Представления симметрических групп

0. Введение. Наша цель на ближайшее время — изучить представления симметрических групп (над алгебраически замкнутым полем характеристики 0).

Как обсуждалось на позапрошлой лекции, неприводимых представлений у группы столько же, сколько классов сопряженности. Класс сопряженности перестановки определяется ее циклической структурой — то есть для $\mathfrak{S}_n$ они нумеруются *разбиениями* числа n; графически их удобно изображать в виде *диаграмм Юнга*.

К сожалению, никакого *канонического соответствия* между классами сопряженности и неприводимыми представлениями вообще говоря нет; в терминах прошлой лекции можно сказать, что это два разных ортогональных базиса в пространстве *центральных* (постоянных на классах сопряженности) функций на группе.

Тем не менее, разумное соответствие между диаграммами Юнга из n клеток и неприводимыми представлениями группы $\mathfrak{S}_n$ существует — и есть даже несколько его конструкций. Мы будем следовать индуктивному подходу Вершика и Окунькова (1996; http://mi.mathnet.ru/znsl840), в котором метод близок к классическому описанию представлений групп и алгебр Ли, а комбинаторика диаграмм Юнга возникает естественно.

1. Ветвление. Симметрические группы образуют естественную цепочку: $\mathfrak{S}_{n-1}$ вкладывается в $\mathfrak{S}_n$ как стабилизатор последнего элемента. Мы изучим, что происходит в этой цепочке с (неприводимыми) представлениями.

Пусть H — подгруппа группы G. Неприводимое представление группы G разлагается в сумму неприводимых представлений группы H с какими-то кратностями. Если все эти кратности равны 0 или 1, говорят о *простом ветвлении*.

В силу леммы Шура отсутствие кратностей для представления V группы H равносильна тому, что алгебра $\operatorname{End}_H(V)$ коммутативна. Как мы знаем, все линейные преобразования всех неприводимых представлений группы G удобно упакованы в групповую алгебру $\mathbb{C}G$:

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{V\in\operatorname{IrrRep}(G)} \operatorname{End}_{\mathrm{vect}} V.$$

Морфизмами H-представлений из них являются те, что коммутируют с действием H, т. е. *централизатор*[1] подалгебры $\mathbb{C}H$ в алгебре $\mathbb{C}G$:

$$\bigoplus_{V\in\operatorname{IrrRep}(G)} \operatorname{End}_H(V) \cong Z(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G).$$

Следствие: простота ветвления для вложения $H \subset G$ равносильна коммутативности централизатора $Z(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G)$.

Ясно, что этот централизатор содержит как $Z(\mathbb{C}H)$, так и $Z(\mathbb{C}G)$ и достаточное условие его коммутативности — равенство $Z(\mathbb{C}H, \mathbb{C}G) = \langle Z(\mathbb{C}H), Z(\mathbb{C}G)\rangle$.

Докажем, что такое равенство имеет место для включения $\mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n$. Для этого посмотрим на проектор

$$\pi\colon \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \to Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}, \mathbb{C}\mathfrak{S}_n), \quad x \mapsto \frac{1}{|\mathfrak{S}_{n-1}|}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} \sigma^{-1}x\sigma.$$

[1]Напомним, что $Z(B, A) = \{z \in A \mid \forall b \in B\ zb = bz\}$; в частности $Z(A, A) = Z(A)$.

Образ перестановки с данной циклической структурой получается как разность элемента из $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ (получающегося усреднением по всей группе $\mathfrak{S}_n$) и «аналогичного» элемента из $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1})$.

2. Граф Юнга и базисы Гельфанда–Цетлина. Рассмотрим граф, вершины которого суть неприводимы представления симметрических групп, а ребро ведет из $U \in \mathrm{IrrRep}(\mathfrak{S}_{n-1})$ в $V \in \mathrm{IrrRep}(\mathfrak{S}_n)$, если U входит в разложение $V|_{\mathfrak{S}_{n-1}}$.

По этому графу можно понять, как неприводимое представление группы $\mathfrak{S}_n$ раскладывается в сумму неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_{n-k}$: получается сумма концов всех путей, ведущих из этого представления на k этажей вниз.

В частности, любое представление V каноническим образом разлагается в сумму одномерных пространств («неприводимых представлений $\mathfrak{S}_1$»), количество которых равно числу путей из корня нашего графа в вершину V. Выбрав в каждом таком одномерном пространстве по вектору, можно получить в каждом представлении *базис Гельфанда–Цетлина* (каждый элемент которого определен почти канонически: с точностью домножения на константу).

Как мы увидим, этот граф ветвления — это в точности *граф Юнга*, вершины которого суть диаграммы Юнга, а каждое ребро соответствует добавлению клетки. Соответственно, пути из корня (т. е. элементы базиса Гельфанда–Цетлина) нумеруются *стандартными таблицами* данной формы (способами так заполнить данную диаграмму числами от 1 до n, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа строго возрастали).

Более того, мы опишем явно действие в таком базисе образующих симметрической группы.

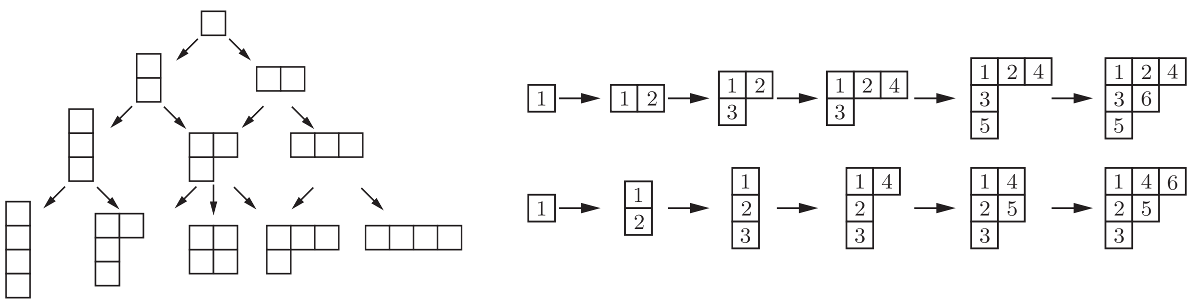

Рис. 1: Пути в графе Юнга и стандартные таблицы.

3. Алгебра Гельфанда–Цетлина и ее спектр. Итак, хотя у симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ нет больших коммутативных подгрупп, у ее групповой алгебры есть большая коммутативная подалгебра, *алгебра Гельфанда–Цетлина* $GZ(n) = \langle Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_1), \ldots, Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)\rangle$.

По-другому можно сказать, что это алгебра, порожденная всеми централизаторами, обсуждавшимися выше (и базис Гельфанда–Цетлина есть разложение в сумму неприводимых представлений этой алгебры). Централизатор $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}, \mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ порождается (мультипликативно) центром $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1})$ и *элементом Юнга–Юциса–Мёрфи*

$$X_n := (1\ n) + (2\ n) + \ldots + (n-1\ n).$$

Действительно, центр групповой алгебры симметрической группы порождается суммами всех циклов данной длины, поэтому достаточно выразить элементы типа $\sum(i_1\ \ldots\ i_k\ n)$, а это уже обсуждалось в упражнениях (указание: рассмотреть X_n^k и применить индукцию).

Таким образом, алгебра Гельфанда–Цетлина порождается элементами Юнга–Юциса–Мёрфи, а базис Гельфанда–Цетлина составлен из общих общих собственных векторов соответствующих операторов.

Эта алгебра играет роль, до некоторой степени аналогичную максимальному тору группы Ли. В частности, как мы сейчас увидим, представление полностью задается ее спектром (набором собственных значений операторов X_n).

Действительно, пусть v_α — элемент базиса Гельфанда–Цетлина, на котором X_i действует с собственным значением α_i («имеющий *вектор содержаний* α»). Как могут действовать *кокстеровские образующие* $s_{i-1} := (i-1\ i)$? Элементы X_{i-1}, X_i и s_{i-1} удовлетворяют соотношениям (вырожденной аффинной) *алгебры Гекке*

$$H(2) := \mathbb{C}\{X, X', s\}/\langle XX' = X'X,\ s^2 = 1,\ sX - X's = 1\rangle.$$

В листке предлагалось описать представления этой алгебры. Сделав это, нетрудно увидеть (возьмем общий собственный вектор для операторов X и X' и диагонализуем в пространстве $\langle v, sv\rangle$ операторы X и X'), что

$$s_{i-1}v_\alpha = \begin{cases} \pm v_\alpha, & \text{если } \alpha_i = \alpha_{i-1} \pm 1; \\ v_{s_{i-1}\alpha} + \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} v_\alpha, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{*}$$

4. Векора содержаний и таблицы. Возникает программа дальнейших действий:
— описать вектора содержаний, происходящие из представлений группы $\mathfrak{S}_n$;
— выяснить, какие вектора содержаний *эквивалентны*, т. е. соответствуют разным элементам базиса одного и того же представления.

Из формулы (*) видно, что эквивалентные вектора получаются друг из друга перестановками — но *допустимы* не все перестановки: соседние элементы разрешается переставлять только если они отличаются более чем на единицу.

Пример: для векторов содержаний $(0, 1, \ldots, n-1)$ и $(0, -1, \ldots, -n+1)$ допустимые перестановки отсутствуют (т. е. соответствующие представления одномерны), а все кокстеровские образующие действуют умножением на $+1$ и -1 соответственно (т. е. это соответственно тривиальное и знаковое представления). *Еще пример:* $(0, 1, -1) \sim (0, -1, 1)$.

Сопоставим вектору содержаний диаграмму следующим образом. Будем сбрасывать в угол, образованный лучами $(1, 1)$ и $(-1, 1)$, клетки: сначала квадратик с меткой 1 из точки $(\alpha_1, +\infty)$, потом квадратик с меткой 2 из точки $(\alpha_2, +\infty)$ и т. д. (клетки падают вертикально вниз пока могут, но не «съезжают» по горизонтали; см. рис.).

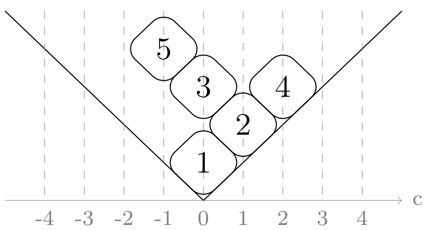

Рис. 2: Диаграмма для вектора содержаний $\alpha = (0, 1, 0, 2, -1)$.

Ясно, что допустимые перестановки компонент целочисленного вектора (а как мы скоро увидим, вектор содержаний всегда целочисленный) не влияют на форму возникающей диаграммы. Наша **цель** — доказать, что так получаются в точности таблицы Юнга (нарисованные «русским способом», отличающимся от обычного поворотом на 135°), а все таблицы данной формы отличаются на допустимую перестановку.

Как убедиться, что допустимая диаграмма является таблицей Юнга? Достаточно доказать всего 3 вещи:

— содержания всех клеток целочисленны;
— до клетки с содержанием $n > 0$ есть клетка с содержанием $n - 1$ ($n + 1$ при $n < 0$);
— между двумя клетками с содержанием n есть клетки с содержаниями $n \pm 1$.

Первые два условия выполнены, так как в противном случае допустимыми перестановками можно сделать ненулевой первую координату вектора содержаний (а $X_1 = 0$ действует, конечно, с нулевым собственным значением).

Перейдем к третьему условию. Фрагмент вида $n, n \pm 1, n$ не может входить в вектор содержаний, так как на таком векторе не выполнены соотношения Кокстера ($s_i s_{i+1} s_i$ и $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ действуют противоположными знаками). Остальные случаи сводятся к этому допустимыми перестановками (указание: возьмем минимальный по включению фрагмент вида $n, \ldots, n$ и начнем сдвигать его края друг к другу...).

Наконец, то, что все стандартные таблицы данной формы получаются друг из друга допустимыми перестановками — несложное упражнение (можно, например, получать все таблицы из таблицы, в которой числа расставлены последовательно по строкам).

5. Заключение. Итак, доказано следующее.

— Неприводимые представления симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ нумеруются диаграммами Юнга из n клеток.
— Элементы базиса Гельфанда–Цетлина данного неприводимого представления нумеруются стандартными таблицами данной формы.

(Это описание отлично согласовано с ограничениями на меньшие подгруппы; в частности, хорошо видно правило ветвления: ограничение неприводимого представления $\mathfrak{S}_n$ на $\mathfrak{S}_{n-1}$ есть сумма всевозможных “откусываний клетки”.)

— Элемент X_i групповой алгебры действует на векторе базиса с собственным значением, равным содержанию i-й клетки. Кокстеровские образующие действуют на базисных элементах по формулам, совпадающим с точностью до умножения на константу с (*), где α_i — содержание i-й клетки.

(Все матричные элементы получились, отметим, вещественными, даже рациональными.)

Что еще хотелось бы знать о представлениях симметрических групп? Прежде всего хотелось бы иметь описание *характеров* неприводимых представлений. Оказывается, характер неприводимого представления дается (в некотором смысле) соответствующим *многочленом Шура* (элементом некоторого замечательного базиса в кольце симметрических функций); есть и чисто комбинаторное описание характеров в терминах т. н. ленточных таблиц (*правило Мурнагана–Накаямы*). Это позволяет смотреть на разные утверждения с трех совершенно разных точек зрения (теории представлений, симметрических функций, комбинаторики).

Те, кто уже сталкивался с многочленами Шура, слышали, вероятно, что они возникают в теории представлений и по-другому: как характеры неприводимых представлений полной линейной группы — которые тоже нумеруются диаграммами Юнга. Это не случайное совпадение, а проявление *двойственности Шура–Вейля* между представлениями симметрических и полных линейных групп.