27 прямых на кубической поверхности

A8.1. Пусть 4 прямые в $\mathbb{P}^3$ не лежат на гладкой квадрике. Сколько существует пересекающих всех их прямых?

Везде далее S — неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

A8.2. Докажите, что

а) плоское сечение поверхности S является либо кубикой, либо объединением коники и прямой, либо 3 прямыми;

б) через любую точку поверхности S проходит не более 3 прямых и все они лежат в одной плоскости.

A8.3*. Докажите, что на поверхности S лежит хотя бы одна прямая.

Утверждением последней задачи можно далее пользоваться без доказательства.

A8.4. Пусть $l \subset S$ — прямая. Докажите, что

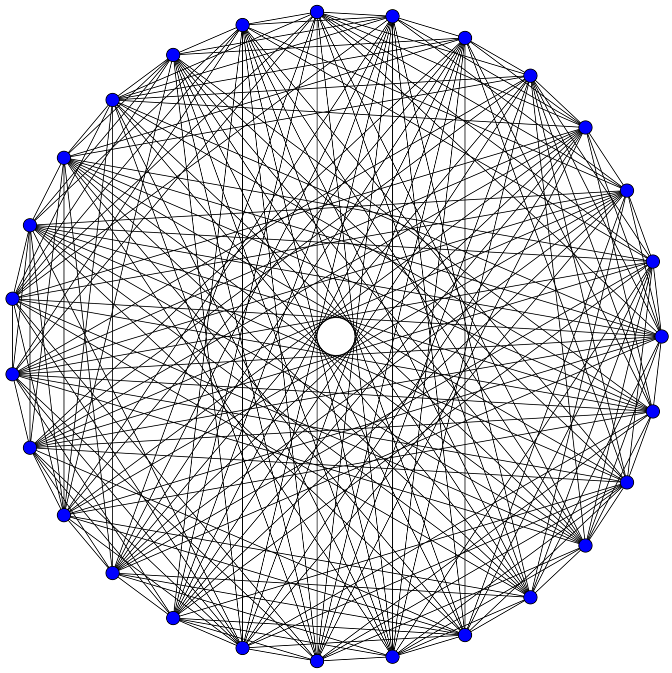
а) в пучке плоскостей, содержащих прямую l, имеется ровно 5 различных плоскостей, пересекающих поверхность S еще по двум прямым, l_i и l'_i $(i = 1, \ldots, 5)$;

б) прямые, высекаемые различными плоскостями, не пересекаются;

в) любая другая прямая пересекает ровно одну прямую из пары $\{l_i, l'_i\}$.

A8.5. Докажите, что, кроме 11 прямых из задачи 3, на поверхности S лежит еще ровно 16 прямых (каждая из них пересекает нечетное число из прямых $l_1, \ldots, l_5$).

A8.6. Найдите 27 прямых на *поверхности Ферма* $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$.



Граф пересечения 27 прямых