

7. Геометрия Лобачевского

Задача Дня. Фольклорная задача. Найти геометрическое место точек плоскости Лобачевского, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

В этом цикле задач все построения производятся на плоскости Лобачевского.

Серия А. Лучи AB и CD параллельны, если они не пересекаются, но при этом любой луч AH , лежащий строго внутри угла SAB , пересекает луч CD . Прямые параллельны, если они содержат два параллельных луча. *Аксиома Лобачевского:* через точку A вне прямой CD можно провести две различные прямые, параллельные CD . *Угол параллельности* для A и CD — это половина угла между двумя проведенными прямыми.

7.1. Если две различные прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые: а) не пересекают друг друга; б) не параллельны друг другу; с) не имеют других общих перпендикуляров, кроме третьей прямой.

Серия В. В модели Клейна и Пуанкаре точки плоскости Лобачевского изображаются точками круга на плоскости Евклида (не включая граничную окружность). В модели Клейна прямые изображаются хордами этого круга (не включая концы), а в модели Пуанкаре — диаметрами круга или дугами с концами на граничной окружности, перпендикулярными ей (не включая концы). Расстояние между точками X и Y вычисляется по формуле $\text{const} \cdot |\ln(A, B, X, Y)|$, где AB — изображение прямой, проходящей через X и Y , а $\text{const} = \frac{1}{2}$ для модели Клейна и $\text{const} = 1$ для модели Пуанкаре.

7.2. а) Если она из перпендикулярных прямых изображается в модели Клейна диаметром, то вторая изображается перпендикулярной ему хордой.

б) Если две прямые изображаются в модели Клейна или Пуанкаре диаметрами, то угол между прямыми равен углу между их изображениями.

с) Две параллельные прямые изображаются в модели Клейна или Пуанкаре хордами или дугами с общим концом.

д) Выразите угол параллельности для точки A и прямой CD через длину перпендикуляра, опущенного из A на CD .

7.3. Пусть ABC — треугольник.

а) *Гиперболическая теорема Пифагора.* Если $\angle ABC$ — прямой, то $\text{ch } AC = \text{ch } AB \text{ ch } BC$.

б) *Гиперболическая теорема косинусов:* $\text{sh } AB \text{ sh } BC \cos \angle ABC = \text{ch } AB \text{ ch } BC - \text{ch } AC$.

с) Сформулируйте и докажите гиперболическую теорему синусов.

7.4. Правильный n -угольник вписан в окружность радиуса r . Найдите:

а) стороны; б) углы; в) площадь n -угольника; г) длину и площадь окружности.

7.5. Какой фигурой изображается:

а) окружность; б) орицикл; в) эквидистанта; г) конус; д) эллипс; — в модели Пуанкаре;

е) орицикл; ф) эквидистанта; г) конус; д) эллипс; — в модели Клейна? *Примечание.* В пункте г) рассматривается 3-мерное пространство Лобачевского.

и) Через любые три точки проходит окружность, орицикл, эквидистанта, или прямая.

Сладкие рошениа

Абрамов 1.1a2b, 2.12abd, 3.1ab2a, 6.123a	Аксимова 1.12ab34, 2.1, 3.3a, 4.123ab	Асташова 5.13c±b
Вайдаков 1.1a23ab±c±4a±e±2.34ac±, ЗД III, УГГ-6.2f-5bb±fa	Буры 1.1a23ab34, 2.2a-c34ac±, 3.2ab3a±	Били 1.1a2b2, 2.12a±c±d±d
Герасимова 1.1a23ab±c±4a, 2.12a±b±c±d	Гришко 1.1234ab3a±, 2.134a, 4.12a3a	Головина 1.2a
Дмитриенко 1.13c4a, 2.12ab, 3.1ab±2a	Долгирев ЗД I, III, 2.12a34ab±c±	Дерюжих 1.1ab, 3.1a2a, 4.12.5.1b2a, 6.2ab3a
Елшова 1.1a±b±c	Елшин 1.1ab3c	Дуванский ЗД I
Жукова 1.1a±b±c	Заматин 1.1-5abc±, 2.12a-fb3-5+, 3.1ab±23.4.12a34a-de±5.1a2a3, 6.2a-cdfg±	Ерошенко 1.1-1.4
Казанцев ЗД I, III, 2.12a-g34, 3.1-3	Измайлов 1abc±2a34ab±c±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Карпушкин 1.1ab±c±3c	Кельвач 1.1	Каргущин 1.1a±
Киселев 1.1ab234ab, 2.12a-c34a, 3.12ab±3ab, 4.123ab, 6.23	Коза 1.1a±b±c±d±e±5a, 2.12a-c±e, 4.123ab±d±5.1a3	Королев 1.1ab
Ковалево 1.2b4c±2.12a-c34ab, 3.1a2ab3a, 4.12ab3a, 5.1a4, 6.2a-c3b	Круль 1.12ab34, 2.12a-b3a, 3.12a, 4.123ab±d	Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab24c, 3.2a	Лагушкин 1.12a, 2.12a-c	Лагушкова 1.1ab3bc±, 2.12a34ab, 3.2a, 4.12
Крайнов 4.13a	Ляшенко 1.1ab, 2.12a-c	Малыхов 1.1ab3c, 2.12ab±d
Легкова 1.1a±b±2a, 2.2a±b±c±de±f±g±h±i±j±k±l±m±n±o±p±q±r±s±t±u±v±w±x±y±z±	Маслов 1.1ab2, 2.1, 4.12ab	Михайлов 1.1ab3bc±d±5.1a3
Мешков 1.2a3c	Молоков 1.1ab±c±3d±e±f±g±h±i±j±k±l±m±n±o±p±q±r±s±t±u±v±w±x±y±z±	Михайлов 1.1ab34a
Молоков 1.1ab±c±3d±e±f±g±h±i±j±k±l±m±n±o±p±q±r±s±t±u±v±w±x±y±z±	Новик 1.1a±b±c±3.2ab±, 4.12a	Новиков 1.1ab±c±23ab±e±4a, 2.12abd±g±i±j±k±l±m±n±o±p±q±r±s±t±u±v±w±x±y±z±
Новик 1.1a±b±c±3.2ab±, 4.12a	Пашкевич 1.1ab, 2.2a, 3.12ab3a, 4.12a, 5.1a	Никитин 1.1ab3bc±c
Пашкевич 1.1ab, 2.2a, 3.12ab3a, 4.12a, 5.1a	Райко 1.1ab234ab±c±2.12a-g34a, 3.123a±, 4.123a±4a, 6.2a-f3ab	Прыжковский 1.1ab23a±4ac, 3.1a±b2ab±3a±, 4.12
Райко 1.1ab234ab±c±2.12a-g34a, 3.123a±, 4.123a±4a, 6.2a-f3ab	Самодельцев (?) 1.1ab	Смирдиленков
Самодельцев (?) 1.1ab	Солод 4.12	Трифонов 1.1ab±c±23ac±4a, 2.1
Солод 4.12	Федоров 1.1a2b3c, 2.4a±, 3.2a	Халайский 1.1ab2a, 4.12a
Федоров 1.1a2b3c, 2.4a±, 3.2a	Халайский Саша 1.1a2b	Халайский Леона 1.2b
Халайский 1.1ab	Хураков 1.1ab	Шаймуров 1.1-34c5±, 2.13, 3.3c
Шарипова 1.123ac±4.2.12a-f34a, 3.12ab3c, 4.12.5.12a±f3	Шелева 1.123ac±4.2.12a-f34a, 3.12ab3c, 4.12.5.12a±f3	Шелева 1.1ab2a±b3a±c±
Шелева 1.123ac±4.2.12a-f34a, 3.12ab3c, 4.12.5.12a±f3	Шляхов 1.1ab, 4.12a	Шушени 1.1a2a