Задачи по топологии к 5 ноября 2004 г.

1. Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ называется слабой эквивалентностью, если $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ — изоморфизм при всех n. Докажите, что если $f : X \to Y$ — слабая эквивалентность, то
a) для любого клеточного протранства Z отображение $f_* : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$ — биекция;
b) отображение $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ — изоморфизм для всех n;
c) отображение $f^* : H^n(Y) \to H^n(X)$ — изоморфизм для всех n;
d) если X и Y — клеточные пространства, то f — гомотопическая эквивалентность.

2. Докажите стягиваемость односвязного клеточного пространства с тривиальными
a) гомотопическими группами; b) группами гомологий; c) группами когомологий.

3. Покажите, что следующие пары пространств имеют одинаковые гомотопические группы, но гомотопически не эквивалентны: a) S^2 и $S^3 \times \mathbb{CP}^\infty$; b) $S^m \times \mathbb{RP}^n$ и $\mathbb{RP}^m \times S^n$ (при $m \neq n$).
c) Докажите, что любые два пространства типа $K(\pi, n)$ слабо эквивалентны.

4. Докажите, что a) для всякого топологического пространства X найдется клеточное пространство Y и слабая эквивалентность $f : Y \to X$ (пара (Y, f) называется клеточной аппроксимацией пространства X); (Указание: постройте Y последовательно приклеивая клетки.)
b) если $g : Z \to X$ — еще одна слабая эквивалентность, то найдется единственное с точностью до гомотопии отображение $h : Y \to Z$, такое что $g \circ h \sim f$;
c) клеточная аппроксимация единственна с точностью до гомотопической эквивалентности.
d) Выведите отсюда теорему единственности для гомологий и когомологий (Указание: покажите, что гомологии и когомологии произвольного пространства обязаны совпадать с клеточными гомологиями и когомологиями его клеточной аппроксимации).

5. Докажите, что
a) $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$;
b) $S^1 \vee \cdots \vee S^1 = K(F_n, 1)$ (F_n — свободная группа);
c) $\mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$;
d) $\mathbb{RP}^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$;
e) (линзовое пространство) $L^\infty_m = S^\infty/\mathbb{Z}_m$ (группа $\mathbb{Z}_m$ действует покоординатным умножением на $e^{2\pi i/m}$) имеет тип $K(\mathbb{Z}_m, 1)$;
f) $K(\pi_1, n) \times K(\pi_2, n) = K(\pi_1 \times \pi_2, n)$;
g) $\Omega K(\pi, n) = K(\pi, n-1)$.

6. a) Найдите фундаментальную группу всех классических поверхностей.
b) Покажите, что всякая классическая поверхность кроме S^2 и $\mathbb{RP}^2$ есть пространство $K(\pi, 1)$.

7. Докажите, что $\Omega\mathbb{CP}^\infty \sim S^1$.

8. Пусть $\alpha \in \pi_1(X)$. Докажите, что $h \circ \alpha_\# = h$, где h — гомоморфизм Гуревича.

9. (Теория препятствий.) Пусть X, Y — пространства (X — клеточное), а $f, g : \mathrm{sk}_n X \to Y$ — отображения, совпадающие на $\mathrm{sk}_{n-1} X$. Определим $c_f \in \mathcal{C}^{n+1}(X, \pi_n(Y))$ и $d_{f,g} \in \mathcal{C}^n(X, \pi_n(Y))$ формулами

$$c_f(\alpha) = f \circ \chi_{\alpha|S^n} : S^n = \partial D^n \to Y, \qquad d_{f,g}(\alpha) = (f \circ \chi_\alpha) \cup_{S^{n-1}} (g \circ \chi_\alpha) : S^n = D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \to Y.$$

Докажите, что
a) $\delta c_f = 0$;
b) любая коцепь $d \in \mathcal{C}^n(X, \pi_n(Y))$ реализуется как $d_{f,g}$ для любого f;
c) $\delta d_{f,g} = c_g - c_f$;
d) класс c_f в $H^{n+1}(X, \pi_n(Y))$ зануляется $\iff$ f можно продолжить на $\mathrm{sk}_{n+1} X$, подправив на $\mathrm{sk}_n X \setminus \mathrm{sk}_{n-1} X$.
e) если f и g определены на $\mathrm{sk}_{n+1} X$, то $\delta d_{f,g} = 0$ и класс $d_{f,g}$ в $H^n(X, \pi_n(Y))$ зануляется $\iff$ $f_{|\mathrm{sk}_n X}$ и $g_{|\mathrm{sk}_n X}$ можно соединить гомотопией, неподвижной на $\mathrm{sk}_{n-2} X$.

10. Пусть G — абелева группа. Докажите, что
a) $H_n(K(G, n)) = G$;
b) $H^n(K(G, n), G) = \mathrm{Hom}(G, G)$.
c) Пусть X — клеточное пространство. Сопоставим отображению $f : X \to K(G, n)$ класс $f^* 1_G \in H^n(X, G)$, где $1_G \in \mathrm{Hom}(G, G) = H^n(K(G, n), G)$. Докажите, что $f \mapsto f^* 1_G$ — биекция $\pi(X, K(G, n)) \cong H^n(X, G)$[1].

[1] Таким образом, пространства $K(G, n)$ двойственны к сферам, а когомологии — к гомотопическим группам.