10. Многомерная геометрия и реализуемость гиперграфов*

Задача Дня. *Линейная теорема Ван Кампена–Флореса.* Из любых 7 точек в 4-мерном пространстве можно выбрать две непересекающиеся тройки, такие что два треугольника с вершинами в этих тройках пересекаются.

Подмножество плоскости называется *выпуклым*, если оно содержит вместе с любыми двумя точками соединяющий их отрезок. *Выпуклой оболочкой* множества X называется наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее X. В этом цикле задач под *треугольником* понимается выпуклая оболочка 3 точек, т.е., треугольникам разрешается вырождаться. Набор точек на плоскости называется набором *общего положения*, если ни какие 3 из них не лежат на одной прямой. Под n точками на плоскости подразумевается n-элементное подмножество плоскости. Т.е., считается, что эти n точек различны. Такое же соглашение касается 3- и 4-мерного пространства.

10.1. (a) Существуют такие 4 точки на плоскости, что для любого их разбиения на две пары отрезок, соединяющий точки в первой паре, не пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.
(b) Любые 4 точки на плоскости можно разбить на две группы так, что выпуклая оболочка точек первой группы пересекает выпуклую оболочку точек второй группы.
(c) Из любых 5 точек на плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.
(d) Если эти 5 точек находятся в общем положении, то количество таких (неупорядоченных) пар нечетно.
(e) Даны две тройки точек на плоскости. Тогда существуют два пересекающихся отрезка, не имеющие общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если ни какие 4 из них не лежат в одной плоскости. Треугольники Δ и Δ' в пространстве, шесть вершин которых находятся в общем положении, называются зацепленными, если контур Δ пересекает внутренность Δ' в единственной точке. Плоскость находится в *общем положении* относительно набора точек в пространстве, если ортогональные проекции точек набора на плоскость находятся в общем положении.

10.2. (a) Дана проекция пары треугольников на плоскость общего положения (относительно вершин треугольников), причем в местах пересечения двух линий показано, какая из них проходит выше. Треугольники зацеплены, если и только если количество точек пересечения их проекций, в которых первый проходит над вторым, нечетно.
(b) Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовем *разбиением* неупорядоченную пару треугольников с вершинами в этих точках, не имеющих общих вершин. Тогда количество зацепленных разбиений нечетно.
(c) *Линейная теорема Конвея–Гордона–Закса.* Для любых 6 точек общего положения в пространстве найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.

10.3. (a) Существуют 5 точек в $\mathbb{R}^4$, которые нельзя разбить на две группы так, что выпуклая оболочка точек первой группы пересекает выпуклую оболочку точек второй группы.
(b) *Теорема Радона.* Любые 6 точек в $\mathbb{R}^4$ можно разбить на две группы так, что выпуклая оболочка точек первой группы пересекает выпуклую оболочку точек второй группы.
(c) *Теорема Каратеодори.* Для любой точки x выпуклой оболочки множества X в $\mathbb{R}^4$ найдутся 5 (или меньше) точек множества X таких, что x содержится в выпуклой оболочке этих 5 (или меньше) точек.

Набор точек в $\mathbb{R}^4$ называется набором *общего положения*, если никакие 5 из них не лежат в одной гиперплоскости.

10.4. Пусть 0,1,2,3,4,5,6 — 7 точек общего положения в $\mathbb{R}^4$, причем первая координата x_0 точки 0 строго больше первых координат остальных точек. Пусть никакие два треугольника с вершинами в этих 7 точках, не имеющих общих вершин, не пересекаются.
(a) Проекции точек 1,2,3,4,5,6 из точки 0 на гиперплоскость $x = x_0 - \epsilon$ находятся в общем положении для достаточно малого $\epsilon > 0$.
(b) Для любого разбиения $\{1,2,3,4,5,6\} = \{i,j,k\} \cup \{p,q,r\}$ поверхности тетраэдров $0ijk$ и $0pqr$ пересекаются ровно в одной точке.
(c) Поверхности двух тетраэдров в $\mathbb{R}^4$ пересекаются ровно в одной точке, являющейся их общей вершиной. Тогда если гиперплоскость пересекает поверхности этих тетраэдров по паре треугольников, то эти треугольки не зацепленны в гиперплоскости.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab2b,2.12abd,3.1ab2a, 4.13a4ad,5.1a,6.123a,7.12a–c,8.12ab,9.1ab5d,10.1a–d		Акимова 1.12ab4,2.1,3.3a,4.123a4b,6.23a
Астафаев 1.1b∓c2a, 5.13a±b	Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$,**ЗДIII,VI**∓,4.14a,6.2d–f3b±4ab,7.12a±cd5d$\frac{\pm}{2}$	
Безадунова 8.2a	Билан 1.1ab2b,2.12a±c±d±f$\frac{\pm}{2}$h,4.12, 6.2ef3ab±,**ЗДVIII,IX**	
Буря 1.1ab2a3b4,2.2a–d34a,3.12a3ac,4.12, 5.2a3,6.12a–d3b,7.12ac,8.12abe,9.15ad ,10.1a–c		Васильев 2.1a, 3.2a3a±
Габдурахманов **ЗДI,IX**,2.12abd,3.2a5,4.12a	Гаглоев 4.12ab+.3a±b±4a±bc∓d∓e±f±,5.1a$\frac{\pm}{2}$	Гацолаева 1.2a
Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d	Гринько 1.123c4ab5a±,2.134a,4.12a3a	Даровских 1.1ab,3.1a2a,4.12,5.1b2a,6.2abd3a
Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a	Долгирев **ЗД I,III**,2.12a34abc$\frac{\pm}{2}$,5.12a4	Думанский **ЗД I**
Елишев 1.1ab2a3c4c,2.12a±b±d±,4.14ab, 6.2abef,**ЗДIX**		Елшин 1.1ab3c,3.1a,4.2a
Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±	
Замятин 1.1–5abc±,2.12a–fh3–5+!, 3.1ab±23,4.123a4a–de±,5.1a2a3,6.12a–g34b, 7.1ac2b±cdmod (abc)4a+!bcd$\frac{\pm}{2}$,8.2a–f3a,9.12a,10.1a		
Заславский **ЗД I,II**,3.1–3,4.123a,5.2a–c	Измаилов 1abc±2a34abc±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**	Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$	Карпушкин 1.1abc+.3c,2.14ab,3.1b2a,10.1a–d
Кельвич 1.1	Кириллов 4.13a	
Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a, 3.12ab+!3ab,4.123a4abf,5.1ab4, 6.23,7.12a–d3a5ab,8.12a–f,9.12a		
Коваленко 1.1b2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a, 4.12ab3a,5.1a2a34,6.23b,7.12bc, 8.12a–c,9.12a,10.1a–c		
Королев 1.1ab	Котельников 1.1ab	Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a
Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.12a–ce, 4.123a4d5, 6.2a–d3a		Крайнюхов 4.13a
Круль 1.12ab34,2.12a–f34a,3.12a, 4.123a4bd,5.1a,6.12ab,8.12a–cef,10.1ab3a		Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a,4.12
Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±	Лукашкин 1.1b2a$\frac{\pm}{2}$3b$\frac{\pm}{2}$5a+.c±,3.1ab+.2a+.b3a	Лященко 1.1ab, 2.12a–c
Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2,2.12ac,3.12a,4.12ab,5.1a3ab,6.2abd,7.1ab2ac,8.12a–c,**ЗД IX**,10.1a–c	
Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III!,VI,X**, 4.123a4abd,5.1a3,7.1,8.12a–ce,9.1		Мещихин 1.2a3c, 8.1
Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a,3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a2ab3a,6.12a–d, 7.1ab2ab5ab,8.12ae9.1ab5d,10.1a–c		
Молоков 1.1ab2a4c,**ЗД II–III**,4.12a, 5.1a3,8.12ac		Неугодов 1.1ab3c4a
Никитин 1.123bc4c,2.12a–e,3.12,4.12, 5.1ab3a,6.23a4c,8.12abce,**ЗД IX**		Никулин 1.1ab2b,2.12a–c
Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a	Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!, 3.1a∓b±2ab±3a±,4.123a±b∓4b±c∓,6.2a–df3	
Пашментов 1.1ab,2.2a,3.12ab3a,4.12a3a, 5.1a2a3a,6.2a–c,8.2ae		Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±,4.3a
Приходько 1.1ab23a4ac,3.1a±b2ab±3a±, 4.12,**ЗД I–II,IV+.,V,VII+.,VIII,IX**		
Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–g34a,3.123a±, 4.12a3a4a,5.2a3ab4,6.2a–f3ab,7.12a–d, 8.12a–eg3a+!,9.15d,10.1a–c		
Сангаджиев (?) 1.1ab	Свириденков 1.1b3	Сеилов 1.1c
Солод 2.12b,3.1a2a,4.12,6.2a–c,8.12ab,9.1a	Табаков 1.1ab3c,2.12a,3.2a,4.2, 10.1ab	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1
Устинский 1.1ab2a, 4.12a	Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a	Хабарова1.1
Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b	Хачатурян 1.1ab
Худяков 1.1ab	Шайдуров **ЗДI**,2.12a±be±f3,3.23c, 4.12a,5.1a3,6.2a–c,7.1ab,8.12ac,9.1,10.1a	
Шарипова 1.123ac4,2.12a–g34a5,3.12a3bc4.12,5.12a–d+!3,6.2a–d,7.1,8.12a–d,9.15d,10.1		
Шевцов 1.123ab±c,2.12a–dg3±4a±, **ЗДIV,IX**,6.12a–df,8.1		Шлыков 1.1ab, 4.12a
Шляпугин 1.1ab3bc$\frac{\pm}{2}$4a, 2.1	Шуклин 1.1ab2a	Ягудин 2.5±,4.1234abd±,**ЗД II±,III,VI**