Произведения проективных пространств

Везде, где не оговорено противное, основным полем можно считать поле $\mathbb{C}$.

Определение. *Вложением Сегре* называется естественное отображение $\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(W)\to\mathbb{P}(V\otimes W)$.

А7.1. **а)** Докажите, что вложение Сегре отождествляет $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ с квадрикой в $\mathbb{P}^3$.

б) Убедитесь, что диагональ $\mathbb{P}^1\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ при вложении Сегре переходит в скрученную кубику.

А7.2. Докажите, что отображение Сегре действительно является вложением, и задайте его образ уравнениями.

Это позволяет считать произведение проективных пространств — а следовательно, и произвольных проективных многообразий — проективным многообразием.

Грассманианы

А7.3. Пусть $Gr_k(V)$ — множество k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства V. Напомним[1], что отображение

$$\langle e_1,\ldots,e_k\rangle\mapsto e_1\wedge\ldots\wedge e_k$$

задает *вложение Плюккера* $Gr_k(V)\to\mathbb{P}(\Lambda^kV)$.

А7.4. Докажите, что вложение Плюккера отождествляет пространство $Gr_{2,4}$ прямых в $\mathbb{P}^3$ с *квадрикой Клейна* $p_{01}p_{23}-p_{02}p_{13}+p_{03}p_{12}=0$ в $\mathbb{P}^5$. (Можно вспомнить здесь задачи 7.3 и 7.4 первого семестра.)

А7.5. **а)** Убедитесь, что две прямые в $\mathbb{P}^3$ пересекаются тогда и только тогда, когда через соответствующие две точки на квадрике Клейна проходит прямая.

б) Проверьте, что как множество прямых в $\mathbb{P}^3$, проходящих через данную точку, так и множество прямых в $\mathbb{P}^3$, лежащий в данной плоскости, переходят в плоскость на квадрике Клейна.

в) Докажите, что любая плоскость на квадрике Клейна получается одним из двух описанных выше способов.

А7.6. **а)** Докажите, что грассманов многочлен w делится на вектор v тогда и только тогда, когда $v\wedge w=0$.

б) Докажите, что вложение Плюккера действительно является вложением, и задайте его образ уравнениями.

Это позволяет считать многообразия Грассмана $Gr_{k,n}$ проективными алгебраическими многообразиями.

А7.7*. Пусть X — восьмиэлементное множество. Будем рассматривать совокупность V его четноэлементных подмножеств с точностью до замены на дополнительное как шестимерное векторное пространство над $\mathbb{F}_2$.

а) Проверьте, что все четырёхэлементные подмножества множества X образуют квадрику Клейна в $\mathbb{P}(V)$.

б) Убедитесь, что действие группы S_8 перестановками элементов множества X сохраняет эту квадрику и переводит лежащие на ней плоскости в плоскости.

в) Докажите, что группы A_8 и $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$ изоморфны.

---

[1] См. задачу 7.3 первого семестра.