

## Листок 7. Представления группы $\mathfrak{S}_4$ и ее друзей

▷ Во всех задачах все представления — над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

**Задача 7.1.** а) Неприводимые представления конечной абелевой группы  $A$  образуют группу (относительно операции  $\otimes$ ), изоморфную (неканонически)  $A$ .

б) Одномерные представления группы  $G$  суть представления группы  $G^{ab} := G/[G, G]$ .

в) У группы  $\mathfrak{S}_n$  ровно два одномерных представления.

▷ Рассмотрим перестановочное представление  $\mathfrak{S}_n$  в  $n$ -мерном пространстве, связанное с действием  $\mathfrak{S}_n$  на множестве  $\{1, \dots, n\}$ . Стандартное представление группы  $\mathfrak{S}_n$  — это  $(n - 1)$ -мерное подпредставление в этом представлении.

**Задача 7.2.** Группа  $\mathfrak{S}_4$  разбивается на 5 классов сопряженности, поэтому у нее ровно 5 неприводимых представлений. Три из них мы уже знаем: это фундаментальное представление и два одномерных.

а) Постройте оставшиеся неприводимые представления группы  $\mathfrak{S}_4$  (указание: одно из них возникает из изоморфизма  $\mathfrak{S}_4/V_4 \cong \mathfrak{S}_3$ ).

б) Выпишите таблицу характеров представлений  $\mathfrak{S}_4$ .

в) Составьте «таблицу умножения» представлений  $\mathfrak{S}_4$  (для любых двух неприводимых представлений выясните, как раскладывается в сумму неприводимых их тензорное произведение).

г) Выясните, как неприводимые представления  $\mathfrak{S}_4$  раскладываются при ограничении на  $\mathfrak{S}_3$  (вложенной в  $\mathfrak{S}_4$  как стабилизатор последнего элемента).

**Задача 7.3.** Опишите все неприводимые представления группы  $\mathfrak{A}_4$  и вычислите их характеры. Какие из представлений  $\mathfrak{S}_4$  остаются неприводимыми при ограничении на  $\mathfrak{A}_4$ , а какие раскладываются в прямую сумму неприводимых? Какие пары неизоморфных представлений  $\mathfrak{S}_4$  изоморфны как представления  $\mathfrak{A}_4$ ?

**Задача 7.4\*.** Опишите все неприводимые представления группы  $\mathfrak{A}_5$  и вычислите их характеры.