15.11.93
Лекция 8

Риманова кривизна.

Классическая кривизна кривой и поверхности — достаточно простое понятие. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и евклидовой метрикой $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Пусть для простоты $n = 2,\ (x^1, x^2) = (x, y)$.

Рассмотрим кривую $x(t), y(t),\ t = s$ — натуральный параметр, т.е. кривая запараметризована длиной. Кривизной кривой называется абсолютная величина ускорения $k = |\frac{d^2\vec{x}}{ds^2}|$ $(\forall n)$. Бывает кривизна кривой со знаком, но это только в плоскости:

k$>$ 0 k$<$ 0

Можно еще представлять кривизну следующим образом: выберем в точке кривой локальную систему координат, где ось x // кривой. Тогда $ds = dx'$ при $x = x_0$. Тогда $k = -f''_{xx}|_{x=x_0}$, где график f совпадает с кривой в этой локальной системе.

Смотри в классическом курсе формулы Френе.

Теперь рассмотрим двумерную поверхность в трехмерном пространстве, выберем локальную систему координат x, y, z, т.ч. поверхность задается как $z = f(x, y)$, ось $z \perp$ поверхности. Тогда имеем $z'_x = z'_y = 0$. Во втором приближении поверхность задается квадратичной формой с матрицей $b_{ij} = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})|_{x^0, y^0}$, где $(x^1, x^2) = (x, y)$.

Эта форма называется второй квадратичной формой поверхности.

Посмотрим, как выглядит риманова метрика поверхности. Во-первых, она индуцирована метрикой пространства. Длину касательного вектора поверхности легко найти: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т.е. $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Так что система координат характеризуется тем, что риманова метрика евклидова: $g_{ij} = \delta_{ij}$, а вторая квадратичная форма имеет вид: $b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ (в точке x_0, y_0).

Поскольку один индекс поднимается при помощи метрики, инвариантно определены собственные числа — главные кривизны. Детерминант называется гауссовой кривизной. Псевдосфера — верхняя часть гиперболоида — в пространстве Минковского имеет метрику Лобачевского и называется в физике массовой поверхностью. Это есть реальное применение геометрии Лобачевского в физике, в отличии от "углов большого треугольника".

Очевидно, гауссова кривизна $k = k_1 k_2$. У прямой нет внутренней геометрии. Геометрия возникает из-за вложения в пространство. Аналогично k_1, k_2 — не имеют инвариантного смысла. А гауссова кривизна — имеет и вычисляется только через риманову метрику самой поверхности.

В трехмерном пространстве k не изменит знак при изменении ориентации оси z.

k> 0 k< 0

Задача (Максвела). Берега острова уходят круто вниз. Тогда число пиков + число впадин - число перевалов = 1.

В анализе вторая квадратичная форма в критических точках называется формой Гессе.

Итак, кривизна — тривиальное понятие вроде ускорения.

Идея Римана: твердое тело — репер, геометрия создается телами за счет сил, воздействующих на репер. Надо объехать замкнутый путь репером, сравнить начальное и конечное положение. Результат измерения и есть кривизна.

Уже греки были недовольны постулатом параллельных. (Это если выражаться на языке математической логики.) На тензорном языке нельзя говорить о параллельности в разных точках. Вообще, векторы по-разному переносятся по разным кривым при наличии римановой метрики. Идея параллельного переноса лежит в основе понятия кривизны.

Итак, рассмотрим многообразие M с координатами $x^1, \ldots, x^n$, метрикой $g_{ij}(x)$. Пусть $T = (T^i(x))$, $i = 1, \ldots, n$ — векторное поле.

Рассмотрим объект $T^i_{,k} = \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^k}$. Он — не тензор. Если есть замена координат $x(y)$, где $y = (y^1, \cdots, y^n)$, то $T'^j = T(x(y))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. У тензоров типа (1,1) тоже есть свой закон преобразования. $T'^j_{,s} = \frac{\partial T'^j(x(y))}{\partial y^s}$ — не совпадает с тензорным законом. (А, например, $\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}$ — кососимметрический тензор, но единственный из частных производных I порядка для ковекторного поля. У векторного поля вообще не составишь тензора без метрики). Итак, пока что нет анализа тензорных, в частности векторных полей. Вывод: дифференцирование тензора не есть наивное дифференцирование в локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим $\mathbf{R}^N_x$ — N-мерное пространство, зависящее от x. Например, годится любое тензорное пространство или его подпространство. Вообще говоря, это пример векторного расслоения или расслоенного пространства. Например, в случае вложенного многообразия можно рассмотреть ортогональное дополнение к касательному пространству. Основной пример — пространство касательных векторов, т.е. $N = n$. Рассмотрим функцию f, т.ч. $f(x) \in \mathbf{R}^N_x$. Например, векторное поле. Мы хотим построить анализ таких функций. Наивный подход $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ плох, т.к. $f(x)$, $f(x+h)$ в различных пространствах. Нужна разумная операция параллельного переноса касательных векторов, хотя бы на бесконечно малое расстояние.

Пример $f(x)$, $n = 1$. Если считать, что числовая прямая в каждой точке x своя, это уже вопрос — параллельный перенос скаляров, эти идеи Вейля оказались важны для описания магнитного поля.

Для двумерных поверхностей кривизна оказывается одной функцией. В трехмерном случае — это тензор 4 ранга.

Рассмотрим касательное пространство $\mathbf{R}^N_x$ многообразия M^n с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим набор функций $\Gamma^i_{jk}(x)$, т.ч. $\forall$ векторного поля $T(x) = T^i(x)$. $\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}(x) T^j(x)$ — тензор. Набор Γ^i_{jk} называется символами Кристоффеля или геометрической связностью многообразия.

При аффинных преобразованиях, очевидно Γ^i_{jk} преобразуются как тензоры.

Из нашего условия, что указанный объект — тензор, можно выписать закон преобразования для Γ^i_{jk}. Для простоты можно начать с такой системы, в которой $\Gamma = 0$. В криволинейной системе Γ уже не будут равны 0.

Определение. *Пусть в каждой локальной системе координат задан набор числовых функций $\Gamma^i_{jk}(x)$, т.ч. $\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} T^j(x)$ — тензор (1,1). Тогда набор $\Gamma^i_{jk}(x)$ называется геометрической связностью (или символами Кристоффеля.) Указанная операция называется операцией инвариантного дифференцирования.*

$\nabla_k T = \partial_k T + \hat{\Gamma}_k T$, *где* $\hat{\Gamma}_k$ *— линейный оператор.*

В таком виде понятно, как обобщать дифференцирование на другие тензорные поля. При дифференцировании получаются тензоры более высоких рангов. В одномерном случае линейный оператор — умножение на число. Так что можно инвариантно дифференцировать функции. Ковариантные производные, в отличие от обычных, не коммутируют.

Пример: $n = 1$.

$$[\nabla_k, \nabla_l] = \nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k = \frac{\partial \Gamma^k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l}{\partial x^k}$$

— вообще не дифференциальный оператор.

Операция параллельного переноса в одномерном случае нетривиаль на, если от точки к точке меняется базис.

В физике электромагнитное поле задает ковариантное дифференцирование комплекснозначных функций.

Указанный при $n = 1$ коммутатор называется римановой кривизной. Т.е. риманова кривизна измеряет некоммутирование ковариантных производных.

Лемма. *Символы Кристоффеля преобразуются по закону:*

$$\tilde{\Gamma}^p_{qr}(y) = \underbrace{\Gamma^i_{jk}(x(y)) \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \frac{\partial x^k}{\partial y^s}}_{\text{это как у тензоров}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^q \partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial x^i}$$

Упражнение. Докажите эту очевидную лемму.

Заметим, что для аффинного преобразования останется только тензорная часть.

Нелинейные замены координат естественны для механики сплошной среды, где нужно дифференцировать тензорные поля.

Чем характеризуется евклидова геометрия? Ковариантные производные будут коммутировать и во всех остальных системах координат (если в евклидовой были 0).

Упражнение. Превратите лемму в определение.

Риманова метрика определяет единственным образом некоторый естественный способ ковариантного дифференцирования, а именно:

1) Скаляры дифференцируются обычным образом.

2) $\nabla_k(T'T'') = (\nabla_k T')T'' + T'(\nabla_k T'')$. (формула Лейбница).

3) Ковариантное дифференцирование коммутирует со сверткой.

Теорема. *1) Существует единственная операция ковариантного дифференцирования любых тензоров со свойствами 1)-3), если только есть для векторов.*

2) Существует и единственна операция ковариантного дифференцирования на римановом многообразии со свойствами 1)-3) и

3) $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$

4) $\nabla_k g_{ij} = 0$

$\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = T^i_{jk}$ — тензор кручения данной связности.

Связность, о которой говорится в теореме, называется римановой (кристоффелевой связностью). Для $n = 2$ риманова кривизна совпадает с гауссовой.