Экзамен по алгебре. 1 курс, весна.

Э.Б. Винберг

26 июня 1993 г.

1. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис векторного пространства. Является ли линейно независимой система векторов $\{e_1+e_2+e_3, e_2+e_3+e_4, \ldots, e_n+e_1+e_2\}$?

2. Найти число прямых, скрещивающихся с данной, в четырехмерном аффинном пространстве над полем $\mathbb{Z}_p$.

3. Найти расстояние между плоскостями $\{f : f(\frac{1}{2}) = 0\}$ и $\{f : f(\frac{1}{2}) = 1\}$ в пространстве многочленов степени ≤ 2 со скалярным умножением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

4. Какое наибольшее число сторон может иметь сечение четырехмерного куба двумерной плоскостью?

5. Найти индексы инерции вещественной квадратичной формы, если известно, что угловые миноры ее матрицы удовлетворяют условиям $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 = \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 > 0$.

6. Является ли матрица а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ матрицей поворота евклидовой плоскости в некотором базисе?

7. Пусть $I^n \subset \mathbb{R}^n$ – куб, заданный неравенствами $\{|x_i| \leq 1,\ (i = 1, \ldots, n)\}$, $\mathcal{A}$ – такой линейный оператор, что $\mathcal{A}(I^n) \subset I^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – (комплексные) собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Доказать, что

а) $|\lambda_i| \leq 1\ (i = 1, \ldots, n)$;

б) если $\mathcal{A}(I^n) = I^n$, то $|\lambda_i| = 1\ (i = 1, \ldots, n)$;

в) если $|\lambda_i| = 1\ (i = 1, \ldots, n)$, то $\mathcal{A}(I^n) = I^n$.