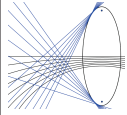


5. Геометрия тканей*

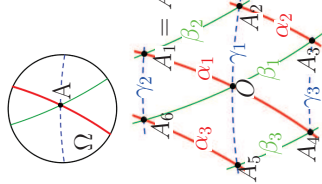
Задача Дня. Теорема Нилова. Докажите, что касательные прямые к эллипсу, посчитанные дважды, и окружности Аполлония с базовыми точками в фокусах данного эллипса содержат гексагональную 3-ткань.



5.1. а) На плоскости даны различные точки A и B . Докажите, что для любого $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, геометрическим местом точек M , таких что $\frac{MA}{MB} = \alpha$, является окружность. Эту окружность мы будем называть *окружностью Аполлония* с базовыми точками A и B .
б) Окружности Аполлония с базовыми точками A и B ортогональны любой окружности, проходящей через точки A и B .

Далее в этом цикле задач под *окружностью* мы понимаем окружность или прямую. Пусть некоторые дуги окружностей, содержащиеся в диске $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, концы которых лежат на границе Ω , покрашены в красный, зеленый и синий цвета. Эти дуги образуют *гексагональную 3-ткань*, если выполнены следующие два условия.

- *Условие слоения.* Через каждую точку круга Ω проходит ровно одна дуга каждого цвета. Дуги разных цветов либо не имеют общих точек, либо пересекаются в одной точке без касания.
- *Условие замыкания.* Возьмем произвольную точку O внутри Ω . Проведем через нее красную, зеленую и синюю дуги. На красной дуге возьмем произвольную точку A_1 . Проведем через нее зеленую дугу. Пусть она пересекла синюю дугу через точку O в точке A_2 . Через точку A_2 уже проведены зеленая и синяя дуги; проведем красную. Точку пересечения этой красной дуги с зеленой дугой через точку O обозначим A_3 . Продолжая это построение, получим точки A_4, A_5, A_6, A_7 . *Условие замыкания* состоит в том, что если все указанные точки существуют, то $A_7 = A_1$.



Три множества окружностей на плоскости *содержат гексагональную 3-ткань*, если их подходящие дуги (возможно, пустые) образуют гексагональную 3-ткань в подходящем диске. Допускается совпадение каких-то двух из рассматриваемых множеств окружностей; в этом случае мы берем две непересекающиеся дуги из каждой окружности данного множества и говорим, что данное множество *посчитано дважды*.

5.2. Следующие множества окружностей содержат гексагональную 3-ткань:

- Прямые, параллельные оси Ox , прямые, параллельные оси Oy , и прямые, проходящие через начало координат O ;
- Ткань Палла.* Три множества прямых, проходящих через три фиксированные попарно различные точки;
- Ткань Бриансона.* Касательные к окружности, посчитанные дважды, и прямые, проходящие через фиксированную точку;

- Ткань Бляшке.* Три множества окружностей, проходящих через пары точек (A, B) , (B, C) и (C, A) соответственно, где A, B, C — попарно различные точки;
- Окружности Аполлония с базовыми точками A и B , прямые, проходящие через A , и прямые, проходящие через B ;
- Касательные к окружности с центром O , посчитанные дважды, и окружности с центром O ;
- Касательные к окружности с центром O , посчитанные дважды, и окружности, касающиеся оси Ox в точке O ;
- Нормали к параболе, посчитанные трижды;
- Нерешенная задача.* Касательные прямые к эллипсу, посчитанные дважды, и окружности, проходящие через оба фокуса данного эллипса.

5.3. а) *Оптическое свойство эллипса.* Дан эллипс с фокусами F_1 и F_2 . Пусть прямая l касается данного эллипса в точке P . Тогда прямая l является внешней биссектрисой угла F_1PF_2 .

б) *Изогональное свойство эллипса.* Проведем из любой точки P , лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y . Тогда углы F_1PX и F_2PY равны.

5.4. Даны три множества дуг в круге Ω с концами на границе Ω , удовлетворяющих условию слоения. Каждой дуге поставлено в соответствие действительное число, причем разным дугам из одного множества соответствуют разные числа. Известно, что для любых трех дуг, пересекающихся в одной точке, сумма соответствующих им чисел равна нулю. Докажите, что данные множества дуг образуют гексагональную 3-ткань.

	Сладкие решения
Абрамов 1.1ab, 2.12abd, 3.1ab2a	Акимова 1.12abf, 2.1
Васильев 2.1a, 3.2a3a±	Гацалова 1.2a
Гришко 1.123c4ab5a±, 2.134a, 4.12a3a	Дарюнский 1.1ab, 3.1a2a, 4.12ab
Долгирев 3Д I	Думанский 3Д I
Елтин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1-1.4
Замятин 1.123ac4bc 2.12a-d, 3.2a3a, 4.1	Заславский 1.123bc4a5±, 2.2a-e3+, 3Д III
Ильин 1.123ab, 2.12ab	Казачев 1.1abc2ac4ab±c±, 3Д III
Каратушкин 1.1ab±3c	Кельвич 1.1
Киселёв 1.1ab234ab±, 2.12a-d3a, 3.2a	Коваленко 1.2b, 2.12a-e34ab, 3.1a2ab3a
Красов 1.1ab2ac, 3.2a	Кравцов 1.1bc23ac4ab±c±5a, 2.2ab, 4.12
Крылов 1.12ab3a, 2.12a-34a, 3.12a, 4.12a	Лагуновская 1.1ab3bc±, 2.12a34ab
Ляпченко 1.1ab, 2.12a-c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd
Магунский 1.12a4, 2.2a-34, 3Д III, 4.1	Мещинин 1.2a3c
Молюков 1.4c±, 2.2a±c±d±ef±, 3Д III	Неуголов 1.1ab3c4a
Новик 1.1a±b, 3.2ab±, 4.12a	Самодуров 1.1ab±3/2ab
Райко 1.1ab234ab±c±, 2.12a-eg34a, 3.1a2a, 4.13a	Сивагджиев (?) 1.1ab
Солод 4.12	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1
Федоров 1.1ab4c	Халайджки Саина 1.1a2b
Хачатурян 1.1ab	Хуляков 1.1ab
Шарипова 1.123ac4, 2.12a-e34a, 3.12ac±, 4.12a	Шевцов 1.1a2a±b3a±c±
Шусткин 1.1ab2a	