НМУ, I курс, 17.10.2014

Листок 5.

Топология вещественной прямой, p-адические числа.

Множество на прямой называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторый интервал, включающий эту точку. Множество на прямой называется *замкнутым*, если его дополнение – открытое множество.

Задача 1. Докажите, что пересечение конечного числа и объединение любого семейства открытых множеств открыто. Покажите, что пересечение счетного семейства открытых множеств может быть не открыто. Докажите, что объединение конечного числа и пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Покажите, что объединение счетного семейства замкнутых множеств может быть не замкнуто.

Задача 2. Для всякого $A \subset \mathbb{R}$ докажите, что множество его предельных точек замкнуто.

Задача 3. Является ли $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ множеством предельных точек некоторого подмножества прямой?

Задача 4. Докажите, что любое открытое множество на прямой – это объединение не более, чем счетного семейства непересекающихся интервалов.

Задача 5. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ является объединением некоторого семейства попарно непересекающихся отрезков. Может ли так быть, что в любом интервале прямой есть точка изA?

Задача 6. Является ли вся прямая объединением некоторого семейства попарно непересекающихся отрезков?

Задача 7. Существует ли семейство подмножеств в $\mathbb{N}$, имеющее мощность континуум и обладающее тем свойством, что из любых двух множеств этого семейства одно обязательно содержится в другом?

Задача 8. Пусть дано бесконечное подмножество отрезка $[0, 1]$. Докажите, что оно имеет хотя бы одну предельную точку.

Задача 9. Из некоторого множества на прямой удалили все его изолированные точки, затем из того множества, которое получилось, опять удалили все изолированные точки и т.д. Возможно ли проделать такую процедуру бесконечное число раз, причем так, что каждый раз найдется, что удалить ?

Задача 10. Докажите, что всякое замкнутое множество на прямой либо конечно, либо счетно, либо континуально.

Задача 11. Пусть $a_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \to \infty$. Кроме того, пусть $\lim_k a_k = 0$. Найдите множество частичных пределов последовательности дробных частей $b_n = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$.

Задача 12. Докажите, что множество частичных пределов ограниченной последовательности, расстояние между соседними членами которой стремится к нулю, является либо точкой, либо отрезком.

Задача 13. Найдите множество частичных пределов последовательности $a_n = \sin^k(n)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Задача 14. Докажите, что прямую нельзя представить в виде объединения двух непустых и непересекающихся (a) открытых множеств, (b) замкнутых множеств.

Задача 15. Опишите все подмножества прямой, каждое из которых являются одновременно открытым и замкнутым множеством.

Множество A на прямой называется *нигде не плотным*, если для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ найдется интервал $I' \subset I$, такой что в I' нет ни одной точки из A.

Задача 16. Покажите, что множество чисел из отрезка $[0,1]$, в десятичной записи которых не встречается последовательность 223222, является нигде не плотным.

Задача 17. Приведите пример нигде не плотного множества из континуума элементов.

Задача 18. *Теорема Бэра.* Докажите, что прямую нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Задача 19. Является ли множество иррациональных чисел объединением счетного семейства замкнутых множеств?

Будем обозначать символом $\mathbb{Q}_p$ множество p-адических чисел, символом $\mathbb{Z}_p$ — множество целых p-адических чисел. Напомним, что на них определена норма $|\cdot|_p$.

Задача 20. Докажите, что для фундаментальной по норме $|\cdot|_p$ последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ верно, что либо последовательность $|r_n|_p$ сходится к нулю, либо начиная с некоторого номера последовательность $|r_n|_p$ постоянна.

Задача 21. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{Q}_p$ выполнено $|a+b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p)$ и $|ab|_p = |a|_p|b|_p$. Проверьте, что всякая точка интервала $B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \colon |x-a|_p < r\}$ является его центром. Докажите, что всякое подмножество $\mathbb{Q}_p$, состоящее из не менее чем двух точек, можно представить в виде объединения двух непустых и непересекающихся открытых множеств (в этом случае говорят, что множество несвязно).

Задача 22. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда $|x_{n+1} - x_n|_p \to 0$. Докажите, что ряд в $\mathbb{Q}_p$ сходится тогда и только тогда, когда его члены стремятся к нулю. Докажите сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n!$.

Задача 23. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ не делится на простое число p. Докажите, что последовательность $a_n = k^{p^n}$ сходится в $\mathbb{Q}_p$; обозначим предел символом α. Докажите, что $\alpha^{p-1} = 1$.

Задача 24. Докажите, что представление элемента $x \in \mathbb{Q}_p$ в виде ряда

$$b_m p^{-m} + \ldots + b_1 p^{-1} + a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n + \ldots,$$

где $b_k, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, единственно. Найдите p-адическое разложение числа $\frac{1}{5}$ в $\mathbb{Q}_7$. Докажите, что p-адическое разложение числа $a \in \mathbb{Q}_p$ периодично начиная с некоторого места тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{Q}$.

Задача 25. Докажите, что в $\mathbb{Q}_p$ нет делителей нуля (для любых $a, b \in \mathbb{Q}_p$, $a, b \neq 0$, выполнено $ab \neq 0$). Найдите множество обратимых элементов в $\mathbb{Z}_p$ (элемент $a \in \mathbb{Z}_p$ обратим, если существует $b \in \mathbb{Z}_p$, такой что $ab = 1$).