Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Теория уравнений с частными производными считалась в середине этого века вершиной математики — как вследствие трудности и значения решаемых ею задач, так и потому, что она сформировалась позже большинства математических дисциплин.

Сегодня многие склонны пренебрежительно рассматривать эту замечательную область математики как старомодное искусство жонглирования неравенствами или как полигон для приложений функционального анализа. Соответствующий курс даже исключен из обязательной программы ряда университетов (например, в Париже). Более того, такие замечательные учебники, как классический трехтомник Гурса, были выкинуты библиотекой университета Париж-7 за ненадобностью (и только благодаря моему вмешательству удалось спасти их, наряду с курсами лекций Клейна, Пикара, Эрмита, Дарбу, Жордана, ...).

Причина вырождения важной общематематической теории в бесконечный поток работ «Об одном свойстве одного решения одной краевой задачи для одного уравнения» состоит, вероятно, в попытке создать единую всеобъемлющую сверхабстрактную «теорию всего».

Основным источником уравнений с частными производными являются модели сплошных сред математической и теоретической физики. Попытки распространить замечательные достижения математической физики на сходные с ее моделями лишь формально системы приводят к сложным и труднообозримым теориям, подобно тому, как попытки распространить геометрию поверхностей второго порядка и алгебру квадратичных форм на объекты более высоких степеней быстро заводят в дебри алгебраической геометрии с ее обескураживающей иерархией сложных вырождений и вычислимыми лишь принципиально ответами.

В теории уравнений с частными производными положение еще хуже: трудности коммутативной алгебраической геометрии соединяются здесь с некоммутативной дифференциальной алгеброй совершенно неразделимым образом, и вдобавок возникающие вопросы топологии и анализа глубоко нетривиальны.

В то же время общефизические принципы и такие общие понятия, как энергия, вариационный принцип, принцип Гюйгенса, лагранжиан, преобразование Лежандра, гамильтониан, собственные числа и собственные функции, двойственность волна–частица, дисперсионные соотношения, фундаментальные решения, прекрасно работают в многочисленных важнейших задачах математической физики. Их исследование стимулировало развитие больших отделов математики, таких, как теория рядов и интегралов Фурье, функциональный анализ, алгебраическая геометрия, симплектическая и контактная топология, теория асимптотик интегралов, микролокальный анализ, теория индекса (псевдо)дифференциальных операторов и т. д.

Знакомство с этими фундаментальными математическими идеями является, на мой взгляд, абсолютно необходимым для каждого работающего математика. Их исключение из университетского преподавания математики, совершившееся или совершающееся во многих западных университетах под влиянием схоластов-аксиоматизаторов (не знакомых ни с какими приложениями и не желающих знать ничего, кроме «абстрактной чепухи» алгебраистов), представляется мне крайне опасным последствием бурбакизации и математики, и ее преподавания. Стремление уничтожить ненужную схоластическую псевдонауку является естественной и законной реакцией общества (в том числе научного) на безответственную и самоубийственную агрессивность «сверхчистых» математиков, воспитанных в духе Харди и Бурбаки.

Автор этого очень короткого курса лекций старался познакомить с калейдоскопом фундаментальных идей математики и физики студентов-математиков с минимальными познаниями (линейная алгебра и основы анализа, включая обыкновенные дифференциальные уравнения). Вместо обычного в математических книгах принципа наибольшей общности автор старался придерживаться принципа минимальной общности, согласно которому каждая идея должна быть вначале ясно понята в простейшей ситуации, и только затем развитый метод может переноситься на более сложные случаи.

Хотя доказательство общего факта обычно бывает проще, чем доказательство его многочисленных частных случаев, содержание математической теории для обучающегося не больше, чем набор хорошо и до конца понятых им примеров. Поэтому именно примеры и идеи, а не общие теоремы и аксиомы, составляют основу этой книги. Экзаменационные задачи в конце курса составляют существенную его часть.

Особое внимание было уделено взаимодействию предмета с другими областями математики: геометрией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением, топологией. Автор рассчитывал на любознательного студента, но надеется, что даже профессиональные математики других специальностей смогут познакомиться по этой книжке с основными и потому простыми идеями математической физики и теории уравнений с частными производными.

Настоящий курс был прочитан студентам третьего курса Математического Колледжа Независимого Московского Университета в осеннем семестре 1994/1995 учебного года, причем лекции 4 и 5 были прочитаны Ю. С. Ильяшенко, лекция 8 — А. Г. Хованским. Все лекции были записаны В. М. Имайкиным (составленный им конспект был затем переработан автором). Автор выражает всем им глубокую благодарность.

Первое издание этого курса вышло в 1995 году в Издательстве Математического Колледжа Независимого Московского Университета. В настоящем издании сделан ряд добавлений и исправлений.