Лекция 1

Начнем со списка рекомендуемой литературы. Прежде всего укажем следующие очень хорошие книги по топологии, хотя их содержание выходит далеко за рамки нашего курса.

(1) А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, Курс гомотопической топологии - М.: Наука, 1989. (Нашему годовому курсу примерно соответствуют первые две главы этой книги.)

(2) Дж.Милнор Теория Морса - М.: Мир, 1965.

(3) Дж.Милнор Теорема об h-кобордизме - М.: Мир, 1969.

(4) Дж.Милнор, Дж.Сташер Характеристические классы - М.: Мир, 1971.

Теперь более простые книги:

(5) В.В.Прасолов Наглядная топология - МЦНМО, 1995.

(6) В.А.Рохлин, Д.Б.Фукс Начальный курс топологии. Геометрические главы - М.: Наука, 1977. (Эту книгу очень трудно читать подряд, но она энциклопедична; в ней содержится почти весь нужный нам в этом семестре материал.)

(7) Ч.Коснёвски Начальный курс алгебраической топологии - М.: Мир, 1983.

Начиная курс топологии, каждый лектор должен сказать, что топология изучает свойства геометрических фигур, не зависящие от расстояний, кривизн, то есть свойства, не изменяющиеся при непрерывных деформациях фигур. В конце этой лекции станет ясно, что имеется при этом в виду.

Топология - очень красивая наука. Она осуществляет связь геометрии с алгеброй. В последнее время большинство новых идей в математике возникли в топологии, а затем были перенесены в алгебру. Красивые геометрические образы станут понятны позже. А на этой лекции придется усвоить некоторое количество скучных определений.

Топология изучает топологические пространства и непрерывные отображения между ними.

Определение. Топологическим пространством называют множество X с топологической структурой (топологией) τ. Топологической структурой τ называют при этом некоторое множество подмножеств $X : \tau \subset 2^X$. Подмножества X, входящие в τ, называют открытыми. При этом должны выполняться следующие свойства:

1) объединение любого набора открытых множеств открыто;

2) пересечение конечного набора открытых множеств открыто;

3) пустое множество $\emptyset$ и все множество X открыты.

Приведем примеры топологических пространств.

Пример 1. $\tau = 2^X$, то есть любое подмножество в X считается открытым. Это эквивалентно тому, что любая точка $x \in X$ является открытым множеством. Такая топология называется дискретной топологией.

Топологию τ иногда удобно задавать с помощью базы топологии. Базой топологии $\tau = \{V_\alpha\}$ называют такое подмножество $\{W_\lambda\} \subset \tau$, что любое открытое множество представляет собой объединение множеств W_λ в некотором числе.

Напомним, что метрическим пространством называют множество M с заданной функцией $\rho : M \times M \to \mathbf{R}_+$, обладающими следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Пример 2 (топология метрического пространства). В качестве базы топологии метрического пространства M берем множество всех шаров

$$V_\varepsilon = \{y \in M \Big| |x - y| < \varepsilon\}.$$

Пространства $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^n$ являются метрическими пространствами. Стандартные топологии в этих пространствах определяются как топологии метрических пространств.

В качестве базы топологии пространства $\mathbf{R}^n$ можно взять шары с рациональными радиусами и с рациональными координатами центров. Топология при этом получается та же самая, но база, в отличие от предыдущей, будет счетная.

Упражнение. Получится ли другая топология, если вместо шаров брать параллелепипеды?

Пример 3 (экзотическая топология $\mathbf{R}^1$). Будем считать открытыми множествами в $\mathbf{R}^1$ множества, которые открыты в обычном смысле и, кроме того, периодичны с периодом 1 (то есть $t \in U \Leftrightarrow t + 1 \in U$).

Определение. Множество A называют замкнутым, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств X и Y называют непрерывным относительно данных топологий, если полный прообраз любого открытого множества в Y открыт.

Для пространства X с дискретной топологией любое отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

Индуцированная топология. Пусть Y — топологическое пространство и $X \subset Y$. Тогда на множестве X можно задать топологию, считая открытыми множествами пересечения X с открытыми множествами в Y. Эту топологию называют индуцированной.

В более общей ситуации индуцированная топология определяется следующим образом. Пусть Y — топологическое пространство, $f : X \to Y$ — некоторое отображение. Индуцированной топологией на X называют множество всех полных прообразов открытых множеств в Y. (В таком случае

Рис. 1

отображение f непрерывно). Если $X \subset Y$ и f — отображение вложения, то мы получаем предыдущее определение.

Отступление о рисунках. Когда рисуется какая-то картинка, например, кривая на плоскости или поверхность в пространстве, то предполагается, что на этой кривой или поверхности берется индуцированная топология.

Задача. Пусть $X = \mathbf{R}^1$ с координатой t (на $\mathbf{R}^1$ топология не задана), $Y = T^2 = S^1 \times S^1$ с угловыми координатами φ, ψ. На торе T^2 задана стандартная топология, которая индуцируется при вложении тора в $\mathbf{R}^3$. Отображение $X \to Y$ задано формулами $\varphi(t) = \alpha t$, $\psi(t) = \beta t$. Описать индуцированную топологию на $X = \mathbf{R}^1$ в зависимости от чисел α и β.

Гомеоморфизм. Отображение $f : X \to Y$ называют гомеоморфизмом, если оно непрерывно и обладает обратным отображением, которое тоже непрерывно.

Топология занимается изучением топологических пространств и непрерывных отображений с точностью до гомеоморфизма.

Пример. Граница квадрата и окружность гомеоморфны. Рис. 1 показывает, как можно построить гомеоморфизм (точка A переходит в точку B).

Упражнение. а) Доказать, что отрезок [0,1] и интервал (0,1) в дискретной топологии гомеоморфны.

б) Доказать, что отрезок и интервал в стандартной топологии не гомеоморфны.

в) Гомеоморфны ли фигуры, изображенные на рис. 2?

Рис. 2

Отделимость. Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если у любых двух различных точек $x, y \in X$ есть непересекающиеся окрестности. (Окрестностью точки x называют любое открытое множество, содержащее x.)

Хаусдорф (1868–1942) ввел аксиоматику топологического пространства.

Топологические операции над пространствами X и Y.

Прямое произведение $X \times Y$. База топологии этого топологического пространства состоит из прямых произведений открытых множеств в X и Y.

Фактортопология. Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$, то есть в $X \times Y$ задано такое подмножество A, что

1) $(x, x) \in A$ при всех $x \in X$;

2) $(x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \in A$;

3) $(x, y), (x, z) \in A \Rightarrow (y, z) \in A$.

Тогда на множестве классов эквивалентности $X/\sim$ топология задается следующим образом. Множество U открыто тогда и только тогда, когда открыт его полный прообраз при канонической проекции $X \to X/\sim$.

Пример. $X = \mathbf{R}^1$. Отображение эквивалентности: $a \sim b \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : a = \lambda b$. При этом $X/\sim$ состоит из двух точек, одна из которых является открытым множеством, а другая — нет.

Задача. Пусть $X = \left\{ \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$. Отношение эквивалентности: $A \sim B \Leftrightarrow A = LBL^{-1}$, где L — обратимая матрица. Описать фактормножество $X/\sim$ и фактортопологию.

Надстройка. Пусть X — топологическое пространство. Надстройка $\sum X$ определяется как факторпространство $X \times I/\sim$, где I — отрезок [0,1], а отношение эквивалентности следующее:

Рис. 3

при $\lambda \neq 0,1 \quad (x,\lambda) \sim (y,\mu) \Leftrightarrow x = y, \lambda = \mu$;
$(x,1) \sim (y,1)$ при всех x, y;
$(x,0) \sim (y,0)$ при всех x, y.

Иными словами, мы берем цилиндр $X \times I$ и стягиваем в точку как его верхнее основание $X \times \{1\}$, так и его нижнее основание $X \times \{0\}$ (рис. 3).

Пример. Сфера $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ задается уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$. Можно доказать, что $\sum S^n = S^{n+1}$, в том числе и для $S^0 = \{-1, 1\}$.

Приклеивание по отображению. Пусть X и Y — топологические пространства, $A \subset X$ и $\varphi : A \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда

$$X \cup_\varphi Y = (X \cup Y) \Big/ a \sim \varphi(a);$$

имеется в виду, что точка a эквивалентна точке $\varphi(a)$, а точки вне A и вне образа φ эквивалентны только сами себе. Здесь рассматривается дизъюнктное объединение, то есть общие точки X и Y считаются различными.

Пространство $X \cup Y$ (объединение здесь в обычном смысле) можно рассматривать как X подклеенное к Y по тождественному вложению $X \cap Y$.

Джойн $\mathbf{X * Y}$. Наглядное описание пространства $X * Y$ следующее: проводим всевозможные отрезки, соединяющие точки X с точками Y, а затем берем объединение всех этих отрезков. (Отрезки не должны иметь общих внутренних точек.) Например, $S^0 * S^0 = S^1$ (рис. 4).

Формальное определение таково:

$$X * Y = X \times [-1,1] \times / \sim,$$

где отношение эквивалентности следующее:

Рис. 4

при $\lambda \neq 0 \pm 1$ точка (x, λ, y) эквивалентна только сама себе;
$(x, -1, y) \sim (x, -1, y')$ при всех x, y, y';
$(x, 1, y) \sim (x', 1, y)$ при всех x, x', y.

Гомотопия отображений. Два непрерывных отображения $f, g : X \to Y$ называются гомотопными (обозначение: $f \sim g$), если f можно непрерывно продеформировать в g в классе непрерывных отображений, то есть существует однопараметрическое семейство отображений с началом f и концом g. Формальное определение следующее: существует такое непрерывное отображение $F : X \times [0, 1] \to Y$, что $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x)$. При этом каждому $\lambda \in [0, 1]$ соответствует отображение $f_\lambda : X \to Y$, где $f_\lambda(x) = F(x, \lambda)$. Эти отображения непрерывны и они непрерывно зависят от λ.

Топология занимается задачами распознавания. Например, требуется выяснить, гомеоморфны топологические пространства Y и Y'. Для этого можно рассмотреть отображения некоторого топологического пространства X в Y и в Y' с точностью до гомотопии. Например, $X = S^1$. В таком случае получается дискретное множество классов эквивалентных отображений; его можно изучить. Если такие множества для Y и Y' окажутся разными, то Y заведомо не гомеоморфно Y'.

Фундаментальная группа. Пусть в топологическом пространстве Y выбрана точка y_0, а на окружности S^1 выбрана точка $*$. Рассмотрим множество непрерывных отображений $f : S^1 \to Y$, при которых $* \mapsto y_0$. На этом множестве есть отношение гомотопности (при этом в процессе гомотопии $* \mapsto y_0$, то есть $F(*, \lambda) = y_0$ при всех λ). Множество классов эквивалентности называют фундаментальной группой $\pi_1(Y, y_0)$. Как правило, фундаментальная группа рассматривается лишь для линейно связного Y.

Задача. 1) $\pi_1(Y, y_0)$ является группой с естественной групповой операцией.

2) $\pi_1(Y, y_0)$ в некотором смысле не зависит от y_0 для линейно связного пространства Y (то есть группы $\pi_1(Y, y_0)$ и $\pi_1(Y, y_1)$ изоморфны, хотя и этот изоморфизм не канонический — он зависит от выбора пути, соединяющего y_0 и y_1).

3) $\pi_1(Y, y_0)$ — топологический инвариант пространства Y, то есть при замене Y на гомеоморфное ему топологическое пространство фундаментальная группа заменяется на изоморфную.

Лекция 2

В определении фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ вместо отображений $S^1 \to X$ можно рассматривать отображения отрезка $[0,1]$ в X, при которых оба конца отрезка переходят в отмеченную точку x_0. Такие отображения называют петлями.

Пространством петель $\Omega(X, x_0)$ называют множество непрерывных отображений $(S^1, *) \to (X, x_0)$. Элементы фундаментальной группы соответствуют компонентам линейной связности пространства $\Omega(X, x_0$.

Свойства фундаментальной группы

(1) Если X гомеоморфно X', то множества $\pi_1(X)$ и $\pi_1(X')$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии. В самом деле, пусть $h : X \to X'$ — гомеоморфизм, $x_0 \in X$ — отмеченная точка и $x'_0 = h(x_0)$. Каждой петле $\varphi : (S^1, *) \to (X, x_0)$ сопоставляем петлю $\psi = h \circ \varphi : (S^1, *) \to (X', x'_0)$.

(2) Групповая структура. Неформально композиция двух путей определяется следующим образом: сначала проходим первый путь, а потом второй. Формальное определение таково. Пусть $\varphi, \psi : [0,1] \to X, \quad 0, 1 \mapsto x_0$. Композицией петель φ и ψ называют такую петлю $\chi = \varphi\psi$, что

$\chi(t) = \varphi(2t)$ при $0 \le t \le \frac{1}{2}$,

$\chi(t) = \psi(2t - 1)$ при $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

Если петли φ' и ψ' гомотопны петлям φ и ψ, то петля $\chi' = \psi'\varphi'$ гомотопна петле $\chi = \psi\varphi$.

Ассоциативность (с точностью до гомотопии) композиции петель очевидна.

Единичный элемент группы — класс постоянного отображения $S^1 \to x_0 \in X$. Обратный элемент — петля, проходимая в обратном направлении. Гомотопность постоянному отображению петли, пройденной сначала в одном направлении, а затем в обратном направлении, можно установить, потянув за точку $1/2$ (в процессе гомотопии эта точка не обязана отображаться в отмеченную точку x_0).

Существует ли пространство X, для которого группа $\pi_1(X)$ не единичная ?

Пример. $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$.

Доказательство этого утверждения основано на том, что пространство петель $\Omega(S^1)$ гомеоморфно пространству отображений $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}^1$, для которых $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) \in \mathbf{Z}$. Отображение $S^1 \to S^1$ мы заменяем на отображение $[0,1] \to \mathbf{R}^1$, параметризовав окружность и используя локальную координату на окружности — аргумент (локально обратное отображение к отображению $\alpha \mapsto e^{2\pi i \alpha}$). Мы полагаем $\varphi(0) = 0$, а значение $\varphi(1)$ должно отличаться от $\varphi(0)$ на целое число.

Пусть $\varphi(1) = i$. Тогда для любой гомотопной петли получим то же самое число i. В самом деле, в процессе гомотопии число i должно изменяться непрерывно, но число i целое, поэтому оно не изменяется.

Множество всех петель с одним и тем же индексом i линейно связно, то есть все петли гомотопны. Действительно, для функции φ и φ_1 с индексом i можно рассмотреть функцию $\lambda\varphi + (1-\lambda)\varphi_1$. Эта функция соответствует петле с индексом i. Семейство функций $\lambda\varphi + (1-\lambda)\varphi_1$ представляет собой гомотопию, связывающую φ и φ_1.

Задача. Вычислить $\pi_1(S^n)$ при $n \geq 2$.

Для распознавания топологических пространств X и X' можно выбрать модельное множество A и рассмотреть множество классов отображений $[A, X]$ с точностью до гомотопии. В зависимости от конкретной задачи иногда бывает удобно выбрать в A подмножество B и считать, что отображение $B \to X$ фиксировано.

Пусть фиксированы точки $a_0 \in A$ и $x_0 \in X$. Множество классов гомотопически эквивалентных отображений $A \to X$, переводящих a_0 в x_0, обозначают $\Pi(A, X)$. Множество $\Pi(S^n, X)$ имеет специальное обозначение $\pi_n(X)$.

Покажем, что на множестве $\pi_n(X)$ можно ввести групповую структуру. (Группу $\pi_n(X)$ называют n-мерной гомотопической группой или n-й гомотопической группой.)

Упражнение. Пусть B^n — n-мерный диск (шар) с границей S^{n-1}. Тогда B^n/S^{n-1} гомеоморфно S^n.

Пусть заданы отображения $\varphi, \psi : S^n \to X$. Требуется определить их композицию $\psi\varphi : S^n \to X$. Рассечем сферу S^n, заданную уравнением $x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, экваториальной плоскостью $x_0 = 0$. Можно считать, что отмеченная точка лежит в экваториальной плоскости. Отображение $\psi\varphi : S^n \to X$ устроено следующим образом.

Нижняя половина сферы представляет собой диск B^n. После факторизации диска по экваториальной сфере S^{n-1} получаем сферу S^n. Эту сферу отображаем в X по правилу φ (экваториальная сфера отображается при этом в отмеченную точку). На верхней половине сферы отображение задаем по правилу ψ (рис. 1). Полученное отображение непрерывно, потому что отображения φ, ψ согласованы на том множестве, на котором они оба определены. А именно, экваториальную сферу S^{n-1} они отображают в отмеченную точку.

Рис. 1

Задача. Доказать, что определенная выше композиция превращает $\pi_n(X)$ в группу.

Отображение $S^n \to X$ называют n-мерным сфероидом.

Теорема. При $n > 1$ группа $\pi_n(X)$ коммутативна.

Доказательство проведем для наглядности при $n = 2$. В этом случае отображение $\psi\varphi : S^2 \to X$ можно представить как отображение $B^2 \to X$, где B^2 состоит из двух полудисков и на одном полудиске задано отображение φ (рис. 2); граница каждого полудиска отображается в отмеченную точку x_0. Будем вращать разделяющий полудиски диаметр (рис. 3). После поворота на π отображения φ и ψ поменяются местами. Таким образом, получаем однопараметрическое семейство отображений, связывающее отображения $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$.

При $n > 2$ доказательство точно такое же.

Получаем набор топологических инвариантов $\pi_n(X)$; у гомеоморфных пространств гомотопические группы изоморфны. Множества $\Pi(A, X)$ — более общий набор топологических инвариантов. Но если $\Pi(A, X)$ — просто множество, без какой-либо алгебраической структуры, то это очень слабый инвариант.

Задача на будущее. Для каких A на множестве $\Pi(A, X)$ при любом X есть естественная групповая структура? (Частичный ответ: если $A = \sum B$, то $\Pi(A, X)$ — группа, а если $A = \sum\sum C$, то эта группа абелева.)

Можно предъявить негомеоморфные топологические пространства, которые не различаются инвариантами $\Pi(X, A)$ и $\Pi(A, X)$. Во многих ситуациях полезнее другое отношение эквивалентности: не гомеоморфность, а гомотопическую эквивалентность.

Рис. 2

Рис. 3

Определение. Топологические пространства X и X' называют гомотопически эквивалентными, если существуют такие непрерывные отображения $f : X \to X'$ и $g : X' \to X$, что их композиции fg и gf гомотопны тождественным отображениям. Отображения f и g называют при этом гомотопической эквивалентностью.

Пример. Цилиндр $I \times S^1$ и окружность S^1 гомотопически эквивалентны. Отображение $f : S^1 \to I \times S^1$ задается как гомеоморфизм $f : S^1 \to \{0\} \times S^1 \subset I \times S^1$, а отображение $g : I \times S^1 \to S^1$ задается как композиция проекции цилиндра на нижнее основание $\{0\} \times S^1$ и гомеоморфизма f^{-1} (рис. 4).

Утверждение. Если топологические пространства X и X' гомотопически эквивалентны, то их гомотопические группы изоморфны, а множества $\Pi(A, X)$ и $\Pi(A, X')$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.

Рис. 4