Анализ, листок 3 (осень 2007, 3 семестр)

Фазовые потоки; разбиение единицы

1. Для каждого из векторных полей X и Y из задачи 2 листка 2 выясните, задает ли это поле глобальный фазовый поток на сфере с двумя проколами; если таковой существует, записать его явно.

2. Решите на $\mathbb{R}$ дифференциальное уравнение $x' = x^k$ для всевозможных целых $k \geqslant 0$.

3. На $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$, состоящем из точек с однородными координатами $(1 : u_1 : u_2)$, рассмотрим, для всякого целого $k \geqslant 0$, векторное поле $x^k \frac{\partial}{\partial x}$. Выясните, при каких k это поле продолжается на все $\mathbb{RP}^2$; в тех случаях, когда оно продолжается, выпишите соответствующий глобальный фазовый поток. (*Указание.* Суждение о непродолжаемости можно сделать, не переходя к новым координатам.)

4. Пусть X — связное гладкое многообразие, $p, q \in X$. Докажите, что существует диффеоморфизм $\varphi\colon X \to X$, переводящий p в q.

5. Пусть X — связное многообразие, и пусть $F_1, F_2 \subset X$ — его непересекающиеся замкнутые подмножества. Покажите, что существует гладкая функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, для которой $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in X$, и при этом φ тождественно равна нулю на F_1 и тождественно равна единице на F_2. (*Указание.* $(X \setminus F_1) \cup (X \setminus F_2)$ — открытое покрытие.)

6. Пусть X — гладкое многообразие и $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие. Докажите, что всякую гладкую функцию на Y можно продолжить до гладкой функции на X.