АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ГИПЕРГРАФОВ - 2

Курс А.Б. Скопенкова

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались. Мы рассмотрим аналогичную проблему для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость k-мерного гиперграфа в d-мерное пространство? Мы рассмотрим также аналогичную задачу с заменой вложений на отображения, при которых каждая точка имеет не более r прообразов (для фиксированного r). Эти проблемы возникла на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и программирования. Они активно изучаются в последнее время.

Основное содержание курса — «конкретное» (в частности, алгоритмически мотивированное) введение в алгебраическую топологию. Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты.

Для изучения курса достаточно уметь грамотно применять число пересечения ломаных на плоскости [S, §1.3], а также коэффициент зацепления ломаных в пространстве [S, §4.1-4.3] (достаточно по модулю 2). Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы гомологий и т.д.) будут даны. Тем самым, сдача спецкурса «Алгоритмы распознавания реализуемости гиперграфов», прочитанного осенью 2020, не обязательна (хотя приветствуется). Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих. Будут предложены красивые задачи для исследования.

Курс разбит на два модуля, второй из которых рассчитан на тех, кто сдал первый. Экзамен за каждый модуль состоит из решения задач в течение семестра и письменной работы. При этом кредит можно получить только за весь курс.

Литература

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.

[S14] A. Skopenkov, Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory. arXiv:1402.0658.

[S16] А. Б. Скопенков, Топологическая гипотеза Тверберга, УМН, 73:2 (2018), 344–377; полная версия: arXiv:1605.05141.

[S18] A. Skopenkov, Invariants of graph drawings in the plane, Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.

Примерная программа (несколько первых или несколько последних пунктов будут пропущены в зависимости от возможности и желания участников курса).

1. Простейшие теоремы рамсеевской теории зацеплений. Примеры гиперграфов, линейно не реализуемых в трехмерном и четырехмерном пространстве. [S14]

2. Определения гиперграфа (симплициального комплекса), линейного и кусочно-линейного вложений в d-мерное пространство. Теорема общего положения. [S, §5]

3. Вложимость гиперграфов: маломерные примеры, формулировки алгоритмических и NP-трудностных результатов. [S, §5]

4. Алгоритм Ван Кампена распознавания планарности графов [S, §1.5].

5. Число пересечения цепей и коэффициент зацепления циклов в d-мерном пространстве [S, §4].

6. Алгоритм Ван Кампена распознавания вложимости k-мерных гиперграфов в $2k$-мерное пространство для $k \geq 3$ [S, §5].

7. Построение колец Борромео при помощи тора. Трехмерная и четырехмерная леммы о кольцах Борромео. [S, §4]

8. Инвариант Масси-Милнора трехкомпонентных зацепений. [S, §4]

9. Теоремы о неизбежной зацепленности в четырехмерном пространстве. [S, §5]

10. Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера неполноты препятствия Ван Кампена к вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство.

11. Обобщение предыдущего примера: построение двумерного гиперграфа P_f по формуле f для булевой функции. Часть доказательства NP-трудности распознавания вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. [S, §5]

12.* Пост-ван-кампеновские препятствия к вложимости двумерых гиперграфов в четырехмерное пространство. Связь с инвариантом Масси-Милнора.

13.* Топологические теорема и гипотеза Тверберга. Отображения без r-кратных точек и почти r-вложения. Редукции топологической гипотезы Тверберга к маломерным остовам и к «крайней» размерности. План доказательства контрпримера в случае, когда r — не степень простого. [S, §2.2, §6], [S16], [S18, §2.3]