Анализ, листок 1 (осень 2007, 3 семестр)

Многообразия

1. Покажите, что всякое связное многообразие линейно связно.

2. Покажите, что фундаментальная группа всякого многообразия не более чем счетна.

3. Обозначим однородные координаты на $\mathbb{RP}^2$ через $(x_0 : x_1 : x_2)$. Формула

$$\varphi\colon (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$$

задает отображение из $\mathbb{RP}^2 \setminus B$ в $\mathbb{RP}^2$, где $B \subset \mathbb{RP}^2$ — некоторое конечное множество (какое именно?). Найдите ранги отображения φ во всех точках из $\mathbb{RP}^2 \setminus B$.

4. Отображение $\varphi\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^4$ задано формулой

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_0x_2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Найдите ранги отображения φ во всех точках $\mathbb{RP}^2$.

5. Пусть E — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $0 < k < l < \dim E$. Положим

$$F = \{(\alpha, \beta) \in G(k, E) \times G(l, E) \mid V_\alpha \subset V_\beta\}.$$

Покажите, что F — замкнутое подмногообразие в $G(k, E) \times G(l, E)$.

6. Пусть $0 < k < n$. Покажите, что множество вещественных $n \times n$-матриц ранга k обладает естественной структурой гладкого многообразия.

7*. Докажите, что всякое гладкое связное одномерное многообразие диффеоморфно либо $\mathbb{R}$, либо окружности.