Листок 4.

Ряд и произведение.

Задача 1. Пусть $|q| < 1$. Докажите сходимость и найти суммы:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Задача 2. Пусть f_n – числа Фибоначчи, т. е. $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{10^n}$.

Задача 3. Докажите, что для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными a_n достаточно хотя бы одного из следующих двух условий:

(Признак Даламбера) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$,

(Признак Коши) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Покажите, что в каждом из этих признаков, если пределы больше 1, то ряд расходится, а если равны 1, то ничего про сходимость утверждать нельзя.

Задача 4. Пусть последовательность a_n убывает к нулю. Докажите, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходятся и расходятся одновременно. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. (Указание: $a_{2^n} + \ldots + a_{2^{n+1}-1} \le 2^n a_{2^n}$.)

Задача 5. Докажите, что если $a_n, b_n > 0$ и существует конечный отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Задача 6. (Признак Лейбница) Пусть последовательность a_n монотонно убывает к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится. (Указание: рассмотрите отдельно частичные суммы с нечетными номерами.)

Задача 7. Докажите, что из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, но обратное не верно.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Пусть $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Следующее равенство называют преобразованием Абеля: $\sum_{k=m}^{n} a_m b_m = a_n B_n - a_m B_{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) B_k$.

Задача 8. Обоснуйте преобразование Абеля.

Задача 9. Докажите признак Дирихле. Пусть a_n монотонно стремится к нулю и суммы $\sum_{n=1}^{N} b_n$ ограниченны. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Задача 10. Докажите признак Абеля. Пусть a_n монотонная и ограниченная последовательность и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Задача 11. Исследуйте сходимость (абсолютную тоже) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$.

Задача 12*. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$. (Указание: оцените частичную сумму $\sum_{n=1}^{N} \cos\sqrt{n}$.)

Задача 13. (Теорема Римана) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится (в этом случае говорят, что ряд сходится условно). Докажите, что переставляя члены ряда можно получить любую наперед заданную сумму. Возможно ли такое в случае, когда ряд из модулей сходится?

Задача 14. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что

(a) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, (b) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Задача 15. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $a_n > 0$. Докажите, что найдется такая неубывающая последовательность c_n, что $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ сходится.

Пусть $a_n > 0$. Предел

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$$

называется бесконечным произведением. Если этот предел конечен и отличен от нуля, то говорят, что произведение сходится. В остальных случаях говорят, что произведение расходится.

Задача 16. Докажите сходимость и найдите произведения:

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$, (b) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^{2^n})$, (c) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{x}{2^n})$.

Задача 17. Докажите, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

Задача 18. Пусть $|x| < 1$. Используя неравенства $e^x \le x+1$ и $\ln x \le x-1$ докажите, что (i) $0 \le e^x - 1 - x \le x^2$, (ii) $0 \le x - \ln(1 + x) \le x^2$. Выведите из этих оценок следующие асимптотические равенства

(a) $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}$, (b) $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}$, (c) $(1 + \frac{1}{n})^p = 1 + \frac{p}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}$,

где γ_n – ограниченная последовательность.

Задача 19. Пусть $a_n = 1 + \alpha_n$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + \alpha_n)|$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$. Исследуйте сходимость $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n^p})$.

Задача 20. Пусть $b_n > 0$ и $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n$ причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ сходится. Докажите, что существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Задача 21. Пусть $a_n > 0$. Предположим, что $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится. Докажите, что $a_n \sim \frac{a}{n^p}$ для некоторого ненулевого числа a.

Задача 22. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^q}$.

Задача 23. Пусть p_n – занумерованные в порядке возрастания простые числа. Докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_n^s}\Big)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

где $s > 1$. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится.