Гомотопические группы и расслоения

Часть 1. Гомотопические группы

Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой. Отображения $f \in C_b(S^n, X)$ называются сфероидами (отмеченной точкой на сфере S^n будем считать точку $(1, 0, \ldots, 0)$). Рассмотрим множество $\pi_n(X) = \pi_b(S^n, X)$ гомотопических классов сфероидов.

Пример 1.1. Имеем $\pi_0(X) = \{$ множество компонент линейной связности пространства $X\}$. В самом деле, $C_b(S^0, X) = X$, а гомотопность — это возможность связать точки путем.

Лемма 1.2. *Имеем $\pi_n(X) = \pi_b(I^n/\partial I^n, X)$. Иначе говоря, это множество гомотопических классов отображений n-мерного куба, переводящих его границу в отмеченную точку.*

Доказательство: имеем $I^n/\partial I^n \cong D^n/S^{n-1} \cong S^n$. □

Лемма 1.3. *При $n \geqslant 1$ множество $\pi_n(X)$ обладает структурой группы.*

Доказательство: стягивание экватора превращает сферу в букет двух сфер. Определим произведение сфероидов, как композицию этого стягивания с букетом сфероидов. Формально

$$(f \cdot g)(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(1 - 2x_n, 2\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}x_0, \ldots, 2\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}x_{n-1}), & \text{при } x_n \geqslant 0, \\ g(1 + 2x_n, 2\sqrt{\frac{-x_n}{1-x_n}}x_0, \ldots, 2\sqrt{\frac{-x_n}{1-x_n}}x_{n-1}), & \text{при } x_n \leqslant 0. \end{cases}$$

На «языке кубов» операция записывается проще:

$$(f \cdot g)(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, 2x_n), & \text{при } x_n \leqslant 1/2, \\ g(x_1, \ldots, 2x_n - 1), & \text{при } x_n \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Проверка того, что эта операция задает структуру группы элементарно производится на языке кубов. □

Группа $\pi_n(X)$ называется n-ой гомотопической группой топологического пространства X, а группа $\pi_1(X)$ — его фундаментальной группой.

Пример 1.4. Опишем фундаментальную группу более явно. Пусть $\alpha, \beta : I \to X$ — такие пути, что конец α совпадает с началом β. Определим путь $\beta \circ \alpha : I \to X$ формулой

$$(\beta \circ \alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{при } t \leqslant 1/2, \\ \beta(2t - 1), & \text{при } t \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Ясно, что гомотопический класс результата зависит только от классов путей, и что операция ассоциативна.

Лемма 1.5. *При $n \geqslant 2$ группа $\pi_n(X)$ коммутативна.*

Доказательство: воспользуемся языком кубов. Куб размерности $n \geqslant 2$ раскладывается в произведение квадрата на $(n-2)$-мерный куб. Пусть к левой половине квадрата применяется f, а к правой — g. Произведем гомотопию в 3 этапа. Вначале постепенно сожмем левую и правую половину квадрата до достаточно маленьких размеров, отобразив оставшиеся точки квадрата в отмеченную точку пространства X. Затем передвинем левый участок вправо, а правый влево. Наконец, постепенно увеличим их до половин квадрата. □

Лемма 1.6. *Для всех $n \geqslant 1$ сопоставление $X \mapsto \pi_n(X)$ является* функтором *из гомотопической категории в категорию групп.*

Доказательство: пусть $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение. Определим $\varphi_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ формулой

$$\varphi_*(f) = \varphi \circ f.$$

Так как $f \sim g$ влечет $\varphi_*(f) \sim \varphi_*(g)$, а $\varphi \sim \psi$ влечет $\varphi_*(f) \sim \psi_*(f)$, то получаем корректное отображение $\pi_b(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X), \pi_n(Y))$. То, что φ_* — гомоморфизм групп, очевидно следует из определения умножения в гомотопических группах. И, наконец, равенство $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ тоже очевидно. □

Следствие 1.7. *Гомотопические группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Следствие 1.8. *Гомотопические группы стягиваемого пространства тривиальны.*

Пусть X° — компонента линейной связности отмеченной точки пространства X. Ясно, что

Лемма 1.9. *Включение $X^\circ \to X$ индуцирует изоморфизм $\pi_n(X^\circ) \cong \pi_n(X)$ при $n \geqslant 1$.*

Пусть $\alpha : I \to X$ — путь из x_0 в x_1. Выберем гомотопическую эквивалентность $\varphi : S^n \to S^n \vee I$ («вытягивание хвостика») и определим отображение $\alpha_\# : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$ формулой

$$\alpha_\#(f) = (f \vee \alpha) \circ \varphi.$$

Лемма 1.10. *Отображение $\alpha_\#$ является изоморфизмом групп и зависит только от гомотопического класса пути α. Если α — петля, то отображение $\alpha \mapsto \alpha_\#$ задает действие фундаментальной группы на $\pi_n(X)$. При $n = 1$ — это действие сопряжениями.*

Доказательство: корректность, зависимость только от гомотопического класса пути α и гомоморфность отображения $\alpha_\#$ проверяются так же как и в лемме 1.6. Из согласованности с умножением путей следует $(\beta \circ \alpha)_\#(f) = \beta_\#(\alpha_\#(f))$, значит, $\alpha_\#$ — изоморфизм и мы получаем действие $\pi_1(X)$ на $\pi_n(X)$. Наконец, в случае $n = 1$ имеем явную формулу $\alpha_\#(f) = \alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$, что для петли α как раз и является сопряжением. □

Часть 2. Расслоения

Определение 2.1. Морфизм $p : E \to B$ называется расслоением в смысле Гуревича, если для него выполняется свойство накрывающей гомотопии (CHP)

(CHP) *если $\tilde{g} : Z \to E$ — непрерывно, а $G : Z \times I \to B$ — гомотопия, такая что $G(z, 0) = p(\tilde{g}(z))$, то существует гомотопия $\widetilde{G} : Z \times I \to E$, такая что $p(\widetilde{G}(z, t)) = G(z, t)$ и $\widetilde{G}(z, 0) = \tilde{g}(z)$:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

Пространство B называется базой расслоения p, а пространство E — его тотальным пространством.

Напомним, что морфизм $p : E \to B$ называется локально тривиальным расслоением со слоем F, если всякая точка базы B обладает окрестностью $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$, коммутирующий с проекциями на U.

Пример 2.2. Проекция ленты Мебиуса на среднюю окружность — локально тривиальное расслоение.

Теорема 2.3. *Локально тривиальное расслоение является расслоением в смысле Гуревича.*

Мы докажем свойство (CHP) для локально тривиальных расслоений только для $Z = I^n$.

Лемма 2.4. *Любое локально тривиальное расслоение над кубом I^n тривиально.*

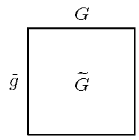
Доказательство: пусть $E \to I^n$ — такое расслоение. Из локальной тривиальности и компактности куба следует, что если разбить куб на M^n кубиков $I_1^n, \dots, I_{M^n}^n$ с длиной стороны $1/M$, то над каждым из них расслоение тривиально. Остается проверить, что если $I^n = I_1^n \cup I_2^n$, так что $I_1^n \cap I_2^n = I^{n-1}$, то из тривиальности расслоения над I_1^n и I_2^n следует его тривиальность над I^n. Действительно, пусть $\varphi_1 : p^{-1}(I_1^n) \to I_1^n \times F$ и $\varphi_2 : p^{-1}(I_2^n) \to I_2^n \times F$ — тривиализации. Определим $f : I^{n-1} \times F \to F$ формулой $(x, f(x, y)) = \varphi_1(\varphi_2^{-1}(x, y))$, выберем неподвижную на I^{n-1} проекцию $\pi : I_2^n \to I^{n-1}$, определим $g : I_2^n \times F \to I_2^n \times F$ формулой $g(x, y) = (x, f(\pi(x), y))$ и положим $\varphi_2'(x, y) = g \circ \varphi_2 : p^{-1}(I_2^n) \to I_2^n \times F$. Ясно, что φ_2' — гомеоморфизм, который склеивается с φ_1 до тривиализации на всем I^n. □

Пусть теперь Z — куб. Рассмотрим $E' = \{\, (z, t, e) \in Z \times I \times E \mid G(z, t) = p(e) \,\}$, вложение $\tilde{g}' : Z \to E'$, $z \mapsto (z, 0, \tilde{g}(z))$ и проекции $\xi : E' \to E$, $(z, t, e) \mapsto e$, $p' : E' \to Z \times I$, $(z, t, e) \mapsto (z, t)$. Ясно, что p' — локально тривиальное расслоение (для точки $(z, t) \in Z \times I$ выберем окрестность U точки $G(z, t) \in B$ и тривиализацию $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ и зададим $\varphi' : G^{-1}(U) \to {p'}^{-1}(G^{-1}(U)) \to G^{-1}(U) \times F$ формулой $\varphi'(z, t, e) = (z, t, p_F \circ \varphi(e))$, где $p_F : U \times F \to F$ — проекция). Так как $Z \times I$ — куб, то p' тривиально. Выберем тривиализацию $\Phi : E' \to Z \times I \times F$ и определим $\widetilde{G}' : Z \times I \to E'$, $(z, t) \mapsto \Phi^{-1}(z, t, p_F(\Phi(\tilde{g}'(z))))$. Тогда $\widetilde{G} = \xi \circ \widetilde{G}' : Z \times I \to E$ — искомая гомотопия. □

Пусть B — топологическое пространство. Положим $E = C(I, B)$, $p(f) = f(1)$.

Лемма 2.5. *Морфизм $p : E \to B$ является расслоением в смысле Гуревича.*

Доказательство: заметим, что $C(Z, C(I, B)) = C(Z \times I, B)$ и $C(Z \times I, C(I, B)) = C(Z \times I \times I, B)$. Фактически, перед нами задача: продолжить функцию, определенную на верхней и левой стороне квадрата до функции $\widetilde{G}$, определенной на всем квадрате. Кроме того, удобно потребовать, чтобы эта функция была постоянной на нижней стороне. Добиться этого можно, например, так:



$$\widetilde{G}(z,t)(\tau) = \begin{cases} \tilde{g}(z)(\tau(1+t)), & \text{при } \tau(1+t) \leqslant 1, \\ G(z, \tau(1+t) - 1), & \text{при } \tau(1+t) \geqslant 1. \end{cases}$$

□

Будем говорить, что отображения $f : X \to Y$ и $f_1 : X_1 \to Y_1$ гомотопически эквивалентны, если существуют гомотопические эквивалентности $\varphi : X_1 \to X$ и $\psi : Y_1 \to Y$, такие что $f \circ \varphi \sim \psi \circ f_1$ (иначе говоря, морфизмы эквивалентны в гомотопической категории).

Лемма 2.6. *Всякое отображение гомотопически эквивалентно расслоению.*

Доказательство: положим $Y_1 = Y$, $X_1 = \{\, (x, s) \in X \times C(I, Y) \mid s(0) = f(x) \,\}$, и определим $f_1(x, s) = s(1)$, $\varphi(x, s) = x$, $\psi = \mathrm{Id}_Y$. То, что f_1 является расслоением доказывется аналогично лемме 2.5: если $h : Z \to X$ — отображение, такое что $f(h(z)) = \tilde{g}(z, 0)$, то определим $H : Z \times I \to X$ формулой $H(z, t) = h(z)$. То, что ψ — гомотопическая эквивалентность — очевидно. Покажем, что φ — гомотопическая эквивалентность. Определим $\phi : X \to X_1$ формулой $\phi(x) = (x, s_x)$, где $s_x(t) \equiv x$ — постоянный путь. Тогда $\varphi \circ \phi = \mathrm{Id}_X$, а $\phi \circ \varphi(x, s) = (x, s_x)$. Определим гомотопию $\Phi : X_1 \times I \to X_1$ формулой $\Phi((x, s(\tau)), T) = (x, s(\tau T))$. □

Лемма 2.7. *Все слои расслоения $p : E \to B$ с линейно связной базой гомотопически эквивалентны.*

Доказательство: рассмотрим точки $x, y \in B$ и соединим их путем $s \in E(B; x, y)$. Пусть $F_x = p^{-1}(x)$, $F_y = p^{-1}(y)$. Возьмем $Z = F_x$,

$$\tilde{g}(z) = z, \qquad G(z, t) = s(t),$$

выберем накрывающую гомотопию $\widetilde{G} : F_x \times I \to E$ и положим $\varphi(z) = \widetilde{G}(z, 1)$. Тогда $p(\varphi(z)) = p(\widetilde{G}(z, 1)) = G(z, 1) = s(1) = y$, то есть $\varphi : F_x \to F_y$. Аналогично, возьмем $Z' = F_y$,

$$\tilde{g}'(z) = z, \qquad G'(z, t) = s(1 - t),$$

выберем накрывающую гомотопию $\widetilde{G}' : F_x \times I \to E$ и положим $\varphi'(z) = \widetilde{G}'(z, 1)$. Ясно, что $\varphi' : F_y \to F_x$. Покажем, что $\varphi' \circ \varphi \sim \mathrm{Id}_{F_x}$. Положим $Z^* = F_x \times I$,

$$\tilde{g}^*(z, t) = \begin{cases} \widetilde{G}(z, 2t), & \text{при } t \leqslant 1/2, \\ \widetilde{G}'(\varphi(z), 2t - 1)), & \text{при } t \geqslant 1/2; \end{cases} \qquad G^*(z, t, \tau) = \begin{cases} s(2t(1 - \tau)), & \text{при } t \leqslant 1/2, \\ s(2(1 - t)(1 - \tau)), & \text{при } t \geqslant 1/2; \end{cases}$$

и выберем накрывающую гомотопию $\widetilde{G}^* : F_x \times I \times I \to E$. Обозначим через J объединение левой, верхней и правой сторон квадрата $I \times I$. Заметим, что

$$p(\widetilde{G}^*(z, 0, \tau)) = G^*(z, 0, \tau) = s(0), \quad p(\widetilde{G}^*(z, 1, \tau)) = G^*(z, 1, \tau) = s(0), \quad p(\widetilde{G}^*(z, t, 1)) = G^*(z, t, 1) = s(0),$$

а $s(0) = x$. Значит $\widetilde{G}^*$ отображает $F_x \times J$ в F_x. С другой стороны,

$$\widetilde{G}^*(z, 0, 0) = \tilde{g}^*(z, 0) = \widetilde{G}(z, 0) = \tilde{g}(z, 0) = z, \qquad \widetilde{G}^*(z, 1, 0) = \tilde{g}^*(z, 1) = \widetilde{G}'(\varphi(z), 1) = \varphi'(\varphi(z)),$$

а J гомеоморфно отрезку, поэтому $\widetilde{G}^*_{F_x \times J}$ осуществляет искомую гомотопию.

Аналогично проверяется, что $\varphi \circ \varphi' \sim \mathrm{Id}_{F_y}$. □

Определение 2.8. Гомотопическим слоем отображения $f : X \to Y$ называется слой гомотопически эквивалентного ему расслоения.

Пример 2.9. Пусть $X = *$, Y — любое, $f(*) = y_0 \in Y$. Тогда $X_1 = \{\, s \in C(I, Y) \mid s(0) = y_0 \,\} = E(Y; y_0)$, а $p^{-1}(y_0) = \{\, s \in E(Y; y_0) \mid s(1) = y_0 \,\} = \Omega(Y; y_0)$. Таким образом, гомотопический слой отображения из точки — это пространство петель.