажите утверждение о единственности действительных чисел.

Задача 20* (игра Банаха—Мазура на $\mathbb{Q}$). Рассмотрим следующую игру. Двое по очереди выбирают отрезки так, что каждый следующий отрезок вложен в предыдущий. Таким образом они строят последовательность вложенных отрезков. Если пересечение состоит из одного числа и оно рационально, то выигрывает первый. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 21*. Дайте определение вещественной степени положительного вещественного числа так, чтобы сохранялись все известные свойства степени.

Соглашение. В следующих листках этой задачей можно пользоваться без доказательства.

Счетные и несчетные множества

листок 5д / октябрь 2005

Определение 1. Два множества A и B называются *равномощными*, если между ними существует биекция. Обозначение: $|A|=|B|$.

Говорят также, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($|A|\leqslant|B|$), если существует инъекция (вложение) из A в B.

Задача 1. Докажите, что «отношение» равномощности является «отношением» эквивалентности.

Замечание. Слово «отношение» в условии задачи взято в кавычки, так как обычно рассматривают отношения, заданные на каком-то *множестве* (а множества всех множеств не существует). Если по каким-то причинам игнорировать эту трудность не получается, то можно рассматривать отношение равномощности на каком-либо множестве множеств (например, на множестве всех подмножеств какого-нибудь множества).

Задача 2. Какие из следующих множеств равномощны:

а) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}\setminus\{1\}$; б) два отрезка разной длины;
в) интервал и полуокружность без концов; г) интервал и прямая;
д) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$; е) интервал и отрезок?

Определение 2. Множество A называется *бесконечным*, если при добавлении нового элемента мощность A не меняется. В противном случае множество A называется *конечным*.

Определение 3. Бесконечное множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел. В противном случае оно называется *несчетным*.

Задача 3. Докажите, что непустое множество конечно, если и только если оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n.

Задача 4. Докажите, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Задача 5. Пусть A — счетно, B — счетно (конечно). Что можно сказать про объединение, пересечение и разность A и B?

Задача 6. Докажите, что объединение а) конечного, б) счетного числа счетных множеств счетно.

Задача 7. Пусть множество A — счетно, B — не более чем счетно и непусто. Что можно сказать про их (декартово) произведение $A\times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$?

Задача 8. Докажите, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел несчетно.

Задача 9. Докажите, что множество рациональных чисел счетно.

Задача 10. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся интервалов на прямой, не более чем счетно[1].

Задача 11. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся кругов на плоскости, не более чем счетно.

Задача 12. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся букв Т на плоскости, не более чем счетно.

Задача 13. Докажите, что множество конечных последовательностей нулей и единиц счетно.

Задача 14. Докажите, что следующие множества несчетны:

а) множество всех подмножеств натуральных чисел;

б) множество бесконечных последовательностей нулей и единиц;

в) множество всех биекций из множества натуральных чисел в себя.

Задача 15*. Докажите, что все множества предыдущей задачи равномощны между собой и равномощны множеству действительных чисел.

Задача 16* (теорема Кантора—Бернштейна). Докажите, что из $|A|\leqslant|B|$ и $|A|\geqslant|B|$ следует $|A|=|B|$.

[1]То есть счетно или конечно.

Бесконечные десятичные дроби

листок 17 / декабрь 2005

Определение 1. $3=2+1$, $4=3+1$, $5=4+1$, $6=5+1$, $7=6+1$, $8=$ $=7+1$, $9=8+1$, $10=9+1$.

Определение 2. Запись вида $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$, где каждое из a_i является цифрой (т. е. одним из десяти знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и $a_n \neq 0$, называется *десятичной записью натурального числа*.

Задача 1. Дайте определение *значения* десятичной записи натурального числа.

Задача 2. Дайте определения *десятичной записи целого числа* и ее *значения*.

Определение 3. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где A — десятичная запись натурального числа либо 0, а α_i — цифры, называется *конечной десятичной дробью*. Если запись начинается со знака плюс, то при написании его часто опускают.

Задача 3. Дайте определение *значения* конечной десятичной дроби.

Задача 4. а) Запишите в виде конечной десятичной дроби числа $\frac{42}{125}$, $-\frac{57}{1250}$, $\frac{13}{25}$.

б) Запишите в виде обыкновенной дроби числа $-7{,}23$; $4{,}165$; $-3{,}6489$.

Определение 4. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, где A — десятичная запись натурального числа либо 0, а α_i — цифры, называется *бесконечной десятичной дробью* (БДД).

Определение 5. *Значением* бесконечной десятичной дроби $\pm A{,}\alpha_1\ldots$ называется число $\pm\sup\{A{,}\alpha_1\ldots\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. БДД с равными значениями называются *близнецами*.

Задача 5. Докажите корректность определения 5.

Задача 6. Запишите в виде БДД: $-\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{19}{33}$.

Задача 7. Запишите в виде обыкновенной дроби: $15{,}(2)$; $-2{,}(08)$; $3{,}(9)$.

Задача 8. Докажите, что для любого действительного числа x существует хотя бы одна БДД, значение которой равно x.

Определение 6. БДД $A,\alpha_1\ldots$ называется *периодической*, если существуют такие натуральные k и n, что для всех $l \geqslant k$ выполнено $\alpha_{l+n} = \alpha_l$. Наименьшее возможное n называется *периодом* БДД.

Задача 9. Докажите, что БДД периодична тогда и только тогда, когда ее значение рационально.

Задача 10. Докажите, что множество периодических БДД счетно.

Задача 11. Докажите, что две БДД являются близнецами тогда и только тогда, когда до некоторой позиции они совпадают, а дальше имеют вид $a99\ldots$ и $(a+1)00\ldots$

Задача 12. Докажите, что периоды дробей $\frac{37}{2005}$ и $\frac{1968}{2005}$ равны.

Определение 7. БДД $A,\alpha_1\ldots$ *не меньше* БДД $B,\beta_1\ldots$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $A > B$;

2) $A = B$ и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\alpha_k = \beta_k$ при $k < n$ и $A \cdot \alpha_n > A \cdot \beta_n$;

3) $A,\alpha_1\ldots$ и $B,\beta_1\ldots$ — близнецы.

Задача 13. Докажите, что одна неотрицательная БДД не меньше другой тогда и только тогда, когда значение первой не меньше значения второй.

Задача 14. Дайте определения суммы и произведения конечных десятичных дробей.

Задача 15*. Сформулируйте определение действительных чисел в терминах БДД. Докажите равносильность этого определения определению из листка «Действительные числа».

Задача 16*. Докажите, что в любой БДД можно так переставить цифры, чтобы она стала периодической.

Предел последовательности

листок 18 / декабрь 2005

Определение 1. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, называется *ε-окрестностью* точки (числа) a и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Определение 2. Говорят, что *почти все* элементы бесконечного множества удовлетворяют некоторому свойству, если этому свойству не удовлетворяет лишь конечное число элементов данного множества.

Задача 1. Какие из следующих утверждений верны для почти всех натуральных n?

а) n — составное. б) $n^4-1000n^3-10000>0$.

в) Найдутся такие $l, k\in\mathbb{N}$, что $n=3k+4l$.

г) Сумму в n рублей можно разменять купюрами по a и b рублей.

Определение 3. *Бесконечной числовой последовательностью* называется отображение $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Обозначение: (x_n).

Подпоследовательностью последовательности (x_n) называется последовательность $(x_{\varphi(n)})$, где $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — строго возрастающее отображение.

Определение 4. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит почти все члены этой последовательности.

Определение 5. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}\colon \forall n>k\ |x_n-a|<\varepsilon.$$

Обозначения и терминология: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $x_n\to a$ при $n\to\infty$, последовательность (x_n) сходится (стремится) к a.

Задача 2. Докажите равносильность этих определений.

Задача 3. Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

Задача 4. Запишите явно определение того, что последовательность (x_n) не имеет предела.

Задача 5. Какие из следующих последовательностей имеют пределы? Найдите эти пределы:

а) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$; б) $1, 2, 3, \ldots$; в) $-1, 1, -1, 1, \ldots$;

г) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$; д) $q, q+q^2, q+q^2+q^3, \ldots$;

е) 0,2, 0,22, 0,222, …; ж) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{8}$, …

Определение 6. Последовательность (x_n) называется *монотонно убывающей* (*невозрастающей*, *возрастающей*, *неубывающей*), если для каждого $n\in\mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$, $x_n < x_{n+1}$, $x_n \leqslant x_{n+1}$).

Определение 7. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если множество ее членов $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ограничено. В противном случае последовательность (x_n) называется *неограниченной*.

Задача 6. Докажите, что если (x_n) — монотонно неубывающая ограниченная последовательность, то (x_n) сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Задача 7. Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограниченна. Верно ли обратное?

Определение 8. Говорят, что последовательность (x_n) *стремится к бесконечности*, если

$$\forall C > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \forall n > k\quad |x_n| > C.$$

Обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Задача 8. Дайте определение окрестности бесконечности так, чтобы предыдущее определение можно было переформулировать следующим образом: говорят, что последовательность *стремится к бесконечности*, если любая окрестность бесконечности содержит почти все члены этой последовательности.

Задача 9. Определите следующие понятия: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Задача 10. Какие из следующих последовательностей ограниченны? стремятся к бесконечности? неограниченны?

а) $x_n = n$; б) $x_n = (-1)^n n$; в) $x_n = n^{(-1)^n}$; г) $x_n = \frac{100n}{100+n^2}$;

д) $x_n = \begin{cases} n & \text{при четном } n;\\ \sqrt{n} & \text{при нечетном } n.\end{cases}$

Определение 9. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит бесконечное число членов этой последовательности.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 21

Определение 10. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n > k\colon \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Задача 11. Докажите равносильность последних двух определений.

Задача 12. а) Докажите, что предел является предельной точкой. Верно ли обратное утверждение?

б) Докажите, что у сходящейся последовательности ровно одна предельная точка.

в) Верно ли, что последовательность, имеющая ровно одну предельную точку, сходится?

Задача 13. Найдите предельные точки последовательностей из задачи 5.

Задача 14. Докажите, что a — предельная точка последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда у последовательности (x_n) есть подпоследовательность, сходящаяся к a.

Задача 15*. Может ли множеством предельных точек последовательности быть: а) множество натуральных чисел; б) множество рациональных чисел?

Задача 16* (теорема Больцано—Вейерштрасса). а) Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

б) Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Прогрессии

листок 19 / январь 2006

Определение 1. *Арифметической прогрессией* называется последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

где $n\in\mathbb{N}$. Число d называется *разностью арифметической прогрессии*.

Задача 1. Вычислите сумму первых n членов арифметической прогрессии.

Задача 2. Докажите, что каждый член (кроме первого) арифметической прогрессии равен среднему арифметическому равноотстоящих от него членов. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задача 3. а) Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая лишь из простых чисел?

б*) Докажите, что найдется конечная арифметическая прогрессия длины 4, состоящая из простых чисел.

в**) Докажите, что найдется конечная арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины, состоящая из простых чисел.

г**) Докажите, что в любой арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с разностью, бесконечно много простых чисел.

Определение 2. *Геометрической прогрессией* называется последовательность вида

$$b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots,\ bq^n,\ \ldots,$$

где $b\neq 0$, $q\neq 0$ и $n\in\mathbb{N}$. Число q называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Задача 4. Вычислите сумму и произведение первых n членов геометрической прогрессии.

Задача 5. Докажите, что квадрат каждого члена (кроме первого) геометрический прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Определение 3. Геометрическая прогрессия, у которой модуль знаменателя меньше 1, называется *бесконечно убывающей*.

Задача 6. Докажите, что бесконечно убывающая геометрическая прогрессия стремится к 0.

Определение 4. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, (S_n) — последовательность ее частичных сумм. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то он называется *суммой геометрической прогрессии*

Задача 7. Докажите, что сумма бесконечной геометрической прогрессии существует, если и только если прогрессия бесконечно убывающая. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем q.

Задача 8. Известно, что при любом натуральном n сумма первых n членов некоторой последовательности выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найдите 10-й член этой последовательности и докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Задача 9. Найдите произведение P первых n членов геометрической прогрессии, если известно, что их сумма равна S_1, а сумма чисел, обратных первым n членам прогрессии, равна S_2.

Задача 10. Дана арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_n > 0$ для всех натуральных чисел. Докажите, что $a_n < b_n$ при $n > 2$.

Задача 11. Известно, что каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии отличается постоянным множителем K от суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, начинающейся со следующего номера. Какое значение может принимать K?

Задача 12. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

Задача 13*. Докажите, что для того чтобы отличные от нуля числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являлись n последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы при каждом целом $k \leqslant n$ выполнялось равенство

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}a_k} = \frac{k-1}{a_1a_k}.$$

Определение 5. Будем говорить, что несколько прогрессий *покрывают натуральный ряд*, если каждое натуральное число является членом хотя бы одной из этих прогрессий.

Задача 14. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть а) двумя; б) тремя; в*) четырьмя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными единице.

Задача 15*. Укажите пять арифметических прогрессий с различными целыми разностями, не равными единице, покрывающих натуральный ряд.

Задача 16. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть конечным числом геометрических прогрессий.

Задача 17. Докажите, что найдется n такое, что

а) $1+1/2+\ldots+1/n>10$,

б) $1+1/2+\ldots+1/n$ больше любого наперед заданного числа.

Задача 18. Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, … Существует ли арифметическая прогрессия а) длины 5; б) сколь угодно большой длины, составленная из членов этой последовательности?

Задача 19. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых отсутствует ноль. Докажите, что сумма обратных величин любого количества из этих чисел (несовпадающих) не превосходит некоторого числа C.

Арифметика пределов

листок 20 / февраль 2006

Задача 1. Пусть (x_n) и (y_n) — последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Какие из следующих утверждений верны?

а) Если для почти всех n выполнено $x_n = y_n$, то последовательность y_n сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

б) Если для почти всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$, то последовательность (y_n) сходится, причем $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

в) Если для почти всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$ и последовательность (y_n) сходится, то $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

г) Если для почти всех n выполнено $x_n < y_n$ и последовательность (y_n) сходится, то $A < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Определение 1. Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если ее предел равен 0. Обозначение: $(\alpha_n) = o(1)$.

Задача 2. Какие из следующих последовательностей бесконечно малы:

а) $\frac{1}{n}$; б) $\frac{n}{2^n}$; в) $\frac{n^5}{2^n}$; г) $\frac{n^2+2n+5}{n^3}$; д) $\frac{1{,}1^n}{n^{10}}$?

Задача 3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечно малая последовательность (α_n), что $x_n = a + \alpha_n$.

Задача 4. Какие из следующих утверждений верны:

а) сумма (разность) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

в) частное бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

г) произведение бесконечно малой последовательности на произвольную есть бесконечно малая;

д) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая?

Задача 5. Дайте определение бесконечно большой последовательности. Сформулируйте и докажите свойства бесконечно больших последовательностей, аналогичные свойствам бесконечно малых последовательностей.

Задача 6. Докажите, что если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

а) последовательность $(x_n \pm y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

б) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

в) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Подумайте, что означает это утверждение в случае, когда $y_n = 0$ для некоторых n.

Задача 7. Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — бесконечно большая последовательности без нулевых членов. Докажите, что $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ — бесконечно большая, а $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ — бесконечно малая.

Задача 8. Если последовательность (α_n) бесконечно малая и $|x_n| \leqslant |\alpha_n|$ для почти всех n, то последовательность (x_n) — бесконечно малая.

Задача 9 (принцип двух милиционеров). Докажите, что если последовательности (x_n) и (z_n) сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для почти всех n выполнено неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то последовательность (y_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Задача 10. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$; б) $x_n = \frac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}$; в) $x_n = \frac{n^2 \sin n!}{n^3+1}$;

г) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; д) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; е*) $x_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

Задача 11. Докажите, что монотонно возрастающая неограниченная последовательность стремится к $+\infty$.

Задача 12. Докажите, что при перестановке членов последовательности предел не меняется.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 27

Задача 13. Докажите, что существуют пределы и найдите их для следующих последовательностей:

а) $x_n = c^n$ $(|c| < 1)$; б) $x_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}$;

в) $x_1 = 1/2$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$; г) $x_n = \frac{c^n}{n!}$; д) $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$.

Задача 14. Докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} = 0$.

Задача 15. Придумайте две последовательности, у каждой из которых существует единственная предельная точка 57, а у их суммы существует единственная предельная точка 0.

Задача 16*. а) Докажите, что последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходятся и их пределы равны.

б) Докажите, что последовательность $z_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ сходится к тому же пределу.

Этот предел обозначается буквой e.

Ряды. Часть 1

листок 21 / март 2006

Определение 1. Пусть $a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Точная верхняя грань S частичных сумм ряда с положительными членами $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *суммой ряда*, т. е. $S=\sum a_n=\sup\{S_n\,|\,S_n=a_1+\ldots+a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Обозначение: $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, сокращенно $S=\sum a_n$. Если у ряда существует сумма, то он называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Задача 1. Докажите, что ряд a_n с положительными a_n сходится тогда и только тогда, когда существует такое B, что $a_1+\ldots+a_n<B$ для любого n.

Задача 2 (составление уравнений). Найдите:

а) $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{q^n}$ $(a>0, q>1)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

Задача 3. Докажите, что $\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n$, $\sum\lambda a_n=\lambda\sum a_n$ (при $\lambda>0$) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\ldots+a_k+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{k+n}$.

Задача 4 (перестановка слагаемых). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

Задача 5. а) Докажите, что если $a_n>0$ для $n\in\mathbb{N}$ и $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — биекция («перестановка»), то $\sum a_n=\sum a_{\sigma(n)}$.

б*) Придумайте ряд (с произвольными a_n) и такую перестановку $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что $\sum a_n\neq\sum a_{\sigma(n)}$.

Задача 6 (умножение рядов). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot 2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

Задача 7. а) Докажите, что если $a_n, b_n>0$, то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0).$$

б*) Верно ли это без условия $a_n, b_n>0$?

Задача 8. Найдите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{n^2}{2^n}$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 29

Задача 9 (преобразование Абеля). Докажите, что

а) $\sum\limits_{n=1}^{m} b_n(a_{n-1}-a_n)=a_0b_0-a_mb_m-\sum\limits_{n=1}^{m} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1}-a_n)=a_0b_0-\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$ (сформулируйте самостоятельно условия, при которых верна эта формула).

Задача 10 (разложение на простейшие дроби). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$;

е*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$.

Ряды. Часть 2

листок 22 / апрель 2006

Определение 1. Ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *сходящимся*, если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ его частичных сумм имеет конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число S называется *суммой ряда*. Обозначение: $S=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Определение 2. Ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела (в частности, если $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$).

Задача 1. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Верно ли обратное утверждение?

Задача 2. Сходятся ли следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-100}{10000n+100000}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-100}{10000n+100000}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$?

Задача 3. Определите, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Задача 4. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$, где $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, также сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Определение 3. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\colon \forall m,n>N\quad |a_m-a_n|<\varepsilon.$$

Задача 5 (критерий Коши). Докажите, что последовательность сходится, если и только если она фундаментальна.

Определение 4. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *мажорируется* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N\ |b_n|\leqslant a_n$.

Задача 6 (признак сравнения). Докажите, что если мажорирующий ряд сходится, то мажорируемый тоже сходится, а если мажорируемый ряд расходится, то мажорирующий тоже расходится.

Задача 7. Определите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+n^2)}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ $(|x|<1)$.

Задача 8 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с положительными членами. Тогда если $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ $\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда в случае $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$?

Задача 9. Установите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Задача 10 (признак Коши). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$?

Задача 11. Установите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$.

Определение 5. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Задача 12. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 6. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся*.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 32

Задача 13. Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$ и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то *знакопеременный ряд* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ сходится. Существенно ли здесь условие монотонности (a_n)?

Задача 14. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2+1}{n^3+1}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$.

Задача 15. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится абсолютно. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, полученный из предыдущего ряда произвольной перестановкой его членов, также сходится, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Задача 16. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Докажите, что ряд, составленный из положительных (отрицательных) членов этого ряда, стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Задача 17 (теорема Римана). а) Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Тогда его можно превратить перестановкой членов как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперед заданной суммой.

б*) Дайте определение сходящегося ряда из векторов на плоскости.

в**) Дан ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ из векторов на плоскости. Тогда множество сумм рядов, получающихся из данного перестановкой членов, либо пусто, либо одна точка, либо прямая, либо вся плоскость.

Задача 18. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

а) Докажите, что ряд условно сходится;

б*) переставьте члены ряда таким образом, чтобы полученный ряд расходился.

Задача 19*. Постройте пример последовательности (a_i), для которой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^3$ расходится.

Задача 20*. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Неравенства

листок 6д / май 2006

Соглашение. В этом листке буквами a, b, c, d, a_i, b_i обозначены неотрицательные числа, а буквами x, y, z — произвольные действительные числа.

Задача 1. Сравните числа:
а) $1234567 \cdot 1234569$ и 1234568^2; б) 31^{11} и 17^{14};
в) $\frac{1}{5001} + \frac{1}{5002} + \ldots + \frac{1}{5100}$ и $\frac{1}{49}$.

Задача 2. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

Задача 3. Докажите, что:
а) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$; б) $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$; в) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$;
г) $2a + b + c \geqslant 4\sqrt[4]{a^2bc}$; д) $2a + b \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b}$.

Задача 4. а) Докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$.
б*) Докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

Определение 1. Определим средние набора чисел $a_1, \ldots, a_n$ следующим образом:

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{— среднее арифметическое,}$$
$$G = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \quad \text{— среднее геометрическое,}$$
$$S_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \quad \text{— среднее квадратичное,}$$
$$H = \frac{n}{1/a_1 + \ldots + 1/a_n} \quad \text{— среднее гармоническое.}$$

Задача 5 (неравенство о средних). Докажите, что $S_2 \geqslant A \geqslant G \geqslant H$, причем равенство достигается только в случае $a_1 = \ldots = a_n$ а) при $n = 2^k$; б) для любых n. Неравенство $A \geqslant G$ называется также неравенством Коши.

Задача 6. Пусть $abcd = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$.

Задача 7. Докажите, что:
а) $x^4 + y^4 + z^2 \geqslant 2\sqrt{2}xyz$; б) $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$;
в) $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a + nb}{n+1}$; г) $x^4 - x + 0{,}5 > 0$.

Задача 8 (неравенство Юнга). Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и а) $p, q \in \mathbb{Q}$; б) $p, q \in \mathbb{R}$. Докажите, что $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (напомним, что a и b — неотрицательные действительные числа).

Задача 9 (обобщенное неравенство о средних). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \geqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$.

Задача 10*. Докажите, что при любых $a, b > 0$, для которых $a + b = 1$, верно неравенство $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 12{,}5$.

Задача 11* (неравенство Коши—Буняковского—Шварца). Докажите, что
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Задача 12*. Докажите, что
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}.$$

Задача 13*. Докажите, что
$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Задача 14* (неравенство Гёльдера). Докажите, что для любых $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполнено неравенство
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$
При каких a_i, b_i достигается равенство?

Задача 15*. В условиях предыдущей задачи докажите, что
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} = \max_{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q = 1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Задача 16* (неравенство Минковского). Докажите, что при $p > 1$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p}.$$

Топология прямой. Открытые и замкнутые множества

листок 7д / апрель 2006

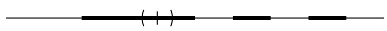
Задача 1. а) Докажите, что у любого положительного числа найдется окрестность, целиком состоящая из положительных чисел. Верно ли это утверждение для неотрицательных чисел?

б) Докажите, что в любой окрестности любого действительного числа найдется как рациональное так и иррациональное число.

в) Докажите, что у любого действительного числа найдется окрестность, содержащая не более одного натурального числа.

г) Докажите, что у любых двух различных действительных числе найдутся непересекающиеся окрестности.

Определение 1. Точка множества $A \subset \mathbb{R}$ называется *внутренней*, если в A целиком содержится некоторая окрестность этой точки. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние.



Задача 2. а) Сформулируйте предыдущее определение на языке кванторов.

б) Сформулируйте отрицание предыдущего определения.

в) Приведите примеры открытых множеств и множеств, не являющихся открытыми.

Задача 3. а) Докажите, что пустое множество и всё $\mathbb{R}$ открыты.

б) Докажите, что объединение (любого числа) открытых множеств открыто.

в) Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

г) Верно ли, что пересечение любого числа открытых множеств открыто?

Определение 2. Множество $\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ называется *проколотой ε-окрестностью* точки a.

Определение 3. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой его проколотой ε-окрестности есть точки множества A. Точка, не являющаяся предельной, называется *изолированной*.

Замечание. Другими словами, точка a называется предельной для множества A, если существуют отличные[2] от a элементы множества A, сколь угодно близкие к a.

Определение 4. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой его ε-окрестности[3] содержится бесконечно много точек множества A.

Определение 5. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если существует последовательность, сходящаяся к a, все члены которой принадлежат $A \setminus \{a\}$.

Задача 4. Докажите эквивалентность трех последних определений.

Задача 5. Найдите все внутренние и все предельные точки следующих множеств:

а) $\mathbb{R}$, б) произвольное конечное подмножество $\mathbb{R}$, в) $\varnothing$, г) $\mathbb{Z}$,
д) $[0, 1]$, е) $(0, 1)$, ж) $\{1/n \mid n \in N\}$, з) положительные числа,
и) неотрицательные числа, к) рациональные числа,
л) иррациональные числа, м*) множество чисел, хотя бы в одном троичном разложении которых нет цифры 1.

Задача 6. а) Верно ли, что предельная точка последовательности является предельной точкой множества членов этой последовательности?

б) Верно ли, что предельная точка множества членов последовательности является предельной точкой этой последовательности?

Задача 7. Докажите, что любое бесконечное подмножество отрезка имеет предельную точку.

Замечание. На прямой аналогичное утверждение неверно — контрпример дает, например, множество целых чисел.

Определение 6. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 8. а) Какие из множеств задачи 5 открыты? А какие замкнуты?

б) Бывают ли подмножества $\mathbb{R}$, замкнутые и открытые одновременно?

в) Верно ли, что любое подмножество $\mathbb{R}$ либо замкнуто, либо открыто?

---

[2] Именно для этого в определении используются *проколотые* окрестности — иначе любой элемент множества был бы его предельной точкой.

[3] Обычной (а не проколотой).

vo8-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 37

Задача 9. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Задача 10. а) Докажите, что пересечение (любого числа) замкнутых множеств замкнуто. б) Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Определение 7. Объединение множества A и множества его предельных точек A' называется *замыканием* множества A. Обозначение: $\bar{A}$.

Задача 11. Докажите, что замыкание любого множества замкнуто.

Задача 12*. Докажите, что любое открытое множество является объединением не более чем счетного числа интервалов.

Определение 8. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *всюду плотным*, если $\bar{A} = \mathbb{R}$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *нигде не плотным*, если $\bar{A}$ не имеет внутренних точек.

Задача 13. Какие из множеств задачи 5 всюду плотны? Нигде не плотны?

Задача 14. а) Верно ли, что дополнение до всюду плотного множества нигде не плотно?

б) Верно ли, что дополнение до нигде не плотного множества всюду плотно?

Задача 15*. На окружности расположена ловушка длины ε, а в некоторой точке вне ловушки сидит точечный заяц. Заяц прыгает по окружности, каждый раз на одно и тоже расстояние $x\pi$. При каких x заяц рано или поздно попадет в ловушку, независимо от ее размера и начального расположения?

Задача 16*. В каждой точке целочисленной решетки на плоскости посажена кукуруза фиксированного диаметра. Охотник стреляет из начала координат в некотором направлении. Докажите, что он никогда не промахнется.

Задача 17* (теорема Бэра). Докажите, что отрезок $[0, 1]$ нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Задача 18* (компактность отрезка). Пусть отрезок $[0, 1]$ содержится в объединении а) счетного; б) произвольного множества интервалов. Докажите, что из этих интервалов можно выбрать конечное подмножество, объединение которых содержит отрезок $[0, 1]$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 38

Задача 19*. Решите аналог предыдущей задачи, заменив интервалы на произвольные открытые множества.

Задача 20*. Множество $X \subset \mathbb{R}$ содержится в объединении некоторого множества интервалов. Докажите, что можно выбрать счетное подмножество интервалов, объединение которых содержит X.

Определение 9. Множество называется *совершенным*, если оно совпадает со множеством своих предельных точек.

Задача 21*. Приведите пример нигде не плотного совершенного множества.

Задача 22*. а) Докажите, что совершенное множество имеет мощность континуум.

б) Докажите, что любое замкнутое подмножество прямой есть объединение совершенного и не более чем счетного множеств.

в) (*Континуум-гипотеза для замкнутых множеств.*) Докажите, что замкнутое подмножество прямой либо не более чем счетно, либо равномощно отрезку.