3.10.95

Лекция 3

Преобразования Фурье на прямой и плоскости

Пусть G — группа, действующая на пространстве X. Рассмотрим случай, когда $X = \mathbf{R}$, $G = \mathbf{R}$ — группа. Элемент $x \in X$ под действием элемента $y \in G$ переходит в элемент $x + y \in X$, рис. 1.

Рис. 1

Рассмотрим аналогичное действие на пловскости $X = \mathbf{R}^2$, $\quad G = \mathbf{R}^2$ — группа с двумя образующими действует на "пассивном" X — аффинной плоскости $\mathbf{R}^2$, рис. 2.

Рис. 2

Под действием G прямые переходят в прямые, рис. 3. Евклидово расстояние сохраняется. Преобразование Радона:

$$f \mapsto Rf, \qquad Rf(L) = \int\limits_L f ds.$$

Рис. 3

Гармонический анализ занимается изучением свойств (функций, преобразований функций и т.д.), инвариантных под действием определенной группы. Например, преобразования Фурье имеют дело с группой сдвигов. Действующая на пространстве группа G действует и на определенные на этом пространстве функции. Например, пусть $g \in G$, обозначим T_g — действие g на функцию: $T_g f(p) = f(g(p))$. В нашем случае $T_x f(p) = f(p+x)$, $T_x L = L + x$. Справедливо соотношение

$$RT_x f = T_x Rf,$$

где $T_x Rf(L) = Rf(T_x L) = Rf(L+x)$. Оно означает, что преобразование Радона инвариантно относительно группы G.

Самые простые функции, инвариантные относительно группы сдвигов — константы. Рассмотрим также экспоненты: $e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x}, \quad \xi \in \mathbf{C}$.

$$T_y e_\xi(x) = e_\xi(x+y) = e^{2\pi i \xi (x+y)} = e^{2\pi i \xi x} e^{2\pi i \xi y} = \lambda e_\xi(x), \qquad \lambda = e^{2\pi i \xi y}.$$

Таким образом, экспоненты — собственные функции для операторов сдвига. Это свойство характеристическое: можно доказать, что любая непрерывная собственная функция является экспонентой. Параметр ξ называется частотой. Нарисуем график вещественной и мнимой частей функции

$$e_\xi(x) = \cos(2\pi\xi x) + i\sin(2\pi\xi x), \text{ рис. } 4.$$

Рис. 4

Для вещественных ξ экспонента периодична. Период этих функций равен $\frac{1}{|\xi|}$, он называется **длиной волны**. Константы естественно включаются в класс экспонент (при $\xi = 0$). Вид графиков для большой и малой частоты показан на рис. 5.

Re e_ξ при большом $|\xi|$ Re e_ξ при малом $|\xi|$

Рис. 5

В физике эти функции описывают простые синусоидальные колебания (на слух - звуки “без тембра”). Музыкальные звуки образованы наложением волн разных частот, как правило, соизмеримых. Таким образом, стоит рассмотреть линейные комбинации или “суперпозиции” экспонент $\sum\limits_1^N a_j e_{\xi_j}(x)$. Близкие к этим суперпозициям звуки генерируются синтезатором. Например, синтезатор в точности не повторяет звуки фортепьяно, которое воспроизводит бесконечную суперпозицию с непрерывным спектром (свойства резонирующего дерева). Математически переход к непрерывному спектру означает замену суммы интегралом.

Интеграл Фурье: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e_\xi(x) d\xi$.

Итак, рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{\pi i \xi x} d\xi$. Это несобственный интеграл по параметру от комплекснозначной функции. Предполагается, что φ — интегрируемая функция, то есть $\int |\varphi| d\xi < \infty$. Этот интеграл — обычная площадь подграфика. В этом случае интеграл Фурье существует (сходится абсолютно), так как $|\varphi(\xi) e_\xi| = |\varphi|$.

Воспринимаемый нами звук действительно хорошо моделируется интегралом Фурье. Спектр можно демонстрировать при помощи осциллографа или гармонического анализатора. Реальный график имеет вид (нажали “до”):

Рис. 6

Современный фортепьянный звукоряд разработан в начале 18 века (“хорошо темперированный клавир”). 12 интервалов в октаве, октава — удвоение частоты. Отношение частот соседних звуков постоянно, а значит, равно $\sqrt[12]{2}$. Таким образом, соседние графики “до” и “ре” имеют вид, как на рис. 7:

Рис. 7

Но исторически интеграл Фурье впервые применен в теории распространения тепла. Это универсальное аналитическое средство математической физики.

Основная задача: преобразовать функцию f на X в функцию φ на двойственном множестве Ξ, так чтобы

$$f(x) = \int \varphi(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Это представление важно и для преобразования Радона и для томографии.

Это непрерывное разложение f по простым колебаниям. Эта задача хорошо исследована, решение свое для каждого "разумного" класса функций. "Узкий" класс функций — пространство Шварца S — состоит из функций, имеющих производные всех порядков, которые убывают быстрее любой степени x:

$$S = \{f : \left| x^k f^{(j)}(x) \right| \leq C_{k,j} \forall k, j\}.$$

Например: $|f| \leq C_{0,0}, \quad |x^2 f| \leq C_{2,0} \;\Rightarrow\; |(x^2+1)f| \leq C,\ |f| \leq \frac{C}{x^2+1}$, а значит, f суммируема на прямой, рис. 8.

Рис. 8

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N \to +\infty} \operatorname{arctg} x |_{-N}^{N} = \pi.$$

Теорема. $\forall f \in S(X) \quad f(x) = \int \varphi(\xi) e_\xi(x) d\xi$, где

$$\varphi(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \in S()$$

и наоборот

$$\forall \varphi \in S(\Xi) \quad f \in S(X).$$

Тем самым получается двойственность пространства Шварца на двойственных прямых X и Ξ.

Теорема順 Планшереля. $\int |\varphi|^2 d\xi = \int |f|^2 dx$. В математической физике этот интеграл имеет смысл энергии. Если f — амплитуда колебания, то это энергия колебания. В томографии интегралы стояли под знаком экспоненты, значит, это безразмерные величины. Для преобразования Радона тоже есть аналог теоремы Планшереля, все это частные случаи некоторого общего факта.

Свойства преобразования Фурье:

1. Теорема Планшереля.
2. $\frac{d\varphi}{d\xi} = \int f(x)\frac{de^{-2\pi i\xi x}}{d\xi}dx = \int f(x)(-2\pi ix)e^{-2\pi i\xi x}dx = F(-2\pi ixf(x))$.
3. $\frac{dg}{dx} = F^{-1}(2\pi i\varphi(\xi))$.
4. $F(T_y f) = \int f(x+y)e^{-2\pi i\xi\xi}dx = e^{2\pi iy\xi}\int f(x+y)e^{-2\pi(x+y)\xi}d(x+y) = \mathrm{e}^{2\pi iy\xi}F(f)$.
5. $F^{-1}(T_\eta\varphi) = e^{-2\pi i\eta x}F^{-1}(\varphi)$.

Эти свойства не удивительны, так как операции сдвига и дифференцирования взаимосвязаны, но и интеграл Фурье построен на основе группы сдвигов!

Примеры:

1. $f(x) = e^{-\pi x^2}$ (Гауссово распределение вероятности, рис. 9).

Рис. 9

$$\varphi(\xi) = \int e^{-\pi x-2\pi i\xi x}dx = e^{-\pi\xi^2}\int e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = \\ = e^{-\pi\xi^2}\int\limits_{\mathrm{Im}\,z=\xi} e^{-\pi z^2}dz = e^{-\pi\xi^2}\int\limits_{\mathrm{Im}\,z=0} e^{-\pi x^2}dx = e^{-\pi\xi^2},$$

так как последний Гауссов интеграл равен 1. При интегрировании мы перешли от интегрирования по прямой $\mathrm{Im}\,z=\xi$ к интегрированию по прямой $\mathrm{Im}\,z=0$ на основании теоремы Коши, рис. 10. Таким образом, получили изоморфную функцию.

Рис. 10

Рис. 11

В Германии на банкнотах нового образца достоинством 10 марок изображен Гаусс, а также чертеж с неверным (!) изображением гауссовой кривой, рис. 11:

Рис. 11

2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (Распределение Коши).

$$\varphi(\xi) = \int \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x^2+1} dx = \int\limits_{\mathrm{Im}\, z=0} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+1} dz$$

$$z = x + yi, \quad |e^{-2\pi i z\xi}| = e^{2\pi y\xi}.$$

Пусть $\xi > 0$. Тогда утянем контур вниз, где он пропадет. По пути зацепится за полюс и останется:

$$-2\pi \mathrm{Res}\, \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+1} = -2\pi i (z+i)(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+1})|_{z=-i} = -2\pi i \frac{e^{-2\pi\xi}}{-2i} = \pi e^{-2\pi\xi}.$$

Аналогично при $\xi < 0$ получим $\pi e^{2\pi\xi}$. В итоге $\varphi(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, рис. 12.

$$\varphi'(0-) = -2\pi^2$$
$$\varphi'(0+) = 2\pi^2$$

Рис. 12

Особенность полученной функции в нуле связана с конечным порядком убывания исходной функции. Свойства убывания связаны с гладкостью Фурье-образа.

10.10.95

Лекция 4

Преобразование Фурье и преобразование Радона

Напомним свойства преобразования Фурье на прямой:

Теорема 1. Если $\int\limits_{\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, то $\varphi \in C(\mathbf{R})$ и $\varphi \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Теорема 2. Если $f \in S$, то $\varphi \in S$.

Теорема 3 (Планшереля). $\int\limits_{\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx$.

Теорема 4 (Формула обращения). Пусть $f \in S$, тогда

$$f(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Упражнение. Докажите теоремы 1, 2.

Задача. Докажите теорему 3.

Указание. В среднем можно приблизить суммируемую функцию ступенчатыми функциями: $f_\varepsilon \sim f$, $f^2 \sim f_\varepsilon^2$, т.е. $\int |f|^2 dx \approx \int |f_\varepsilon|^2 dx$. У ступенчатой функции преобразование Фурье явно считается. В частности, для функции, представляющей собой одну ступеньку (см. рис. 1), преобразование Фурье равно

$$\sin c\, 2\pi\xi = \frac{\sin 2\pi\xi}{2\pi\xi}.$$

Рис. 1

Ступенчатая функция — линейная комбинация ступенек, значит преобразование Фурье тоже явно вычисляется.

Проверим равенство интегралов квадрата ступеньки и $\sin c$. При сдвиге ступеньки интеграл квадрата не меняется, но и преобразование Фурье умножается на экспоненту, модуль которой равен 1, т.е. интеграл квадрата модуля тоже не меняется.

В случае линейной комбинации ступенек получится в образе сумма функций $sinc$. Значит, должна быть верна формула:

$$\int |s_1(\xi) + s_2(\xi)|^2 d\xi = \int |s_1|^2 d\xi + \int |s_2|^2 d\xi.$$

Чтобы ее проверить, остается установить соотношение $\int \bar{s_1} s_2 d\xi = 0$. Оно верно, если основания ступенек не пересекаются (проверьте!).

Следствие. Пусть $f_i \in S$ переходит при преобразовании Фурье в φ_i, $i = 1, 2$. Тогда $\int f_1 \bar{f_2} dx dx = \int \varphi_1 \bar{\varphi_2} d\xi$, т.е. преобразование Фурье сохраняет L^2-скалярное произведение.

Преобразование Фурье на плоскости

Рассмотрим плоскость с евклидовой структурой E. Для всякой непрерывной функции A, равной нулю вне некоторого круга, можно определить интеграл Римана (см. рис. 2):

$$\sum f(p_i)|\pi_i| \to \int f dS,$$

где $\{\pi_i\}$ — разбиение E на мелкие прямоугольники, p_i — любая точка в π_i, $|\pi|$ — площадь прямоугольника π.

Рис. 2

Для корректности определения надо проверить независимость от выбора ортогональной системы координат.

На плоскости действует группа сдвигов $G \cong \mathbf{R}^2$. Она действует и на функции $T_g f(x) = f(x+g), g \in G$. Можно искать характеры G, т.е. одномерные инвариантные подпространства этого действия:

$$\forall g \in G \quad T_g e(x) = \lambda_g e(x) \text{ или } e(x+g) = \lambda_g e(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^2. \qquad (1)$$

На прямой мы такие функции нашли — это экспоненты. В случае плоскости мы выбираем координаты $x = (x_1, x_2)$ на E и координаты $g = (g_1, g_2)$ на G. Используя соотношение (1) для $g = (g_1, 0)$, мы находим $T_g e(x_1, x_2) \equiv e(x_1 + g_1, x_2) = \lambda_g e(x_1, x_2)$. Отсюда

$$e(x_1, x_2) = C(x_2) e^{2\pi i \xi_1 x_1}, \quad \xi_1 \in \mathbf{C}.$$

Аналогично, применяя (1) к $g = (0, g_2)$, получаем $e(x_1, x_2 + g_2) = \lambda_g e(x_1, x_2)$, поэтому $C(x_2)$ тоже экспонента:

$$C(x_2) = C e^{2\pi i \xi_2 x_2}, \quad \xi_2 \in \mathbf{C}.$$

Итак, $e = C e^{2\pi i (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}$.

$$e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x}, \quad \xi \in (\mathbf{C}^2)^*, \quad \xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2.$$

Предположим, что вектор ξ — вещественный, то есть $\xi \in (\mathbf{R}^2)^*$. Тогда характер e_ξ есть ограниченная функция. Уравнение $\xi x = \lambda$ определяет прямую, ортогональную вектору ξ, $\quad |p| = \frac{<x,\xi>}{|\xi|}$ (см. рис. 3).

Рис. 3

Экспонента e_ξ постоянна на каждой такой прямой, т.е. по каждому ортогональному ξ направлению. Поэтому экспоненты называются плоскими волнами. При ограничении на прямую, идущую вдоль вектора ξ, получается обыкновенная экспонента — профиль плоской волны.

Пусть теперь $\int |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 < \infty$, положим

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \int f(x_1, x_2) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

.

Все приведенные выше теоремы допускают обобщение на случай преобразования Фурье на плоскости:

Теорема 1. $\varphi \in C(\mathbf{R}^2)^*)$, то $\varphi \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Теорема 2. $f \in S \Rightarrow \varphi \in S$.

Теорема 3. $\int\limits_{E^*} |\varphi|^2 d\xi = \int\limits_{E} |f|^2 dx$, причем евклидова структура на E^* переносится за счет отождествления E и E^* как векторных пространств.

Теорема 4. Если $f \in S$, то $f(x) = \int e^{2\pi i x \xi} \varphi(\xi) d\xi$.

Пример. Пусть f — "пудинг" — индикатор единичного круга (см. рис. 4)

Рис. 4

Характер постоянен на каждой прямой, ортогональной вектору ξ, частота профиля равна $|\xi|$. На рис. 5 изображены вид "пудинга" сверху, вектор ξ, линии уровня плоской волны, распространяющейся в направлении ξ, а также график вещественной части профиля:

Рис. 5

Суперпозицией таких плоских волн можно получить наш круглый "пудинг"! Это получается так: при интегрировании по α получим "круговые волны" (рис. 6). При интегрировании по $|\xi|$ получим наш "пудинг"!

Рис. 6

Причем для φ есть явная формула!

$$\varphi(\xi) = \int\limits_{|x|\leq 1} e^{-2\pi i\xi x}dx = \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{|x|=r} \dots d\alpha,$$

где α — полярный угол.

Вычислим внутренний интеграл

$$\int\limits_{|x|\leq r} e^{-2\pi i\xi x}d\alpha = \int e^{-2\pi i r|\xi|\cos\psi}d\psi,$$

где ψ — угол между x и ξ. Правая часть равна $2\pi J_0(r|\xi|)$, где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Следовательно,

$$\varphi(\xi) = 2\pi \int\limits_0^1 J_0(r|\xi|)r\,dr.$$

Эта же формула имеет отношение к обращению преобразования Радона.

Напомним преобразование Радона:

$$g(L) = \int\limits_L f ds.$$

Перепишем интеграл в указанной специальной системе координат (рис. 7):

Рис. 7

Ввиду инвариантности интеграла Римана в евклидовом пространстве относительно вращений можно выполнить поворот системы координат в интеграле Фурье:

$$\varphi(\xi) = \int f(y) e^{-2\pi i \xi x} dy_1 dy_2,$$

положив

$$x = (y_1, y_2), \qquad x = y_1 \frac{\xi}{|\xi|} + y_2 \Theta,$$

где Θ — единичный вектор, ортогональный ξ. Мы имеем:

$$\xi x = y_1 |\xi|.$$

Правую часть вычисляем сведением к повторному интегрированию:

$$\int f(y_1, y_2) e^{-2\pi i y_1 |\xi|} dy_1 dy_2 = \int \underbrace{\int f(y_1, y_2) dy_2}\, e^{-2\pi i y_1 |\xi|} dy_1.$$

Здесь внутри стоит преобразование Радона по прямой, зависящей от ξ и $y_1 : \quad \lambda_{\xi, y_1} = \{x : \xi x = y_1 |\xi|\}$.

Итак, получаем в результате интеграл:

$$\int g(\lambda_{\xi,p} e^{2\pi i p |\xi|} dp.$$

Но f можно восстановить по формуле обращения! Схема восстановления: $Rf \xrightarrow{(*)} \varphi \xrightarrow{(**)} f$.

Следствие. (Теорема проекций) (*) $\varphi(\xi) = \int g(\lambda(\psi, p)) e^{-2\pi i p |\xi|} dp$, где $\frac{\xi}{|\xi|} = (\cos\psi, \sin\psi)$, т.е. ψ — угол между осью x и ξ.

(**) — обратное преобразование Фурье.