Анализ, листок 2 (осень 2007, 3 семестр)

Касательные векторы и векторные поля

1. На $\mathbb{RP}^2$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ зададим локальные координаты $(u_1, u_2) = (x_1/x_0, x_2/x_0)$, $(v_1, v_2) = (x_0/x_1, x_2/x_1)$ и $(w_1, w_2) = (x_0/x_2, x_1/x_2)$. Выразите векторные поля $\partial/\partial u_1$ и $\partial/\partial u_2$ в двух других координатных системах.

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ единичную сферу $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Точки $(0, 0, \pm 1)$ назовем полюсами. Рассмотрим на S^2 с удаленными полюсами векторные поля X и Y, заданные следующим образом. Поле X состоит из векторов длины 1, касательных к меридианам (в направлении с севера на юг), а поле Y состоит из векторов длины 1, касательных к параллелям (в восточном направлении).

а) Запишите поля X и Y, выбрав в качестве локальных координат широту и долготу.

б) Найдите коммутатор $[X, Y]$.

3. На единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ заданы следующие векторные поля X и Y. В поле X к точке (x_1, x_2, x_3, x_4) приложен вектор $(x_2, -x_1, x_4, -x_3)$, а в поле Y к той же точке приложен вектор $(x_3, x_4, -x_1, -x_2)$. Найдите коммутатор $[X, Y]$.

4. а) На $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) рассмотрим векторное поле $X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$; существует ли на $\mathbb{R}^2$ непостоянная функция f, для которой $X_1 f = 0$?

б) Тот же вопрос для поля $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

5. Пусть X — многообразие и $Y \subset X$ — его замкнутое подмногообразие (это обобщение понятия гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ — сформулируйте определение самостоятельно). Докажите, что если два векторных поля на X касаются Y, то и их коммутатор касается Y.

6. Постройте на нечетномерной сфере S^{2n+1} векторное поле, нигде не обращающееся в нуль (на четномерной сфере это, как известно, невозможно).

7. Обозначим через $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ естественное отображение, переводящее $(x_0, \ldots, x_n)$ в $(x_0 : \ldots : x_n)$. Для всякой вещественной $(n+1) \times (n+1)$-матрицы $\|a_{ij}\|$ рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ векторное поле $V_A = \sum a_{ij} x_j (\partial/\partial x_j)$.

а) Покажите, что если $\pi(p) = \pi(q)$, то $\pi'(V_A(p)) = \pi'(V_A(q))$.

б) Ввиду пункта (а), поле V_A опускается до поля v_A на $\mathbb{RP}^n$. Опишите множество его нулей.

в) Найдите коммутатор полей v_A и v_B.

Подумайте также, как эта задача связана с задачей 6.