

6

6.1. Пользуясь таблицами Кэли, оцените сверху и снизу количество *изоморфных классов* трёхэлементных *магм*.

6.2. Рассмотрите на произвольном множестве операцию $a * b = b$. Ассоциативна ли она? Обладает ли нейтральным элементом? Можно ли так ослабить требование к нейтральному элементу, чтобы рассматриваемая операция ему удовлетворяла?

6.3*. (Фюрстенберг, 1955). Покажите, что группу можно определить как множество с одной бинарной операцией $G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto g/h$, удовлетворяющей двум аксиомам:

1) $\forall f, g, h \in G [(f/h)/(g/h) = f/g]$;

2) $\forall g, h \in G [\exists x [g/x = h]]$.

Умножение в G задаётся равенством $gh := g/((h/h)/h)$.

6.4. Составьте таблицу Кэли группы автоморфизмов трёхэлементного множества так, чтобы её левый верхний 3×3 угол оказался таблицей Кэли трёхэлементной циклической группы. Ваши наблюдения над остальными 3×3 -*четвертинками*? Их объяснение?

6.5. Докажите, что любая некоммутативная группа порядка 8 имеет вид $\{1, a, a^2, a^3; b, ab, a^2b, a^3b\}$. Постройте часть (3/4) соответствующей таблицы Кэли. Убедитесь в том, что для b^2 есть только две возможности: $b^2 = 1$ и $b^2 = a^2$. Завершите построение таблиц Кэли каждой из групп.

6.6. Обозначив $i := i + 0 \cdot j$ и $k := 0 + i \cdot j$ кватернионы из тела $\mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot j$, убедитесь, что множество кватернионов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ образует группу по умножению. Какой из групп предыдущей задачи она изоморфна?

6.7. Составьте левые и правые разложения по классам смежности всех подгрупп группы $\text{Aut}\{1, 2, 3\}$. В каких случаях левые и правые разложения совпадают?

6.8. Перечислите нормальные подгруппы всех известных вам 8-элементных групп. Определите соответствующие фактор-группы.

6.9. Убедитесь, что группа $\text{Aut}\{1, 2, 3\}$ изоморфна полупрямому произведению 2-элементной и 3-элементной групп.

6.10. Какие из известных вам 8-элементных групп разлагаются в *нетривиальные* полупрямые произведения?

6.11.** Выполняется ли в категории групп аналог *теоремы Кантора-Бернштейна*: если каждая из двух групп изоморфна собственной подгруппе другой, то группы изоморфны? **Совет.** Рассмотрите свободные группы с двумя образующими и со счётным множеством образующих.

22 октября, Г.Б. Шабат