18.10.93.

Рассмотрим замену координат на многообразии $x(y)$: $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$. Тензор T преобразуется по закону:

$$T^I_J(x) \frac{\partial x^J}{\partial y^I} \frac{\partial y^K}{\partial x^I} = T^K_L(x(y))$$

Здесь $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$, $\frac{x^J}{\partial y^L} = \frac{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_q}}{\partial y^{l_1} \dots \partial y^{l_q}}$; $K = (k_1, \dots, k_p)$; $L = (l_1, \dots, l_q)$.

Введем базисы в пространствах тензоров.

Базис в пространстве векторов — это просто набор координатных векторов $e_1, \dots, e_n$. Заметим, что векторы можно отождествить с дифференциальными операторами первого порядка:

$$e_i \sim \frac{\partial}{\partial x^i},\ V^i(x)) \sim V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $V(x)$ — векторное поле.

Это отождествление разъясняется дифференцированием по направлению вектора:

$$f(x^1, \dots, x^n),\ x(t) = (x^i(t)),\ \frac{df(x(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} V^i,$$

где $V^i = \frac{dx^i}{dt}$, т.е., чтобы найти производную по направлению вектора, надо знать компоненты вектора и производные по базисным векторам. Коэффициенты дифференциального оператора первого порядка преобразуются как векторы. Производная по направлению есть скалярное произведение вектора скорости кривой на ковектор градиента функции. Векторное поле $V(x) = V^i(x) e_i$ — дифференциальный оператор первого порядка.

Введем также базисные ковекторы $e^i = dx^i$. Ковекторные поля $w = w_i e^i = w_i(x) dx^i$ — дифференциальные 1-формы. Например, дифференциал функции — дифференциальная 1-форма $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Наконец, рассмотрим тензор типа (p, q), ранга $p + q$: $T^I_J(x)$, где $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$. Всего есть n^{p+q} функций. Обозначим элемент базиса через

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}.$$

Что это за элемент? Просто его (I, J)-я компонента равна 1, а все остальные 0. Т.е. это обычный стандартный базис n^{p+q}-мерного пространства. Знак $\otimes$ указывает на недопустимость, вообще говоря, перестановок сомножителей. Но множитель с верхним индексом можно переставить с множителем с нижним индексом. Например $e^i \otimes e_j = e_j \otimes e^i$; но $e^i \otimes e^j \neq e^j \otimes e^i$.

Тензоры типа (p,q) образуют в данной точке x n^{p+q}-мерное линейное пространство. Тензоры в точке можно перемножать: $T^I_J = T_{(1)}{}^{I_1}_{J_1} \cdot T_{(2)}{}^{I_2}_{J_2}$, если $I=(I_1,I_2)$, $J=(J_1,J_2)$.

Ведь компоненты можно перемножать просто как скаляры. Например, $v^i w^j = T^{ij}$, $T^i_j = v^i w_j$.

Упражнение. Произведение тензоров действительно тензор, т.е. преобразуется по тензорному закону.

Операция перестановки индексов (отдельно верхних или нижних): $T^{ij} \to T^{ji}$ — корректная операция для тензора типа (2,0). Но операция $T^i_j \to T^j_i$ некорректна.

Верхние индексы называются векторными, а нижние — ковекторными. В общем виде операция перестановки индексов имеет вид
$T^I_J \mapsto T^{s_1(I)}_{s_2(J)}$, где s_1, s_2 — перестановки соответствующих множеств индексов.

Замечание. В линейной алгебре нет перестановок верхних и нижних индексов, т.е. симметрический оператор имеет смысл, если только задано скалярное произведение. А симметрическая квадратичная форма имеет смысл.

Операция взятия следа (свертка)

Рассмотрим на примере. $T^i_j(x) \mapsto T^i_i(x)$ — след. Эта операция имеет инвариантный смысл. Для операторов это доказано в линейной алгебре.

Введем общую операцию взятия следа.

$$T^I_J = T \begin{pmatrix} I'i & I'' \\ J'j & J'' \end{pmatrix} (x) \mapsto T \begin{pmatrix} I' & I'' \\ J' & J'' \end{pmatrix} (x) = T^{(I'iI'')}_{(J'iJ'')},$$

т.е. выделили один верхний и один нижний индекс и провели суммирование.

Например $T^i_j = v^i w_j \mapsto v^i w_i = (v,w)$ — скалярное произведение вектора и ковектора есть частный случай взятия следа.

$T^i_j v^j$ — применение матрицы к вектору — тоже частный случай следа: $T^i_j v^k \mapsto T^i_j v^j$.

$T^i_j w_i$ — применение матрицы к ковектору то же: $T^i_j w_k \mapsto T^i_j w_i$.

Упражнение: взятие следа корректно определено.

Пусть в пространстве имеется (симметричные) скалярное произведение, задающее (псевдо)риманову метрику. Применим операцию взятия следа:

$v_i = g_{ij} v^j$, где $\det g_{ij} \neq 0$

Указанная операция называется операцией опускания индекса: из вектора можно получить ковектор.

$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$.

Аналогично можно рассмотреть поднятие индексов $g^{ij}v_j = v^i$.

Лемма. *Поднятие и опускание индексов — обратные операции.*

Доказательство. Очевидно.Именно здесь нужна невырожденность матрицы g_{ij}.

Евклидовой называется геометрия, для которой в некоторых координатах $g^{ij} = \delta^{ij}$.

Псевдоевклидова геометрия — когда $g^{ij} = \mathrm{const}$.

Важным примером является лоренцева метрика, когда один квадрат с "+", три с "-". Такие координаты существуют не всегда, впоследствии мы выясним необходимые и достаточные условия этого.

Из тензора T^{ij} выделим $\frac{T^{ij}-T^{ji}}{2}$ — кососимметричная часть и $\frac{T^{ij}+T^{ji}}{2}$ — симметричная часть.

То же можно проделать с тензором (2,0).

Но с тензором T^i_j — нельзя без римановой метрики.

$T^{ij} = g^{ik}T^j_k$, $T_{ij} = g_{ik}T^k_j$.

Собственные числа T^i_k корректно определены только в присутствии метрики:

$$\det\|T_{ij} - \lambda g_{ij}\| = 0.$$

Некоторые важные физические тензоры (например, энергии-импульса) симметричны без метрики. В пространстве Минковского симметричная матрица может иметь комплексные собственные числа.

Если метрика положительна, есть простые аналитические рецепты нахождения собственных чисел симметрической матрицы (экстремум на единичной сфере).

В неположительной метрике все по-другому.

$g_{ij} = \pm\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm1 \end{pmatrix}$ — метрика, у симметрических матриц могут появиться собственные мнимые значения.

Упражнение: Разберитесь со случаем n=2.

Рассмотрим тензор δ^i_j, он не меняется при замене координат, поскольку $J^{-1}(\delta^i_j)J = \delta^i_j$. А матрица квадратичной формы не сохраняет это свойство.

Современные тензорные обозначения восходят к Риману. До этого в двумерной геометрии поверхностей использовались классические обозначения компонент симметрической матрицы E, F, G.

Симметричные и кососимметричные тензоры (с нижними индексами)

$T_{(j_1,\ldots,j_q)}$ — полилинейная форма от векторов, т.е. функция от q векторов, линейная по каждому аргументу. Возьмем набор векторов $v_1,\cdots,v_q$, $v_s = v_s^j$. Положим $T\langle v_1,\ldots,v_q\rangle = T_{j_1\cdots j_q}v_1^{j_1}\cdots v_q^{jq}$. Очевидно, это полилинейная форма.

Рассмотрим операцию ограничения тензора на подпространстве. Векторное поле не ограничивается на подпространство, если нет метрики. Так, проектирование есть композиция операций опускания индекса, ограничения, поднятия индекса.

Пример: в анализе мы проделывали ограничение: $f_i(x)dx^i$, $x^i(t)$ — кривая, $\mapsto f_i(x(t))\frac{dx^i}{dt}dt$

Определение. *Тензор симметричный, если $T_{i_1,\cdots,i_q} = T_{s(i_1\cdots i_q)}$, где $s \in S_n$, т.е. это фактически коэффициенты однородных полиномов степени q от n переменных: $T_{i_1\cdots i_q}x^{i_1}\cdots x^{i_q}$.*

Определение. *Тензор кососимметрический, если*

$$T_{i_1\cdots i_q} = (-1)^{\sigma(s)}T_{s(i_1\cdots i_q)},$$

где σ — четность перестановки.

Кососимметрические тензоры есть дифференциальные формы и подвергаются интегрированию.

Лемма. *1) Пусть $q > n$. Тогда кососимметрический тензор $T \equiv 0$.*

2) Если же $q = n$, то пространство таких тензоров одномерно.

3) При замене $x = x(y)$ кососимметрический тензор ранга n преобразуется по закону $T' = T\det J$.

Доказательство. 1) $T_{i_1\cdots i\cdots i\cdots i_q} = -Ti_1\cdots i\cdots i\cdots i_q \Rightarrow T = 0$.

2) $T_{1,\ldots,n} \neq 0$. А все остальные компоненты либо равны 0, либо совпадают с ней с точностью до знака.

3) Детерминант — единственный кососимметрический тензор ранга n в n-мерном пространстве.

$$T_{j_1\cdots j_n} = T_{i_1\cdots i_n}(x(y))\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}} = T_{(1,2,\cdots,n)}(x(y))$$

.

$$(-1)^{\sigma(s)}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}} = T_{(1,2,\cdots,n)}\mathrm{det}\frac{\partial x}{\partial y}$$

Итак, $T' = T\mathrm{det}J$.

Существенно, что тензорная теория интегрирования не зависит от координат и римановой метрики.

Законы природы также подразделяются на зависящие и не зависящие от метрики пространства.

Часть уравнений Максвелла требует, а часть не требует римановой метрики.

Также можно построить и часть топологии, не зависящую от метрики.